This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

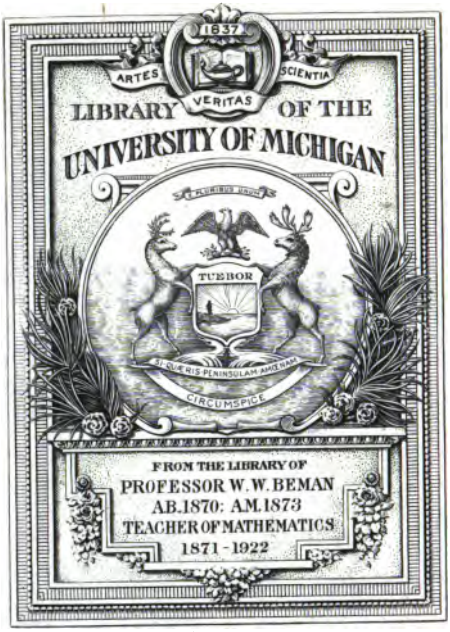
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

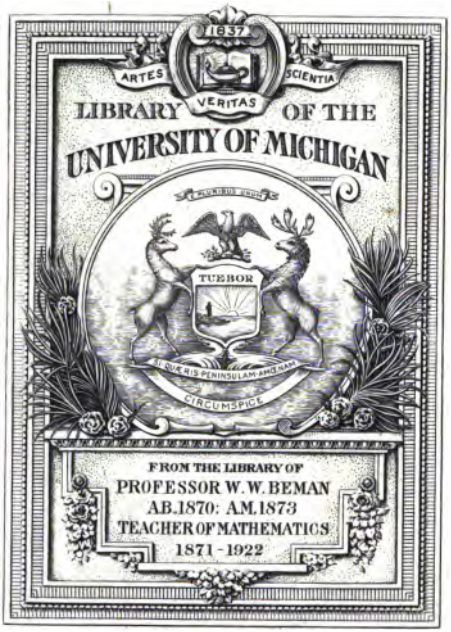
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

MATHEMATI
QA
950
.L716
1880

Geometrische Konstruktions-Aufgaben.

Herausgegeben
von
Prof. Dr. H. Lieber,
Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin,
und
F. von Lühmann,
Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark.

Achte Auflage.

Mit einer Figurentafel.

Berlin.
Verlag von Leonhard Simion.
1889.

W. W. Benaw
Pt.
6-5-1923

26 Feb. 25. EHW

Vorrede.

Die geometrischen Konstruktions-Aufgaben dienen, wie alle Übungsaufgaben zur Befestigung der gewonnenen Kenntnisse; außerdem eignen sie sich aber ganz besonders dazu, das Interesse der Schüler für die Mathematik zu erwecken; namentlich ist dies bei den Schülern der Tertia der Fall, da gerade in dieser Klasse die arithmetischen Aufgaben hauptsächlich nur zum festen Einprägen der gegebenen Regeln dienen und weniger anregend wirken. Werden die Schüler dieser Klasse im Lösen geometrischer Konstruktions-Aufgaben geübt, so werden sie sich auch in den oberen Klassen mit besonderer Vorliebe diesem speciellen Gebiete zuwenden, und sicherlich wird darunter der Unterricht in der Trigonometrie und Stereometrie nicht leiden, denn je mehr Gewandtheit die Schüler in der Lösung geometrischer Konstruktions-Aufgaben besitzen, um so besser wird ihnen auch die der trigonometrischen und stereometrischen Aufgaben gelingen; natürlicher Weise unter der Voraussetzung, daß sie auch die notwendige Fertigkeit im algebraischen Rechnen besitzen.

Sicherlich werden aber nur wenige Schüler im stande sein, auf Grund der ihnen bekannten Sätze des Lehrbuchs die Aufgaben zu lösen, ohne daß ihnen über den bei der Lösung einzuschlagenden Weg Andeutungen gegeben werden. Damit jedoch die Gesamtheit dieses Ziel erreicht, wird es notwendig sein, die Aufgaben systematisch zu behandeln, sie von den leichteren zu den schwereren fortschreitend in bestimmte Gruppen zu teilen, und für diese Gruppen die Grundzüge anzugeben, nach denen sie zu lösen sind. Befindet sich z. B. unter den zur Zeichnung eines Dreiecks gegebenen Stücken der Umfang desselben, so wird der in der eben angegebenen Weise unterrichtete Schüler zur Analysis entweder die eine Seite um die beiden anderen verlängern, oder er wird den zu einer Seite gehörenden äußeren Berührungskreis konstruieren und beachten, daß die Entfernung des Punktes, in welchem derselbe die Verlängerung einer Seite berührt, von der dem Kreise gegenüberliegenden Dreiecksecke gleich dem halben Umfang ist.

426544

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend habe ich es im Verein mit meinem Kollegen Herrn von Lühmann unternommen, die geometrischen Konstruktions-Aufgaben, welche, die Aufgaben des I. Anhangs ausgenommen, nicht die an ein Gymnasium zu stellenden Anforderungen übersteigen und zu deren Lösung nur die in den gebräuchlichen Lehrbüchern vorkommenden Sätze als bekannt vorausgesetzt werden, zu ordnen. Wenn auch durch die jedem Paragraphen vorausgeschickten Bemerkungen die Lösungen der Aufgaben den Schülern wesentlich erleichtert sind, so sind damit doch die Auflösungen noch nicht vollständig gegeben, sie liefern den Schülern noch immer hinreichend Stoff zum Nachdenken. Nur einigen Fundamental-Aufgaben, wie z. B. den Aufgaben des Apollonischen Berührungsproblems und einigen schwierigeren Aufgaben, wie z. B. der: „ein Dreieck aus den drei Höhen zu zeichnen", sind genauere Auflösungen hinzugefügt. In den meisten der bis jetzt erschienenen Aufgaben-Sammlungen besteht die Anleitung, welche den Schülern gegeben wird, hauptsächlich darin, daß auf früher dagewesene Aufgaben und Lehrsätze verwiesen wird; ich finde diese Methode höchst unpraktisch, da sie nur dazu dient, die Schüler zu verwirren und ihnen die Lust zum Lösen der Aufgaben zu benehmen, denn zur Lösung der eigentlichen Aufgabe müssen erst successive mehrere andere gelöst werden.

Obgleich sich in der vorliegenden Sammlung, die wohl die reichhaltigste unter allen bis jetzt erschienenen sein dürfte, ungefähr 3000 Aufgaben vorfinden, so sind doch zur Erläuterung nur 25 Figuren hinzugefügt; die übrigen sind so genau beschrieben, daß ein Irrtum nicht vorfallen kann. Überhaupt halte ich dafür, daß eine genaue Zeichnung die Lösung einer Aufgabe wesentlich erleichtert; daher es für den Schüler sicherlich von Vorteil sein wird, wenn er die Zeichnung nicht fertig vorfindet, sich dieselbe vielmehr erst selber nach der gegebenen Anleitung konstruieren muß. So ist z. B. selbst bei der Malfattischen Aufgabe keiner der drei Auflösungen eine Figur beigegeben; die Schüler können dieselben, wie ich das selber an einigen meiner besseren Schüler erprobt, nach den gegebenen Andeutungen vollständig fehlerfrei konstruieren und die Auflösungen an denselben durchführen.

Ein Vorwurf wird mir wohl nicht daraus gemacht werden, daß bei einigen (sehr wenigen) Aufgaben auf spätere verwiesen; es ist das nur geschehen, um nicht den inneren Zusammenhang der fünf Abschnitte und dadurch die größere Übersichtlichkeit zu stören.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden Buches sind zum Teil folgende bereits erschienenen Werke benutzt: Grunert, Archiv für Mathematik und Physik; Erler, Aufgaben aus der Mathematik für

größere Vierteljahrsarbeiten der Primaner; Gandtner und Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie; Brennecke, Berührungsaufgabe für Kreis und Kugel; Nagel, Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörenden Kreise; Jakobi, Anhänge zu van Swinden's Geometrie, herausgegeben von Wiegand; Koppe, Geometrie; J. H. T. Müller, Geometrie; Féaux, Programm von Paderborn 1862; Binder, Programm des Seminars Schönthal 1868.

Im Februar 1870.

H. Lieber.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Der Plan des Buches ist derselbe geblieben, ebenso ist die Anordnung der Aufgaben nicht geändert; jedoch hat sich das Bedürfnis herausgestellt, die Zahl der Aufgaben an einigen Stellen zu vermehren, sowie die Analysis verschiedener Aufgaben von anderen Gesichtspunkten aus aufzufassen und so zu vereinfachen. Namentlich sind wir Herrn Professor Binder in Schönthal (Württemberg) zu Dank verpflichtet, dem wir in letzterer Beziehung mehrere Mitteilungen verdanken, teils direkt, teils durch seine Recension der Sammlung von Gandtner und Junghans. Vermehrt sind besonders die Aufgaben in §. 3, weil es uns wichtig zu sein scheint, daß die Schüler gerade in der Lösung dieser Aufgaben tüchtig geübt werden, weil sie daran die Methode der Behandlung und die Form der Darstellung am sichersten lernen, und oft genug der Fehler, daß Schüler keine geometrischen Aufgaben lösen können, darin liegen mag, daß sie in der Lösung dieser einfachsten Aufgaben nicht gründlich unterrichtet sind. Auch die Aufgaben über das Tangentenviereck, sowie diejenigen der §§. 40 bis 46 und 64, sind wesentlich vermehrt, da sich besonders die letzteren durch elegante Lösungen auszeichnen. Für den Ort in §. 96 ist eine einfachere Konstruktion gegeben, die namentlich auch für den Fall gilt, daß ein Kreis innerhalb des andern liegt; ebenso ist die Konstruktion in den Aufgaben §. 131, 22 und 23 durch Zurückführung auf §. 73, 10 vereinfacht. Die vielen, zum Teil gerade nicht eleganten Aufgaben der §§. 34, 35, 37 sind beibehalten, da sich die

meisten derselben zum Einüben der so äußerst wichtigen §§. 15 und 16 eignen und es sich außerdem, wie wir aus eigener Erfahrung wissen, sehr empfiehlt, jedem Schüler eine besondere Aufgabe zur häuslichen Bearbeitung zu geben, weil dadurch das Abschreiben sehr erschwert oder vielmehr unmöglich gemacht wird.

Im Januar 1874.

Vorrede zur dritten Auflage.

In der vorliegenden dritten Auflage sind nur geringe Veränderungen vorgenommen. Unter Benutzung des Repertoriums des Herrn Professor Binder (Hoffmannsche Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht) sind einige Aufgaben neu hinzugefügt, die Konstruktionen anderer vereinfacht worden.

Auf den Rat einiger Kollegen, welche sich des Buches bei ihrem Unterricht bedienen, ist ein dritter Anhang hinzugefügt, in welchem die am meisten gebräuchlichen geometrischen Örter zusammengestellt sind.

Außerdem sind wir bemüht gewesen, die Mängel des Buches zu beseitigen, auf welche uns die Herrn Recensenten aufmerksam gemacht, und wofür wir ihnen zu großem Dank verpflichtet sind.

Im August 1875.

Vorrede zu den späteren Auflagen.

Die späteren Auflagen enthalten nur wenige Zusätze. Da durch den Lehrplan von 1882 die neuere Geometrie obligatorischer Lehrgegenstand für Realgymnasien geworden ist, so haben wir im 2. Anhang Aufgaben aus diesem Gebiete zusammengestellt; einige derselben sind der Einleitung in die neuere Geometrie von W. Fuhrmann entnommen. — Da es uns ferner notwendig zu sein scheint, daß einfachere Lösungen früherer Aufgaben, sowie interessante neue Aufgaben aufgenommen werden, so haben wir, um nicht den Text des Buches zu ändern und dadurch eine beim Schulgebrauch störende Abweichung der Aufgabennummern in den verschiedenen Auflagen herbeizuführen, einen vierten Anhang hinzugefügt, in welchen wir diese Aufgaben aufgenommen haben. Die Stellen des Buches, an welche sie gehören, sind mit Hinweisen versehen.

Im März 1887.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Bezeichnungen 1

I. Abschnitt.

Dreiecks- und Vierecks-Konstruktions-Aufgaben.

A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen.

§. 1. Einfache Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck 3
„ 2. Einfache Aufgaben über das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck . 3
„ 3. Allgemeines Dreieck, zu konstruieren mittelst der vier Hauptfälle . . 3
„ 4. Konstruktion des Dreiecks aus drei Seiten, wenn diese vorher aus gegebenen Summen oder Differenzen zu konstruieren sind 4
„ 5. Einfache Aufgaben über das Rechteck 5
„ 6. Einfache Aufgaben über den Rhombus 5
„ 7. Einfache Aufgaben über das Parallelogramm 5
„ 8. Einfache Aufgaben über das Trapez 5
„ 9. Einfache Aufgaben über das Viereck 6
„ 10. Aufgaben, bei denen zu beachten, daß der Winkel im Halbkreis ein rechter ist 7
„ 11. Aufgaben, in denen ein Ort für die Spitze des Dreiecks zu konstruieren ist aus der Grundlinie und dem gegenüberliegenden Winkel . . . 7
„ 12. Aufgaben über das Trapez, bei denen §. 11 anzuwenden 7
„ 13. Aufgaben über das Viereck, bei denen §. 11 anzuwenden 8
„ 14. Dreiecksaufgaben, in denen die Differenz resp. Summe der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte oder die Differenz der Winkel an der Grundlinie gegeben 8
„ 15. Dreiecksaufgaben, in denen die Summe zweier Seiten gegeben . . 9
„ 16. Dreiecksaufgaben, in denen die Differenz zweier Seiten gegeben . . 10
„ 17. Dreiecksaufgaben, in denen die Summe oder Differenz zweier Seiten und die Differenz resp. Summe der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte gegeben 11
„ 18. Dreiecksaufgaben, in denen die durch die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte gegeben . . 12
„ 19. Dreiecksaufgaben, in denen eine Transversale oder durch die Richtung derselben bedingte Winkel gegeben 12
„ 20. Aufgaben über das Parallelogramm, in denen die Summe oder Differenz zweier Linien gegeben 13

Seite

§. 21. Aufgaben über das Trapez, in denen Summe oder Differenz zweier Linien gegeben 14
„ 22. Aufgaben über das Viereck, in denen die Summe oder Differenz zweier anstoßenden Seiten gegeben 14
„ 23. Konstruktion des Vierecks und des Trapezes mit Benutzung verschiedener Hülfslinien 15
„ 24. Dreiecksaufgaben, wenn der Umfang gegeben 17
„ 25. Dreiecksaufgaben, wenn der Überschuß der Summe zweier Seiten über die dritte gegeben 17
„ 26. Aufgaben über das Trapez, welche auf §. 24 zurückzuführen . . . 17
„ 27 u. 28. Dreiecksaufgaben, in denen andere Beziehungen der in §. 14 gegebenen Stücke zu berücksichtigen sind 18
„ 29. Dreieck aus der Grundlinie, der Höhe und der Differenz der Winkel an der Grundlinie und ähnliche Aufgaben 19
„ 30. Dreiecksaufgaben, wenn die Summe zweier Höhen gegeben 19
„ 31. Dreiecksaufgaben, wenn die Differenz zweier Höhen gegeben . . . 20
„ 32. Dreiecksaufgaben, in denen r gegeben 20
„ 33. Dreiecksaufgaben, in denen ρ gegeben 21
„ 34. Aufgaben über das Sehnenviereck, wenn der Radius gegeben . . . 21
„ 35. Aufgaben über das Sehnenviereck, wenn der Radius nicht gegeben . 22
„ 36. Aufgaben über das Tangentenviereck, wenn der Radius gegeben . . 25
„ 37. Aufgaben über das Tangentenviereck, wenn der Radius nicht gegeben 25
„ 37a. Aufgaben über das Tangentenviereck 27
„ 38. Aufgaben über das Tangentenviereck, welches ein Trapez oder Antiparallelogramm ist 28
„ 39. Aufgaben über das Viereck, um und in welches sich ein Kreis beschreiben läßt 29
„ 40. Relationen zwischen Stücken des Dreiecks und den Radien der Berührungskreise 30

Dreiecksaufgaben, in denen Berührungskreise konstruiert werden müssen, wenn sich unter den gegebenen Stücken befindet

„ 41. der Umfang 31
„ 42. der Überschuß der Summe zweier Seiten über die dritte 32
„ 43. eine Seite 32
„ 44. die Summe zweier Seiten 33
„ 45. die Differenz zweier Seiten 34
„ 46. einzelne Transversalen 34
„ 46a. Konstruktion des Dreiecks aus besonderen Punkten 35
„ 47. Dreiecksaufgaben, wenn eine Seite und die Differenz der Quadrate der beiden anderen gegeben 36
„ 48. Dreiecksaufgaben, wenn eine Seite und die Summe der Quadrate der beiden anderen gegeben 37

B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen.

„ 49. Einfache Dreiecksaufgaben 37
„ 50. Dreiecksaufgaben, in denen Relationen zwischen p, q, u u. v vorkommen 38

Seite

§. 51. Dreiecksaufgaben, in denen eine Transversale gegeben, welche die gegenüberliegende Seite im Verhältnis m:n teilt 38
„ 51a. Dreiecksaufgaben, in denen die Summe resp. Differenz zweier Seiten und die nach der Mitte der einen von ihnen gezogene Transversale oder durch die Richtung derselben bedingte Winkel gegeben sind . . 39
„ 52. Dreiecksaufgaben, wenn mehrere nach den Mitten der Seiten gezogene Transversalen gegeben 39
„ 53. Dreiecksaufgaben, wenn beliebige Transversalen gegeben 41
„ 53a. Dreiecksaufgaben, in denen eine Relation zwischen den Winkeln besteht 44
„ 54 u. 55. Aufgaben über das Dreieck, in denen dasselbe zuerst der Gestalt nach zu zeichnen; ein Stück dient noch zur Bestimmung der Größe . 44
„ 56. Viereckaufgaben, in denen vier Stücke zur Bestimmung der Gestalt, eins zur Bestimmung der Größe gegeben 46
„ 57. Aufgaben über das Trapez 47
„ 58. Aufgaben über das Sehnen- und Tangentenviereck 47
„ 59. Dreiecksaufgaben, bei denen der Apollonische Lehrsatz anzuwenden . . 48
„ 60. Viereckaufgaben, bei denen zum Teil der Apollonische Lehrsatz anzuwenden 49
„ 61. Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken und Antiparallelogrammen mit Benutzung der stetigen Teilung 51
„ 62. Dreiecksaufgaben, wenn zwei Summen oder zwei Differenzen oder eine Summe und eine Differenz zweier Seiten und ein Winkel gegeben . 51
„ 63. Dreiecksaufgaben, wenn das Produkt zweier Seiten gegeben . . . 52
„ 64. Dreiecksaufgaben, in denen Berührungskreise zu konstruieren sind . . 53
„ 64a. Konstruktion des Dreiecks aus besonderen Punkten 56
„ 65. Aufgaben über das Höhendreieck 57
„ 66. Aufgaben über das Dreieck und Viereck, bei denen das Apollonische Berührungsproblem anzuwenden 58

II. Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen.

„ 67. Einfache Aufgaben 60
„ 68. Zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Linie zu ziehen 61
„ 69. In einem Dreieck oder Viereck Linien zu ziehen 62
„ 70. Mehrere Punkte sind gegeben; es soll eine Linie so gezogen werden, daß die von den Punkten auf dieselbe gefällten Lote gewisse Bedingungen erfüllen 64
„ 71. Gegeben mehrere Linien und Punkte; durch die Punkte sind Linien zu ziehen 65
„ 72. Zwischen zwei Parallelen eine Linie zu ziehen 65

B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen.

„ 73. Durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Winkels eine Linie zu ziehen 66
„ 74. Gegeben Punkte und Linien; es sollen Punkte oder Linien konstruiert werden 68

Seite

§. 75. Gegeben mehrere Punkte, man soll durch einen Punkt eine Linie ziehen 70
„ 76. In einem Dreieck ist ein Punkt zu bestimmen oder eine Linie zu ziehen 71

III. Abschnitt.

Kreis-Aufgaben.

A. Aufgaben, welche ohne Verhältnisse zu lösen.

„ 77. Sehnen oder Sekanten in einem Kreise zu ziehen, welche durch gegebene Punkte gehen 74
„ 78. Einen Punkt zu bestimmen oder eine Linie zu ziehen, wenn ein Kreis und eine Linie gegeben 76
„ 79. Zwischen zwei Kreisen eine Linie zu ziehen 77
„ 80. Kreisaufgaben, in denen §. 41, 42, 43 u. a. anzuwenden 78
„ 81. Durch zwei Punkte Sehnen zu ziehen, welche sich auf der Peripherie eines gegebenen Kreises schneiden 78
„ 82. Wenn in einem Kreise eine Sehne gegeben, eine zweite Sehne zu ziehen 79
„ 83. Konstruktion von Linien an zwei gegebene Kreise 80
„ 84. Durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche durch zwei koncentrische Kreise in vorgeschriebenem Verhältnis geteilt wird . . 82
„ 85. Von einem Punkte eines Kreises nach zwei gegebenen Strecken Linien zu ziehen 83
„ 86. Eine Linie zu ziehen, welche zu drei gegebenen Stücken (Kreisen oder Punkten) in gewissen Beziehungen steht 83
„ 87. Einen Kreis zu zeichnen, wenn der Radius gegeben 84
„ 88. Einen Kreis zu zeichnen, wenn der Radius nicht gegeben 85
„ 89. Einen Kreis zu zeichnen, welcher gegebene Linien oder Kreise in gegebenen Punkten berührt 86
„ 90. Konstruktion von Kreisen, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig oder unter dem Durchmesser schneiden, oder von ihm unter dem Durchmesser geschnitten werden 87

B. Aufgaben, welche mit Verhältnissen zu lösen sind.

„ 91. Auf einem Kreise einen Punkt zu bestimmen 89
„ 92. In Kreisen Sehnen zu ziehen 89
„ 93. Sekanten und Tangenten an einen Kreis 92
„ 94. Eine Linie oder einen Punkt zu bestimmen, wenn ein Kreis und zwei Punkte gegeben 93
„ 95. Eine Linie zu ziehen, welche zu gegebenen Kreisen, Linien oder Punkten in vorgeschriebener Beziehung steht 94
„ 96. Einen Punkt zu bestimmen, so daß die von ihm an gegebene Kreise gezogenen Tangenten in gegebenem Verhältnis stehen 95
„ 97 u. 99. Konstruktion eines Kreises, wenn der Radius nicht gegeben . 97
„ 98. Konstruktion eines Kreises, welcher gegebene Linie unter Sehnen schneidet, zu denen gegebene Centriwinkel gehören 98
„ 100. Das Apollonische Berührungsproblem 100
„ 101. Aufgaben, welche auf das Apollonische Berührungsproblem zurückzuführen 106
„ 102. Konstruktion von drei Kreisen, welche sich gegenseitig berühren (Malfattisches Problem) 109

Seite

IV. Abschnitt.

Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben.
Konstruktion von Figuren in und um Figuren.

§. 103. Einfache Verwandlungs-Aufgaben über das Dreieck 113
„ 104. Verwandlung des Dreiecks in ein anderes mit gegebener Grundlinie 113
„ 105. Verwandlung des Dreiecks in ein anderes mit gegebener Höhe . . 114
„ 106. Einfache Verwandlungs-Aufgaben über das Parallelogramm . . . 115
„ 107. Verwandlungen des Trapezes 116
„ 108. Verwandlungen des Vierecks und Fünfecks 116
„ 109. Verwandlungen von Figuren in Quadrate 118
„ 110. Teilung des Dreiecks 118
„ 111. Teilung der Parallelogramme und Trapeze 119
„ 112 Teilung des Vierecks 120
„ 113—116. Teilung der geraden Linie 120
„ 117. Figuren in und um Figuren 127
„ 118. Parallelogramme in Dreiecken 128
„ 119. Parallelogramme in Kreissegmenten 130
„ 120. Kreise und Rechtecke in Kreissektoren 132
„ 121. Dreiecke um Rechtecke 134
„ 122. Dreiecke um und in Dreiecke 134
„ 123. Vierecke und Parallelogramme in und um andere Figuren 137
„ 124. Dreiecke, deren Ecken auf gegebenen Linien oder Kreisen liegen . . 139
„ 125. Dreiecke in Kreisen, so daß die Seiten durch gegebene Punkte gehen 141
„ 126. Parallelogramme, deren Seiten durch drei gegebene Punkte gehen oder Parallelogramme um Dreiecke 142
„ 127. Parallelogramme, deren Seiten durch vier gegebene Punkte gehen oder Parallelogramme um Vierecke 144
„ 128. Verwandlung von Dreiecken, die einem gegebenen ähnlich sind und Anwendung auf Vierecke 145
„ 129. Verwandlung von Vielecken, die einem gegebenen Vieleck ähnlich sind, und Zeichnung von Kreisen 146
„ 130. Durch einen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß sie von einem gegebenen Parallelogramm oder Dreieck ein Dreieck von gegebenem Inhalt abschneidet 147
„ 131. Teilung des Dreiecks 148
„ 132. Teilung des Parallelogramms 150
„ 133. Teilung des Trapezes 151
„ 134. Teilung des Vierecks und Vielecks 152

V. Abschnitt.

Aufgaben, welche durch algebraische Analysis zu lösen sind.

„ 135. Aufgaben, in denen ein Ausdruck von der Form $\frac{ab}{c}$ zu konstruieren ist 154
„ 136. Aufgaben, in denen eine Quadratwurzel aus der Summe oder Differenz zweier Quadrate zu konstruieren ist 155

Seite

§. 137. Aufgaben, in denen Ausdrücke von der Form $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{abc}{d}}$ zu konstruieren sind 156
„ 138. Aufgaben, in denen zusammengesetzte algebraische Ausdrücke zu konstruieren sind 156
„ 139. Aufgaben, in denen die Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu konstruieren sind 159
„ 140. Aufgaben, in denen die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu konstruieren sind 169
„ 141. Aufgaben, in denen Winkel aus einfachen trigonometrischen Funktionen zu konstruieren sind 171
„ 142. Aufgaben, in denen Winkel aus unentwickelten trigonometrischen Gleichungen zu konstruieren sind 177

I. Anhang.

Aufgaben, welche mit Anwendung der Koordinatenmethode zu lösen sind . . 183

II. Anhang.

Aufgaben aus der neueren Geometrie, namentlich über harmonische Teilung . 188
Dreiecksaufgaben, in denen besonders die Aufgaben 93, 97, 127, 128 des zweiten Anhanges zur Anwendung kommen 197

III. Anhang.

Geometrische Örter 198

IV. Anhang.

Zu §. 7a. Einfache Aufgaben über das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez 203

zu §. 8b	203	zu §. 44	204
zu §. 8c	203	zu §. 45	204
zu §. 12b	204	zu §. 46	204
zu §. 18	204	zu §. 48a	204
zu §. 25	204	zu §. 60	205
zu §. 29	204	zu §. 64	205
zu §. 35c	204	zu §. 66	206

Bezeichnungen.

I. Rechtwinkliges Dreieck. R △ ABC, der rechte Winkel bei C; Katheten a und b; Hypotenuse c; α und β Gegenwinkel von a und b; Höhe h; die durch h auf c gebildeten Abschnitte = p und q; p liegt an a, q an b.

2. Gleichschenkliges Dreieck. Schenkel a, Grundlinie c, Basiswinkel α, Winkel an der Spitze γ; h_a Höhe auf den Schenkel; h_c Höhe auf die Basis.

3. Allgemeines Dreieck. △ ABC (unten links A, rechts B, oben C).
   - α Winkel bei A, a Gegenseite von α (a > b).
   - β Winkel bei B, b Gegenseite von β.
   - γ Winkel bei C, c Gegenseite von γ.
   - h_a die von A auf a gefällte Höhe.
   - h_b die von B auf b gefällte Höhe.
   - h_c die von C auf c gefällte Höhe.
   - t_a die von A nach der Mitte von a gezogene Transversale (Mittellinie).
   - t_b die von B nach der Mitte von b gezogene Transversale (Mittellinie).
   - t_c die von C nach der Mitte von c gezogene Transversale (Mittellinie).
   - w_a Halbierungslinie des Winkels α.
   - w_b Halbierungslinie des Winkels β.
   - w_c Halbierungslinie des Winkels γ.
   - r Radius des umgeschriebenen Kreises.
   - ρ Radius des eingeschriebenen Kreises.
   - ρ_a Radius des zur Seite a gehörenden äußeren Berührungskreises.
   - ρ_b Radius des zur Seite b gehörenden äußeren Berührungskreises.
   - ρ_c Radius des zur Seite c gehörenden äußeren Berührungskreises.

p_a das vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf a gefällte Lot.

p_b das vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf b gefällte Lot.

p_c das vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf c gefällte Lot.

p und q sind die von h_c auf c gebildeten Abschnitte; p liegt an a, q an b.

u und v sind die von w_c auf c gebildeten Abschnitte; u liegt an a, v an b.

$\angle (bt_a)$ ist der von b und t_a gebildete Winkel.

4. Quadrat. Seite a, Diagonale e.
5. Rechteck. Seiten a und b, Diagonale e, Mittelpunkt E; der von den Diagonalen gebildete Winkel $AEB = \varepsilon$.
6. Rhombus. Seite a, spitze Winkel α, längere Diagonale e, kürzere Diagonale f.
7. Rhomboid ABCD. Seite $AB = a$, $BC = b$; Winkel bei $A = \alpha$, Diagonale $AC = e$. $BD = f$; beide schneiden sich in E; $\angle AEB = \varepsilon$; Höhe auf $a = h_a$; Höhe auf $b = h_b$.
8. Trapez ABCD. $AB = a$; $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; a und c die beiden parallelen Seiten; $a > c$. Winkel bei $A = \alpha$, und bei $B = \beta$. Diagonale $AC = e$, $BD = f$; beide schneiden sich in E. $\angle AEB = \varepsilon$. Die Entfernung der beiden parallelen Seiten $= h$.
9. Allgemeines Viereck ABCD. Seite $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Winkel bei $A = \alpha$, bei $B = \beta$, bei $C = \gamma$, bei $D = \delta$. Diagonale $AC = e$, $BD = f$, beide schneiden sich in E. $\angle AEB = \varepsilon$.
10. P, P′ . . . . bezeichnen Punkte.
11. L, L′ . . . . bezeichnen Linien.
12. K, K′ . . . . bezeichnen Kreise bezüglich mit den Radien r, r′ . . .

Erſter Abſchnitt.

Dreiecks- und Vierecks-Konſtruktions-Aufgaben.

A. Aufgaben, welche ohne Anwendung von Verhältniſſen zu löſen ſind.

§. 1.

Einfache Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Fällt man die Höhe CD, ſo iſt $\angle ACD = \beta$, $\angle BCD = \alpha$

1. a, b
2. a, c
3. a, α
4. a, β
5. c, α
6. h, p
7. a, h
8. h, α
9. p, α
10. p, β
11. a, p

§. 2.

Einfache Aufgaben über das gleichſeitige und gleichſchenklige Dreieck.

a) Gleichſeitiges $\triangle$
1. a
2. h

b) Rechtwinklig gleichſchenkliges $\triangle$
3. c
4. h
5. a

c) Gleichſchenkliges $\triangle$
6. a, γ
7. a, c
8. c, γ
9. a, α
10. c, α
11. a, h_c
12. c, h_c
13. h_c, α
14. h_c, γ
15. a, h_a
16. c, h_a
17. h_a, α
18. h_a, γ
19. w_a, α
20. w_a, γ
21. a, t_a
22. h_a, $\angle (ch_a)$
23. h_a, $\angle (ah_a)$

§. 3.

Aufgaben über das allgemeine Dreieck, welche mittelſt der vier Hauptfälle lösbar.

1. a, b, γ
2. a, b, c,
3. c, α, β
4. a, b, α
5. h_c, p, q
6. a, p, q
7. p, q, α
8. a, b, h_c
9. b, c, h_c
10. a, h_c, q
11. a, b, p
12. h_a, p, q
13. b, h_c, γ
14. a, p, γ
15. a, c, $\angle (ch_a)$
16. h_c, p, γ
17. a, h_c, α
18. c, h_c, α
19. h_c, α, β
20. h_c, β, γ
21. a, p, α
22. p, α, β
23. h_c, p, α
24. a, q, β

25. b, p, β
26. h_a, p, β
27. h_a, q, β
28. $h_c, \beta, \angle (bh_c)$
29. c, h_c, h_a
30. a, h_a, p
31. h_a, h_b, γ
32. $h_b, \angle (ch_a), \angle (ch_b)$
33. c, t_c, α
34. a, c, t_c
35. a, t_c, β
36. $c, t_c, \angle (ct_c)$
37. $a, t_c, \angle (ct_c)$
38. $a, c, \angle (ct_c)$
39. $c, \alpha, \angle (ct_c)$
40. $t_c, \alpha, \angle (ct_c)$
41. $a, \beta, \angle (at_c)$
42. $c, t_c, \angle (at_c)$
43. $a, t_c, \angle (at_c)$
44. $a, c, \angle (at_c)$
45. $c, \beta, \angle (at_c)$
46. c, h_c, t_c
47. h_c, t_c, α
48. a, h_c, t_c
49. $c, t_c, \angle (h_c t_c)$
50. h_c, t_c, p
51. $a, h_c, \angle (ct_c)$
52. $c, h_c, \angle (ct_c)$
53. $c, h_a, \angle (ct_c)$
54. $h_a, \beta, \angle (ct_c)$
55. $a, p, \angle (ct_c)$
56. $h_c, p, \angle (ct_c)$
57. $h_c, \alpha, \angle (ct_c)$
58. $a, p, \angle (at_a)$
59. $h_c, p, \angle (at_a)$
60. $p, \beta, \angle (at_a)$
61. c, h_a, t_c
62. h_a, t_c, β
63. a, p, t_c
64. t_c, p, β
65. a, p, t_a
66. h_c, p, t_a
67. p, t_a, β
68. $h_c, \angle (ct_c), \angle (at_c)$
69. $a, h_c, \angle (at_c)$
70. $h_c, \beta, \angle (at_c)$
71. $h_c, t_c, \angle (at_c)$
72. $a, p, \angle (at_c)$
73. $h_c, p, \angle (at_c)$
74. $p, \beta, \angle (at_c)$
75. $c, h_a, \angle (at_c)$
76. $h_a, \beta, \angle (at_c)$
77. $a, p, \angle (ct_a)$
78. $h_c, p, \angle (ct_a)$
79. $p, \beta, \angle (ct_a)$
80. w_c, α, γ
81. w_c, α, β
82. w_c, u, γ
83. a, u, γ
84. a, w_c, γ
85. a, w_c, β
86. w_c, u, β
87. a, u, β
88. a, w_c, u
89. $w_c, \beta, \angle (cw_c)$
90. $a, w_c, \angle (cw_c)$
91. $w_c, u, \angle (cw_c)$
92. $a, u, \angle (cw_c)$
93. a, h_c, w_c
94. h_c, w_c, γ
95. h_c, w_c, α
96. h_b, w_c, γ
97. a, w_c, p
98. w_c, p, β
99. h_c, w_c, p
100. h_c, w_c, u
101. a, p, u
102. a, h_c, u
103. h_c, p, u
104. h_c, u, β
105. p, u, β
106. $h_c, u, \angle (cw_c)$
107. $w_c, p, \angle (cw_c)$
108. a, h_b, w_c
109. a, p, w_b
110. $a, h_c, \angle (cw_c)$
111. $h_c, \beta, \angle (cw_c)$
112. h_c, w_b, p
113. w_b, p, β

§. 4.

Konstruktion des Dreiecks aus drei Seiten, wenn diese vorher aus gegebenen Summen oder Differenzen einzeln zu konstruieren sind.

1. $a, b, b + c$
2. $a, c, b - c$
3. $a, b, b - c$
4. $a, a + b, a + c$
5. $a, a + b, b + c$
6. $a, a - b, a + c$
7. $a, b + c, b - c$
8. $a - b, b - c, c$
9. $a + b, b + c, a + c$
10. $a - b, a - c, b + c$
11. $a + c - b, b, c$
12. $a + b + c, a, a - b$

13. $a + b + c$, $a + b$, $a - b$
14. $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$
15. $a + b - c$, $a - c$, $b + c$
16. $a + b - c$, $a + b$, $b + c$
17. $a + b + c$, $a - b$, $a - c$
18. $b + c$, $b - c$, h_a
19. p, q, $a - p$
20. p, q, $a + c$

§. 5.

Einfache Aufgaben über das Rechteck.

Zu lösen durch Zurückführung auf die Aufgaben von §. 1.

1. a, ε
2. e, ε
3. a, ∠ (ae)
4. a, a + b
5. a, a − b

§. 6.

Einfache Aufgaben über den Rhombus.

Zu lösen durch Zurückführung auf die Aufgaben von §. 1.

1. e, f
2. h, α
3. a, h
4. e, h
5. e, α
6. a, e

§. 7. (§. 7a. siehe Anhang IV, S. 203.)

Einfache Aufgaben über das Parallelogramm.

Zu lösen durch Zurückführung auf die Aufgaben von §. 3.

1. a, b, e
2. a, b, α
3. a, e, α
4. b, f, ∠ (bf)
5. a, b, h_a
6. b, h_a, ∠ (af)
7. b, f, h_a
8. a, h_a, f
9. a, h_a, ∠ (af)
10. e, h_a, α
11. b, e, h_a
12. a, h_a, h_b
13. h_a, f, ε
14. e, f, h_a
15. a, e, ∠ (af)
16. a, e, f
17. e, f, ε
18. a, ∠ (af), ∠ (ae)
19. e, f, ∠ (bf)
20. a, ε, ∠ (af)

§. 8.

Einfache Aufgaben über das Trapez.

a) 1. a, b, α, β
2. b, c, α, β
3. a, b, d, α
4. b, d, e, β
5. a, e, f, α
6. a, c, d, α
7. b, d, β, ∠ (ae)
8. a, c, ∠ (ae), ∠ (de)
9. c, e, ∠ (ae), ∠ (be)
10. a, b, c, ∠ (af)
11. a, c, f, β
12. a, b, c, e
13. a, c, e, ∠ (ae)
14. a, b, d, e
15. b, e, α, β
16. b, e, α, ∠ (ae)
17. a, e, α, β
18. a, c, d, h
19. a, b, α, h
20. a, c, e, h
21. a, c, h, ∠ (ae)
22. a, b, β, ε
23. e, ε, ∠ (ae), ∠ (be)
24. b, ∠ (ae), ∠ (af), ∠ (bf)
25. c, e, h, ε

b) (siehe auch Anhang IV, S. 203.) Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist durch C eine Parallele mit AD zu ziehen, bis sie AB in F trifft. Es ist $BF = a - c$.

26. a, c, α, β
27. a, b, c, d
28. a, b, c, α
29. b, d, α, ∠ (be)
30. b, d, α, ∠ (bf)
31. a — c, α, ∠ (af), ∠ (bf)
32. b, d, ∠ (be), ∠ (de)
33. a — c, b, e, α
34. a — c, e, α, β
35. a — c, b, d, e

c) (siehe auch Anhang IV, S. 203.) Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist durch C eine Parallele mit BD zu ziehen, bis sie die Verlängerung von BA über B hinaus in F trifft. Es ist AF = a+c.

36. a, c, ∠ (ce), ∠ (cf)
37. a, c, e, f
38. a, c, f, ∠ (ae)
39. a, e, f, ε
40. b, e, f, ε
41. e, f, α, ε
42. e, f, ε, ∠ (be)
43. e, f, ∠ (be), ∠ (bf)
44. e, a + c, ∠ (be), ∠ (bf)
45. a, c, e, ε
46. e, f, ε, ∠ (de)
47. e, ε, ∠ (ae), ∠ (de)
48. a + c, ∠ (ae), ∠ (af), ∠ (bf)
49. e, h, ε, ∠ (df)

50—54 s. Anhang IV, S. 203.

§. 9.

Einfache Aufgaben über das Viereck.

a) 1. a, b, c, d, e
2. a, b, c, d, α
3. a, b, e, α, γ
4. a, c, d, e, ∠ (df)
5. a, b, c, e, f
6. a, b, e, α, δ
7. a, b, d, e, α
8. a, b, c, β, γ
9. a, b, c, α, β
10. a, b, c, β, ∠ (ce)
11. a, c, e, f ∠ (be)
12. a, b, c, f, δ
13. a, b, f, α, β
14. a, c, e, f, α
15. a, f, d ∠ (de), ∠ (ce)
16. a, c, e, ∠ (ae), ∠ (af)
17. a, b, e, f, α
18. a, e, α, β, γ
19. a, b, ∠ (af), ∠ (bf), ∠ (ce)
20. a, e, f, ∠ (ae), ∠ (af)
21. a, d, e, ∠ (ae), ∠ (af)
22. e, ∠ (ae), ∠ (be), ∠ (ce), ∠ (af)
23. a, b, c, e, δ
24. a, c, e, α, δ
25. a, b, f, α, δ
26. a, b, α, β, γ
27. a, c, e, f, ∠ (ae)
28. a, e, ∠ (ae), ∠ (af), ∠ (cf)
29. a, e, f, α, δ
30. a, f, α, γ, δ

b) Zur Analysis und Lösung der folgenden Aufgaben sind Parallelen zu ziehen.

31. a, c, α, β, γ
32. a, b, e, ε, ∠ (cf)
33. a, c, d, ε, ∠ (af)
34. a, b, d, γ, δ
35. b, c, α, γ, δ
36. a, c, e, ∠ (af), ∠ (cf)
37. c, d, ∠ (af), ∠ (cf), ∠ (df)
38. a, e, f, ∠ (ce), ∠ (cf)
39. c, e, ∠ (af), ∠ (ce), ∠ (cf)
40. a, e, ε, ∠ (ae), ∠ (ce)
41. a, b, e, f, ε
42. a, c, ε, ∠ (ae), ∠ (ce)
43. c, e, ∠ (af), ∠ (ce), ∠ (df)

§. 10.

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse gegeben, so ist der über der Hypotenuse als Durchmesser geschlagene Halbkreis ein Ort für den Scheitelpunkt des rechten Winkels.

1. R △ c, h
2. R △ p, q
3. R △ c, p
4. R △ c, p — q
5. R △ u, v
6. △ c, h_a, h_b
7. △ h_a, h_b, α
8. △ b, h_a, q
9. △ h_a, q, α
10. △ h_a, h_c, q

§. 11.

Fig. 1. Wenn in einem Dreieck die Grundlinie c und der gegenüberliegende Winkel γ gegeben sind, so kann ein Kreis konstruiert werden, welcher der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks ist.

Trage an AB = c in A ∠ γ = BAD an; errichte auf AD in A ein Lot, ferner auf AB in der Mitte E auch ein Lot, beide treffen sich in M, schlage mit MA um M einen Kreis, so ist der über AB liegende Teil des Kreises der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks; z. B. C, denn ∠ ACB = BAD als Abschnittswinkel.

Ferner beachte, daß das von M auf AB gefällte Lot sowohl die Seite AB in E, wie auch den zu AB gehörenden Bogen in F halbiert, so daß ∠ ACF = BCF oder CG die Halbierungslinie des Winkels ACB ist.

Anmerkung. Ist γ > R, so fällt der Mittelpunkt M unter die Linie A'B'.

Zusatz. Der Kreis, welcher der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks ist, kann auch noch auf folgende Weise erhalten werden: Errichte auf AB = c in der Mitte E ein Lot, trage in einem beliebigen Punkte desselben γ an und ziehe zu dem freien Schenkel desselben durch A eine Parallele, welche das Lot in M trifft, so ist, da △ AME ≅ BME, MA = MB, und ∠ AME = BME = γ, mithin AMB = 2γ, also jeder Peripheriewinkel über AB = γ. Ist γ > R, so kommt natürlich der konvexe Winkel AMB als Centriwinkel zur Verwendung.

1. u, v, γ (§. 18, 14)
2. p, q, γ
3. c, γ, t_c
4. c, γ, h_c
5. r, u, v (§. 32, 33)
6. h_c, u, γ
7. p, u, γ
8. a, c, ∠ (bt_c)
9. c, h_c, ∠ (bt_c)
10. c, ∠ (at_c), ∠ (bt_c)
11. c, h_a, ∠ (bt_c)
12. c, β, ∠ (bt_c)
13. c, γ, ∠ (ct_c)

Ein Parallelogramm zu zeichnen aus

14. e, f, α
15. f, α, ε
16. b, f, ∠ (ae)
17. e, ∠(af), ∠(bf)
18. e, ∠(ae), ∠(bt)
19. e, h_a, ∠ (bf)
20. a, h_a, ε
21. a, ∠(bf), ∠(be)

§. 12.

Aufgaben über das Trapez, bei denen die §. 11 erörterte Konstruktion mit dem Abschnittswinkel zur Anwendung kommt.

a) 1. a, b, ∠ (be), ∠ (df) 2. a, h, ∠ (be), ∠ (df)

b) Beachte §. 8, b und c (siehe auch Anhang IV, S. 204.)

3. a, c, ∠ (be), ∠ (af) 5. a, b, c, ∠ (df) 7. a, b, c, ε
4. a, c, α, ∠ (be) 6. a, b, c, ∠ (de) 7a. a, c, h, ε

c) Über zwei Linien als Sehnen sind Kreise zu konstruieren und der Punkt, in welchem sich beide schneiden, ist zu beachten.

8. a, c, ∠ (be), ∠ (de) 10. a, c, ∠ (bf), ∠ (de) 12. a, c, ε, α + β
9. a, c, ∠ (be), ∠ (df) 11. a, c, ε, ∠ (de)

d) Ziehe FC ∥ AD, und CG ∥ DB bis zu ihrem Durchschnitt F und G mit AB; ferner AH ∥ CG und GH ∥ AC, verbinde H mit F und B, und ziehe CH, so ist zunächst eins der Parallelogramme ACGH oder FCBH zu konstruieren, wobei zu beachten, daß ∠ ACG = AHG = ε; ∠ CAH = CGH = 2 R — ε; ∠ CFH = CBH = α + β; ∠ FCB = FHB = 2 R — (α + β) ist.

13. b, d, α + β, ε 23. b, h, α, ε 33. a + c, e, α + β, ε
14. a — c, b, d, ε 24. a — c, b, h, ε 34. a+c, α+β, ∠(ae), ∠(af)
15. a — c, b, β, ε 25. a — c, h, α, ε 35. e, α+β, ∠(ae), ∠(af)
16. b, d, α, ε 26. b, h, α + β, ε 36. h, α+β, ∠(ae), ∠(af)
17. a — c, b, α, ε 27. a — c, h, α + β, ε 37. h, e, f, α + β
18. a — c, b, α+β, ε 28. e, f, α + β, ε 38. h, e, α + β, ∠ (af)
19. a — c, α, β, ε 29. a + c, e, f, α + β 39. a + c, e, h, α + β
20. b, α, β, ε 30. a+c, e, α+β, ∠(ae) 40. a+c, h, α+β, ∠(ae)
21. h, α, β, ε 31. e, f, ∠ (ae), α + β 41. e, h, α + β, ε
22. b, d, h, ε 32. a + c, e, α+β, ∠(af) 42. a + c, h, α + β, ε
43. s. Anh. IV, S. 204.

§. 13.

Aufgaben über das allgemeine Viereck, bei denen §. 11 zur Anwendung kommt

a) 1. a, b, e, f, δ 4. a, c, e, β, δ 8. a, f, α, γ, ε
2. a, b, f, β, δ 5. a, b, e, ∠ (de), ∠ (cf) 9. a, b, f, α, γ
3. a, b, f, α + γ, δ (β zu berechnen) 6. a, e, β, γ, ∠ (df) 7. a, b, β, δ, ε 10. a, b, d, α, γ

b) Über zwei Linien als Sehnen sind Kreise zu beschreiben, und der Punkt zu beachten, in welchem sich beide schneiden.

11. a, b, e, ∠ (cf), ∠ (df) 13. a, b, ∠ (ae), ∠ (cf), ∠ (df)
12. a, b, β, ∠ (cf), ∠ (df)

§. 14.

a) Wenn in einem Dreieck, in welchem α < R, die Differenz der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Segmente gegeben ist, so schlage entweder α) AD = q auf DB = p von D aus bis E ab,

so ist $BE = p - q$; ferner da $\triangle ACD \cong ECD$, so ist $CE = b$, $\angle CED = \alpha$ und $\angle ECB = 2R - CEB - \beta = \alpha - \beta$; oder β) $BD = p$ auf $AD = q$ von D aus bis F ab, so ist $AF = p - q$, $CF = a$, $\angle CFA = \beta$, $\angle FCA = 2R - CAF - \beta = \alpha - \beta$.

b) Ist jedoch $\alpha > R$, so sind $BD = p$ und $AD = q$ die Segmente der Grundlinie; wird entweder α) AD über D hinaus um q bis E verlängert, so ist $BE = p + q$; da $\triangle ACD \cong ECD$, so ist $CE = b$, $\angle CEA = 2R - \alpha$, $\angle ECB = 2R - CEB - \beta = \alpha - \beta$; oder β) AD über D hinaus um p bis F verlängert, so ist $AF = p + q$, $CF = a$, $\angle CFA = \beta$, $\angle ACF = 2R - CAF - \beta = \alpha - \beta$.

1. a, b, $\alpha - \beta$
2. $a + b$, $a - b$, $\alpha - \beta$
3. a, h_c, $\alpha - \beta$
4. b, h_c, $\alpha - \beta$
5. a, h_b, $\alpha - \beta$
6. b, h_a, $\alpha - \beta$
7. p, q, $\alpha - \beta$
8. a, b, $p \mp q$
9. $a + b$, $a - b$, $p \mp q$
10. a, $p \mp q$, α
11. a, $p \mp q$, β
12. c, $p \mp q$, β
13. $p \mp q$, α, β
14. $p \mp q$, h_c, α
15. $p \mp q$, b, h_c
16. a, $p \mp q$, h_c
17. a, $p \mp q$, $\alpha - \beta$
18. c, $p \mp q$, γ
19. c, $p \mp q$, $\alpha - \beta$
20. $p \mp q$, h_c, $\alpha - \beta$

§. 15.

Wenn sich unter den zur Zeichnung eines Dreiecks gegebenen Stücken die Summe zweier Seiten befindet, so ist folgendes zu beachten:

a) Wird im R$\triangle$ die eine Kathete BC um die andere AC über C hinaus bis D verlängert, so ist $BD = a + b$ und $\angle BDA = \frac{1}{2} R$.

1. R$\triangle$ $a + b$, c
2. R$\triangle$ $a + b$, β

b) Wird dagegen die Kathete BC um die Hypotenuse AB über B hinaus bis E verlängert, so ist $CE = a + c$, und $AEC = \frac{1}{2}\beta$.

3. R gleichschenkl. $\triangle$ $a + c$
4. R$\triangle$ $a + c$, b
5. R$\triangle$ $a + c$, β
6. R$\triangle$ $a + h$, β
7. Gleichschenkl. $\triangle$ c, $a + h_c$
8. Gleichschenkl. $\triangle$ α, $a + h_c$
9. Gleichschenkl. $\triangle$ γ, $a + h_c$
10. R gleichschenkl. $\triangle$ $a + h$
11. Gleichseit. $\triangle$ $a + h$

c) α) Wird im allgemeinen Dreieck die längere Seite BC um die kürzere AC über C hinaus bis G verlängert, so ist $BG = a + b$, $\angle BGA = \frac{1}{2}\gamma$. Schlägt man mit AC um C einen Kreis, welcher AB in E und BC in K trifft, so ist $GAK = R$ und $\angle KAE = \frac{1}{2} ECK = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (§. 14, α), also $\angle GAB = R + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. β) Wird aber die kürzere Seite AC um die längere BC über C hinaus bis H verlängert, so ist $AH = a + b$, $\angle AHB = \frac{1}{2}\gamma$. Schlägt man mit CB um C einen Kreis, welcher die Verlängerung von AB in F, und die von AC über A in L trifft, so ist $\angle HBL = R$ und $\angle FBL = \frac{1}{2} FCL = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (§. 14, β), also $\angle HBA = R - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Anmerkung. $\angle$ GAB in α) und HBA in β) können auch auf folgende Weise berechnet werden: $\angle GAB = GAC + CAB = {}^1/_2\gamma + \alpha = R - {}^1/_2\alpha - {}^1/_2\beta + \alpha = R + {}^1/_2(\alpha - \beta)$; $\angle HBA = HBC + CBA = {}^1/_2\gamma + \beta = R - {}^1/_2\alpha - {}^1/_2\beta + \beta = R - {}^1/_2(\alpha - \beta)$.

13. $a + b$, c, h_a
14. $a + b$, β, h_a
15. $a + b$, $\alpha + \beta$, $\beta - \gamma$
16. $a + b$, h_a, $\alpha - \beta$
17. $a + b$, β, γ
18. $a + b$, h_b, $\alpha - \beta$
19. $a + b$, h_c, α
20. $a + b$, c, α
21. $a + b$, γ, $\angle (bh_c)$
22. $a + b$, α, γ
23. $a + b$, c, $\alpha - \beta$
24. $a + b$, h_c, γ
25. $a + b$, c, γ
26. $a + b$, α, β (auch nach §. 44, 24 oder §. 54)
27. Gleichschenkl. $\triangle$ $a + c$, α
28. Gleichschenkl. $\triangle$ $a + c$, γ

29. c, γ, $a + h_a$. Anal. AD sei h_a. Es ist der Kreis um $\triangle$ ABC bestimmt. Verlängere CB über B um AD bis E, so ist $CE = a + h_a$; auf BE in E eine Senkrechte $EF = BD$, so ist $\triangle$ $BEF \cong ADB$; also $BF = AB$ und $FBE + ABD = R$, also $ABF = R$; daher F bestimmt und der über BF geschlagene Halbkreis; also §. 83, 2.

d) In den folgenden Aufgaben ist zur Konstruktion eines Dreiecks $a + h_c$ gegeben und außerdem:

30. c, β
31. b, β
32. α, β
33. t_c, β
34. t_a, β
35. w_b, β
36. w_c, β
37. h_a, β
38. h_b, β
39 p, q
40. b, p
41. p, α
42. t_c, p
43. t_a, p
44. w_b, p
45. w_c, p
46. h_a, p
47. h_b, p.

§. 16.

Wenn sich unter den zur Zeichnung eines Dreiecks gegebenen Stücken die Differenz zweier Seiten befindet, so ist folgendes zu beachten:

a) Wird im R $\triangle$ die kleinere Kathete AC auf der größeren BC von C aus bis D abgetragen, so ist $BD = a - b$, $\angle ADB = {}^3/_2$ R, $\angle DAB = \alpha - CAD = \alpha - {}^1/_2 R = \alpha - {}^1/_2\alpha - {}^1/_2\beta = {}^1/_2(\alpha - \beta)$.

1. R $\triangle$ $a - b$, c
2. R $\triangle$ $a - b$, β
3. R $\triangle$ $a - b$, $\alpha - \beta$
4. Gleichseit. $\triangle$ $h - p$
5. R $\triangle$ c, $\alpha - \beta$

b) Wird die eine Kathete AC auf der Hypotenuse AB von A aus bis E abgetragen, so ist $EB = c - b$; $\angle BEC = R + {}^1/_2\alpha$. Oder es wird, was in den meisten Fällen vorteilhafter sein wird, die Kathete AC über C hinaus bis F verlängert, so daß $AF = AB$; dann ist $CF = c - b$; $\angle CFB = R - {}^1/_2\alpha$.

6. Gleichschenkl. R $\triangle$ $c - a$
7. Gleichschenkl. R $\triangle$ $a - h$
8. Gleichseit. $\triangle$ $a - h$
9. R $\triangle$ $c - b$, a
10. R $\triangle$ $c - b$, β
11. R $\triangle$ $a - h$, β
12. Gleichschenkl. $\triangle$ $a - h_c$, c
13. Gleichschenkl. $a - h_c$, α
14. Gleichschenkl. $a - h_c$, γ

c) α) Wird im allgemeinen Dreieck die kürzere Seite AC auf der längeren BC von C aus bis K abgetragen, so ist $BK = a - b$; $\angle AKB = R + \frac{1}{2}\gamma$; $\angle KAB = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (§. 15. c, α).
β) Wird aber die kürzere Seite CA über A hinaus bis L verlängert so daß $CL = CB$; dann ist $AL = a - b$: $\angle ALB = R - \frac{1}{2}\gamma$; $\angle LAB = 2R - \alpha$; $\angle ABL = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (§. 15, c, β).

Anmerkung. $\angle KAB$ in α) und $\angle ABL$ in β) können auch auf folgende Weise berechnet werden: $\angle KAB = CAB - CAK = \alpha - (R - \frac{1}{2}\gamma) = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; $\angle ABL = CBL - CBA = R - \frac{1}{2}\gamma - \beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

16. $a - b$, h_a, β
17. $a - b$, c, β
18. $a - b$, c, γ
19. $a - b$, α, β (auch nach §. 45, §. 18 oder §. 54)
20. $a - b$, $\alpha - \beta$, γ
21. $a - b$, $\alpha - \beta$, h_a
22. $a - b$, c, h_a
23. $a - b$, p, β
24. $c - b$, p, β
25. c, $\alpha - \beta$, h_a
26. $a - b$, c, h_b
27. $a - b$, h_c, α
28. $a - b$, c, α
29. $a - b$, h_b, $\alpha - \beta$
30. c, h_b, $\alpha - \beta$
31. $a - b$, h_a, γ
32. $a - b$, h_b, γ
33. Gleichschenkl. $\triangle$ α, $a - c$ oder $c - a$
34. Gleichschenkl. $\triangle$ γ, $a - c$ oder $c - a$
35. $a - b$, α, γ
36. $a - b$, β, γ
37. $a - b$, c, $\alpha - \beta$
38. $a - b$, γ, $\angle(bh_c)$
39. $a - b$, $\alpha + \beta$, $\beta - \gamma$
40. c, γ, $a - h_a$. Anal. ähnlich wie §. 15, 29 mit §. 83, 4.

d) In den folgenden Aufgaben ist $a - h_c$ gegeben und außerdem:

41. c, β
42. b, β
43. α, β
44. t_c, β
45. t_a, β
46. w_b, β
47. w_c, β
48. h_a, β
49. h_b, β
50. p, q
51. b, p
52. p, α
53. t_c, p
54. t_a, p
55. w_b, p
56. w_c, p
57. h_a, p
58. h_b, p

e) In den folgenden Aufgaben findet man leicht $a - h_c$ oder $a + h^c$

59. $a - b$, $b + h_c$, β
60. $a - b$, $b + h_c$, p
61. $a + b$, $b - h_c$, β
62. $a + b$, $b - h_c$, p
63. $a - b$, $b - h_c$, β
64. $a - b$, $b - h_c$, p
65. $a + b$, $b + h_c$, β
66. $a + b$, $b + h_c$, p

§. 17.

Wenn außer der Differenz der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Segmente ($\alpha < R$) oder der Summe der Segmente ($\alpha > R$) noch die Summe oder Differenz der Seiten a und b gegeben ist, so sind die in §. 15, c und §. 16, c angegebenen Figuren zu benutzen; und außer dem dort Angeführten ist noch zu beachten, daß $\angle EGK = \frac{1}{2}ECK = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\angle EKB = R + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\angle GEK = R$; $\angle KEB = \frac{1}{2}\gamma$, da AEKG ein Sehnen-

viereck ist, also $\angle GEB = R + \frac{1}{2}\gamma$. Ebenso ist noch zu beachten, daß $\angle FHA = \frac{1}{2} FCA = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\angle FLA = R - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\angle LFH = R$; $\angle LFB = LHB = \frac{1}{2}\gamma$, also $\angle AFH = R - \frac{1}{2}\gamma$.

1. $a + b, p \mp q, \alpha$ 4. $a + b, p \mp q, \alpha - \beta$ 7. $a - b, p \mp q, \gamma$
2. $a + b, p \mp q, \beta$ 5. $a - b, p \mp q, \alpha$ 8. $a - b, p \mp q, \alpha - \beta$
3. $a + b, p \mp q, \gamma$ 6. $a - b, p \mp q, \beta$

§. 18. (s. auch Anh. IV, S. 204.)

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks die beiden Segmente $u = BD$ und $v = AD$ gegeben sind, in welche die Grundlinie durch die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze geteilt wird, oder auch nur eins derselben, oder ihre Differenz, so trage AC auf BC von C aus $ab = CE$, und AD auf BD von D aus $= DF$, so ist $BF = u - v$. Ferner da $\triangle ACD \cong ECD$, so ist $\angle CED = \alpha$, $\angle BED = 2R - \alpha$, $\angle EDB = \alpha - \beta$, $\angle DFE = R - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\angle EFB = R + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\angle FEA = R$, mithin $EF \parallel CD$ und $\angle FEB = \frac{1}{2}\gamma$.

Anmerkung. Obiges kann auch bewiesen werden durch $a : b = u : v$.

1. u, v, α
2. u, v, a − b
3. u, v, α − β
4. u, v, h_a
5. u, β, a − b
6. u, α, a − b
7. u, β, h_a
8. v, w_c, α − β
9. v, b, α − β
10. u − v, a − b, α − β
11. u − v, a − b, α (BC auf AC abzutragen)
12. u − v, a − b, β
13. u − v, a − b, γ

14. u, v, γ (§. 11, 1). Anal. Schlägt man mit DE um D einen Kreis, der BC zum zweiten Male in I trifft, so ist $\angle DIE = DEI = \alpha$, also $\angle IDB = \gamma$. (15. s. Anh. IV, S. 204.)

§. 19.

Unter den zur Zeichnung eines Dreiecks gegebenen Stücken befinde sich eine nach der Mitte einer Seite gezogene Transversale (Mittellinie) z. B. $t_c = CD$ oder durch die Richtung von t_c bedingte Winkel.

Zur Analysis der folgenden Aufgaben verlängere entweder CD über D hinaus um sich selber bis E, so ist $\triangle BDE \cong ACD$ und $ADE \cong BCD$, mithin $BE = b$, $AE = a$, $\angle CBE = CAE = 2R - \gamma$; und die von E auf BC und AC gefällten Lote EF und EG sind resp. $= h_a$, und h_b. Oder ziehe durch D die Parallelen DL und DM resp. zu AC und BC, so ist $DL = \frac{1}{2} b$, $DM = \frac{1}{2} a$, $\angle DLC = DMC = 2R - \gamma$; und die von D auf BC und AC gefällten Lote DH und DK sind resp. $= \frac{1}{2} h_a$ und $\frac{1}{2} h_b$.

In den Aufgaben 17 bis 20 ist §. 15, c resp. §. 16, c auf eins der Dreiecke CBE, CAE, CLD oder CMD anzuwenden.

Für die Aufgaben 29 bis 31 ist zu beachten, daß, wenn CN eine

Höhe ist, NB durch das von L auf AB gefällte Lot LP halbiert wird, und $LB = LN = \frac{1}{2}a$ ist.

1. Gleichschenkl. $\triangle h_a, h_c$
2. Gleichschenkl. $\triangle h_a, t_a$
3. $t_c, \angle(at_c), \angle(bt_c)$
4. $a, \angle(at_c), \angle(bt_c)$
5. t_c, a, b
6. a, h_a, t_c
7. $a, h_a, \angle(at_c)$
8. $a, t_c, \angle(bt_c)$
9. a, t_c, γ
10. t_c, h_c, h_a
11. b, t_c, h_a
12. t_c, h_a, γ
13. t_c, α, β (auch nach §. 54)
14. t_c, γ, α
15. h_c, t_c, γ
16. a, t_c, α (auch nach §. 32, c)
17. $a + b, t_c, \gamma$ (§. 15). Die Konstruktion wird eleganter, wenn man CB über B bis Q verlängert, so daß $BQ = b$, Q mit E verbindet und QE bis zum Durchschnitt R mit CA verlängert, dann ist $CR = a + b$. 2. Anal. Fig. 4. Es sei L die Mitte von AB, G die vom Bogen AB, $GS \perp CA$ und $GS' \perp CB$, so ist $CS = CS' = \frac{1}{2}(a + b)$, $CL = t_c$, und SLS' eine gerade Linie.

18. $a - b, t_c, \gamma$ (§. 16). Auch in ähnlicher Weise wie 17 zu vereinfachen. 2. Anal. Fig. 4. L sei die Mitte von AB, H die vom Bogen ACB; wenn ferner $HW \perp AC$ und $HW' \perp BC$, so ist $CW = CW' = \frac{1}{2}(a - b)$, $CL = t_c$, und WW'L eine gerade Linie.

19. $a + b, t_c, \angle(at_c)$
20. $a - b, t_c, \angle(at_c)$
21. $t_c, \alpha, \angle(at_c)$
22. $a, \alpha, \angle(at_c)$
23. $t_a, h_b, \angle(at_a)$
24. $h_a, h_b, \angle(bt_a)$
25. t_a, h_c, γ
26. t_c, h_a, h_b
27. $h_b, h_c, \angle(bt_a)$
28. $c, h_c, \angle(at_a)$
29. t_a, p, q
30. a, t_a, q
31. t_a, q, β

§. 20.

Wenn in einem Parallelogramm die Summe oder Differenz zweier Linien (Seiten oder Diagonalen) gegeben ist, so lassen sich diese Aufgaben auf die §§. 15 und 16 zurückführen.

a) Ein Quadrat zu zeichnen aus

1. $e + a$
2. $e - a$

b) Ein Rechteck zu zeichnen aus

3. $a + b, e$
4. $a - b, e$
5. $a, e + b$
6. $a, e - b$
7. $a + b, \angle(ae)$
8. $a - b, \angle(ae)$
9. $e + b, \angle(ae)$
10. $e - b, \angle(ae)$

c) Einen Rhombus zu zeichnen aus

11. $a, e + f$
12. $a, e - f$
13. $e + f, \alpha$
14. $e - f, \alpha$
15. $a + h, \alpha$
16. $a - h, \alpha$
17. $e + h, \alpha$
18. $e - h, \alpha$
19. $e + a, \alpha$
20. $e - a, \alpha$

d) Ein Rhomboid zu zeichnen aus

21. a, e + f, ε
22. a, e — f, ε
23. a + b, e, α
24. a — b, e, α

§. 21.

Zur Zeichnung eines Trapezes ist die Summe oder Differenz zweier Seiten gegeben.

a) Verlängere die parallele Seite um die nicht parallele, oder trage diese auf jener ab.

1. a + b, c, d, e
2. a — b, c, d, e
3. a + b, c, d, α
4. a — b, c, d, α
5. a + b, c, e, α
6. a — b, c, e, α
7. a + b, c, e, β
8. a — b, c, e, β
9. a + b, c, d, β
10. a — b, c, d, β
11. a + b, e, f, β
12. a — b, e, f, β
13. a + b, h, α, β
14. a — b, h, α, β

b) In den folgenden Aufgaben, in denen a + c gegegeben, läßt sich aus den andern gegebenen Stücken noch a — c konstruieren und so a und c finden.

15. a + c, b, α, β
16. a + c, b, d, α

c) Die folgenden Aufgaben werden auf 16 zurückgeführt, da sich b und d einzeln konstruieren lassen.

17. a + b + c + d, h, α, β
18. a + c + d, h, α, β
19. a + c + d, h, b, α
20. a + c + d, h, α, ∠(df)
21. a + c — d, h, α, β
22. a + c — d, h, b, α
23. a + c — d, h, α, ∠(df)

d) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist die §. 8, c angegebene Konstruktion zu beachten.

24. c, e + f, ε, ∠(ae)
25. c, e — f, ε, ∠(ae)
26. a + b, e, f, ε
27. a — b e, f, ε

§. 22.

Zur Zeichnung eines Vierecks ist die Summe oder Differenz zweier anstoßenden Seiten gegeben.

a) Verlängere eine Seite um die andere oder trage diese auf jener ab.

1. a + b, c, d, f, α
2. a — b, c, d, f, α
3. a + b, c, d, e, α
4. a — b, c, d, e, α
5. a + b, c, e, f, β
6. a — b, c, e, f, β
7. a + b, c, d, α, β
8. a — b, c, d, α, β
9. a + b, c, d, α, γ + δ
10. a — b, c, d, α, γ + δ
11. a + b, c, d, β, δ
12. a — b, c, d, β, δ

b) In den folgenden Aufgaben ist a ≠ b und c ≠ d bekannt; es läßt sich ein Dreieck konstruieren, dessen zwei Seiten die eben erwähnten Stücke sind, und in welchem der eingeschlossene Winkel einer der gegebenen Winkel ist; über der dritten Seite ist nun nach §. 11 ein Dreieck zu zeichnen, dessen Spitze in einer Ecke des Vierecks liegt und dessen Winkel an der Spitze sich berechnen läßt.

13. a + b, c, d, α, γ
14. a − b, c, d, α, γ
15. a + b, c + d, e, α, γ
16. a + b, c − d, e, α, γ
17. a − b, c − d, e, α, γ
18. a + b, c + d, γ, ∠(ae), (de)
19. a + b, c − d, γ, ∠(ae), (de)
20. a − b, c − d, γ, ∠(ae), (de)

§. 23.

Konstruktion des Vierecks und des Trapezes mit Benutzung verschiedener Hülfslinien.

a) Gegeben e, f und ε. Ziehe BF ∥ AC, CF ∥ AB, DG ∥ AC, CG ∥ AD, so ist CF = a, CG = d, FG = f, BF = DG = e, ∠GCF = α, ∠FCB = β, ∠GCD = δ, ∠DGF = FBD = ε, ∠CFB = ∠(ae), u. s. w. Nicht bei allen Aufgaben muß das Parallelogramm vollständig konstruiert werden; bei einigen wird es z. B. ausreichen, durch B eine Parallele zu AC und durch C eine zu AB zu ziehen.

1. e, f, ε, a, c
2. e, f, ε, ∠(be) ∠(ce)
3. e, f, ε, a, ∠(bf)
4. e, f, ε, b, d
5. e, f, ε, ∠(bf) ∠(df)
6. e, f, ε, a + b, ∠(af)
7. e, f, ε, a − b, ∠(af)
8. e, f, ε, a + b, ∠(ae)
9. e, f, ε, a − b, ∠(ae)
10. e, f, ε, a, γ
11. e, f, ε, γ, δ
12. e, f, ε, α, γ
13. e, f, ε, a, β + γ
14. a, b, c, ∠(ce), β + γ
15. a, c, e, f, β + γ
16. e, f, a + c, ∠(ae), β + γ
17. e, f, a − c, ∠(ae), β + γ
18. a, c, b + e, ∠(ce), β + γ
19. a, c, b − e, ∠(ce), β + γ

b) Zur Zeichnung des Parallelogramms BDGF können auch nur zwei der drei Stücke e, f, ε, z. B. e und ε gegeben sein, und als drittes Stück die Höhe des Parallelogramms, ein Lot von B auf DG, oder, was dasselbe ist, die Summe der von B und D auf e gefällten Lote, welche in den folgenden Aufgaben mit l bezeichnet werden soll. Ebenso könnte auch f, ε und die Summe der von A und C auf f gefällten Lote gegeben sein; oder e, f und diese Summe.

20. e, f, l, α, γ
21. e, f, l, α, β
22. e, ε, l, α, γ
23. e, ε, l, α, β
24. e, f, l, a + b, β
25. e, f, l, a − b, β
26. e, ε, l, a + b, β
27. e, ε, l, a − b, β

c) Gegeben a, c und α + δ oder zwei Winkel, aus denen α + δ gefunden werden kann, wie ∠(ae), ∠(ce). Ziehe CF ∥ AB, BF ∥ AC, DG ∥ AB, BG ∥ AD, so ist DG = CF = a, FG = c, BF = e, BG = d, ∠DGB = α, ∠BGF = δ, ∠BCF = β, ∠CFB = ∠(ae), ∠GFB = ∠(ce), ∠FBD = ε, ∠FBG = ∠(de), ∠GBC = 2 R − (α + β) u. s. w.

28. a, b, c, α, δ
29. a, c, α, β, δ
30. a, c, f, ∠(ae), ∠(ce)
31. a, c, ∠(ae), ∠(ce), ∠(cf)
32. a, c, ∠(ae), ∠(ce), ε
33. a, b, c, d, α + δ

34. a, c, e, f, $\alpha+\delta$
35. a, c, $\angle$(ae), $\angle$(ce), $\angle$(df)
36. a, c, α, δ, $\angle$(be)
37. a, c, α, δ, ε
38. a, c, α, δ, $\angle$(bf)
39. a, c, e, $\alpha+\delta$, ε
40. a, b, c, $\alpha+\delta$, ε
41. a, c, e, $\alpha+\delta$, $\angle$(bf)
42. a, c, $\alpha+\delta$, ε, $\angle$(df)
43. a, c, $\alpha+\delta$, $\angle$(be), $\angle$(df)
44. a, c, $\alpha+\delta$, $\angle$(df), $\angle$(bf)
45. a, c, $\alpha+\delta$, $\angle$(de), $\angle$(df)
46. a, c, $\alpha+\delta$, $\alpha+\beta$, ε

d) Gegeben drei Winkel.

47. f, α, β, γ, ε. 1. Anal. Es sei $BD=f$. Da $\angle BAD$ und BCD bekannt sind, hat man für A und C die Kreise M und M' als geometrische Örter. Durch $\angle ABC=\beta$ wird dann auch $\angle$(MA, M'C) bekannt. Man konstruiert ihn, indem man die Sehnen BA' und BC' beliebig unter dem Winkel β in die Kreise einträgt; er ist dann $=\angle$(MA',M'C'). Zieht man ferner CF gleich und parallel AM, so ist $\angle$M'CF bekannt, ferner M'C und CF, daher auch M'F der Länge nach bekannt, so daß man für F einen Kreis als geometrischen Ort erhält. Da ferner MF $\parallel$ AC sein muß, so liegt F auch auf einer Linie, die von M aus gezogen BD unter $\angle\varepsilon$ schneidet. Konstr. Man konstruiere BD und die Kreise M und M', zeichne die beliebigen Sehnen BA' und BC', so daß $\angle A'BC'=\beta$ ist. Dann ziehe man C'F' gleich und parallel A'M, schlage um M' mit M'F' einen Kreis u. s. w. 2. Anal. Der Kreis M um ABD schneide BC in E, CD in F. Durch BD und $\angle BAD$ ist der Radius von M bestimmt. Konstruiert man zunächst diesen Kreis und nimmt A beliebig auf demselben an, so sind, da $\angle ADF=\delta$, $\angle ABE=\beta$ ist, auch die Punkte E und F bestimmt. C liegt, da $\angle FCE=\gamma$, auf einem über FE konstruierbaren Kreise M'. Zieht man CH $\parallel$ DB, so ist $\angle ECH=EBD=EFC$ (da DFEB ein Sehnenviereck ist), daher CH Tangente an M'. Hierdurch wird, da ACH bekannt ist, auch $\angle$ACM' bekannt, so daß man einen zweiten Ort für C erhält. — Zur Konstr. müßte man erst B'D' = f zeichnen, darüber einen Kreis mit dem Peripheriewinkel α konstruieren und auf diesem A beliebig annehmen.

48. e, f, α, β, γ. 1. und 2. Anal. ähnlich wie 47.

49. a, c, $\angle$(be), $\angle$(df), $\angle$(bf). 1. Anal. Man hat $AB=a$ und die Mittelpunkte M und M' der bezüglich um ABD und ABC beschriebenen Kreise. Durch $\angle CBD=\angle$(bf) ist dann auch $\angle$(D'M,CM') gegeben. Man findet ihn, indem man die Sehnen BC' und BD' beliebig unter dem $\angle$(be) in die Kreise einträgt; er ist dann $=\angle$(DM, C'M'). Zieht man nun CF gleich und parallel DM, so ist $\angle$M'CF bekannt, ferner M'C und CF, daher auch M'F der Länge nach bekannt, so daß man für F einen Kreis als geometrischen Ort erhält. Ein anderer Ort ergiebt sich aus $MF=c$. Zur Konstr. beachte man die der 1. Anal. von 47.

2. Anal. Der Kreis M um △ABD schneide AC in F, BC in E. Durch AB und ∠ADB ist der Radius von M bestimmt. Konstruiert man zunächst diesen Kreis und nimmt D beliebig auf demselben an, so sind durch ∠DBE = ∠(bf) und ∠DAF, der ebenfalls bekannt ist, auch die Punkte E und F bestimmt. Nun hat man zwei Örter für C, da ∠ECF und DC bekannt sind.

50. a, α, β, γ, ε. Anal. Der Kreis um BCD treffe AD in F, so ist ∠DFB = 2R − γ und △ABF zu konstruieren. AD und BC mögen sich in G schneiden, so ist ∠AGB = 2R − α − β. Bezeichnet man ∠ADB mit α′, ∠ACB mit α″, so ergiebt sich durch Außenwinkel α′ + α″ = ε + 2R − α − β; also α′ + α″ bekannt, ferner ∠FCB = α′. Zeichnet man nun △CBF′ kongruent und in symmetrischer Lage zu CBF, so ist F′ zu bestimmen, da BF′ = BF und ∠CBF′ = CBF bekannt ist. Da nun auch BCF′ = BCF = BDF = α′ ist, so ist ∠ACF′ = α′ + α″ bekannt, wodurch sich ein Ort für C ergiebt. Ein zweiter Ort ist die Richtung von BC.

e) Trapezaufgaben, welche auf die unter d) zurückzuführen sind

51. f, α, β, ε, (47)
52. a, α, β, ε, (50; §. 57, 7)
53. e, f, α, β (48; §. 60, 11)
54. b, d, ∠(ae), ∠(af). (49)

§. 24.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks der Umfang gegeben, so verlängere die Grundlinie nach beiden Seiten um die anstoßenden Seiten; dann ist in dem so erhaltenen Dreieck der Winkel an der Spitze = ½α + ½β + γ = R + ½γ.

1. R △ a+b+c, h
2. a+b+c, α, β
3. a+b+c, h_c, γ
4. a+b+c, h_c, α
5. a+b+c, q, α
6. a+p, b+q, α
7. a+p, b+q, γ
8. a+p, b+q, α − β
9. a+p, h_c, α − β

Andere Aufgaben, in denen der Umfang gegeben, siehe §. 41.

§. 25. (s. auch Anh. IV, S. 204.)

a) Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks der Überschuß der Summe zweier Seiten über die dritte a + b − c gegeben, so verlängere BC über C hinaus um AC bis D, so daß BD = a + b, und trage AB auf BD von B aus ab bis E; dann ist DE = a + b − c; ∠CDA = DAC = ½γ; ∠BEA = EAB = R − ½β; ∠DAE = DAC + CAB − EAB = ½γ + α − (R − ½β) = α − R + ½β + ½γ = α − R + R − ½α = ½α; ∠EAC = DAC − DAE = ½(γ − α).

1. a + b − c, h_c, α (§. 42, 34)
2. a + b − c, h_c, β (§. 42, 26)

b) s. Anh. IV, S. 204.

§. 26.

Aufgaben über das Trapez, welche auf §. 24 zurückzuführen sind.

a) Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß $a-c$, b, d Seiten eines konstruierbaren Dreiecks sind, dessen Winkel an der Spitze $= 2R-(\alpha+\beta)$ ist. (§. 8, b.)

1. $a+b+d-c$, e, α, β
2. $a+b+d$, c, α, β
3. $a+b+d-c$, h, $\alpha+\beta$, $\angle$(df)
4. $a+b+d-c$, h, $\alpha+\beta$, $\angle$(ct)

b) Bei der Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß $a+c$, e, f Seiten eines konstruierbaren Dreiecks sind, dessen Winkel an der Spitze $= \varepsilon$.

5. $a+c+e+f$, d, $\angle$(ae), $\angle$(af)
6. $a+c+e+f$, h, ε, $\angle$(df)
7. $a+c+e+f$, b, h, ε

c) Bei der Lösung der folgenden Aufgaben ist a), b) und §. 12, d) zu beachten.

8. $b-d$, $a-c$, $\alpha-\beta$, ε
9. $a+b+d-c$, h, $\alpha+\beta$, ε
10. $a+c+e+f$, h, $\alpha+\beta$, ε

§. 27 und 28.

Zieht man durch die Spitze C eines Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie AB, bis sie den um das Dreieck geschlagenen Kreis in E trifft, so ist diese gleich der Differenz der durch die Höhe auf der Grundliuie gebildeten Segmente, und der Peripheriewinkel über dieser Sehne ist gleich der Differenz der Winkel an der Grundlinie.

Fig. 2. Beweis. a) $\alpha < R$. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$, mithin $\angle CAB = ABE$; folglich $\triangle ACD \cong BEF$, also $AD = BF = q$; und da $BD = p$, so ist $FD = CE = p-q$.

$\angle ABE = \alpha$, also $CBE = ABE - ABC = \alpha - \beta$.

Ferner ist $CD = h_c$, $CK = w_c$, $CH = t_c$.

Folgerung. $\angle CIM = ICM = DCK = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Daß $\angle(h_c w_c) = DCK = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ist, läßt sich auch so zeigen: $\angle DCK = \frac{1}{2}\gamma - (R-\alpha) = R - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta - R + \alpha = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Ist $\alpha > R$, so ist der Beweis ähnlich; die gezogene Parallele CE ist dann gleich der Summe der Segmente der Grundline.

1. w_c, h_c, $p-q$
2. w_c, $p-q$, $\alpha-\beta$
3. t_c, $p-q$, $\alpha-\beta$
4. r, h_c, $p-q$
5. r, t_c, $p-q$
6. r, w_c, $p-q$
7. t_c, w_c, $p-q$
8. t_c, $p-q$, γ (§. 19)
9. h_c, t_c, $\alpha-\beta$
10. c, r, $\alpha-\beta$
11. a, r, $\alpha-\beta$
12. b, r, $\alpha-\beta$
13. r, h_c, $\alpha-\beta$
14. r, w_c, $\alpha-\beta$
15. r, h_c, w_c
16. r, t_c, $\alpha-\beta$
17. w_c, t_c, $\alpha-\beta$
18. r, h_c, t_c
19. h_c, t_c, w_c
20. a, w_c, $\alpha-\beta$
21. w_c, $\alpha-\beta$, γ
22. w_c, ρ, $\alpha-\beta$
23. w_c, ρ_c, $\alpha-\beta$
24. h_c, $\alpha-\beta$, γ
25. h_c, ρ, $\alpha-\beta$
26. h_c, ρ_c, $\alpha-\beta$

§. 29. (s. auch Anh. IV, S. 204.)

Konstruktion eines Dreiecks aus der Grundlinie, der Höhe und der Differenz der Winkel an der Grundlinie und ähnliche Aufgaben.

a) 1. c, h_c, $\alpha-\beta$ (§. 142, 1) 1. Anal. Errichtet man auf AB in A ein Lot $AG = 2h_c$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $ABG: AG = 2h_c$ und $AB = c$. Wird ferner G mit C verbunden, von C auf AB das Lot CD und auf AG das Lot CF gefällt, und AD auf BD von D aus bis E abgetragen, so ist GCE eine gerade Linie; denn $\angle ACF = FCG = \alpha$; $\angle ACE = 2R - 2\alpha$, mithin $\angle GCE = 2R$, also GCE eine gerade Linie; folglich ist $\angle BCG = 2R - (\alpha - \beta)$. Wird daher, nachdem BG gefunden, über dieser Linie ein Kreis geschlagen, welcher den Winkel $2R - (\alpha - \beta)$ als Peripheriewinkel faßt, so wird dieser Kreis von einer durch F mit AB gezogenen Parallelen in C getroffen. 2. Anal. Man fälle CD senkrecht auf AB und trage AD auf DB von D aus ab bis E, halbiere EB in F und verlängere CF über F bis G, so daß FG = CF ist; dann ist $DF = \frac{1}{2}c$, also $\triangle CDF$ bestimmt, ferner Punkt G; da $\angle ECB = \alpha - \beta$, so ist $\angle CBG = 2R - (\alpha - \beta)$; also ist der Kreis über CG bestimmt, welcher den Winkel CBG als Peripheriewinkel faßt.
2. $a + b + c$, h_c, $\alpha - \beta$ (§. 142, 4) 3. c, w_c, $\alpha - \beta$
4. c, h_c, w_c

b) 5. h_c, $p - q$, γ (§. 142, 2). 1. Anal. Ähnlich wie 1, 1. Anal. Errichte auf AB in E ein Lot $EH = 2h_c$ und verbinde H mit C, so ist ACH eine gerade Linie und $\angle BCH = 2R - \gamma$. 2. Anal. Man fälle CD senkrecht AB, E sei die Mitte von AB; man verlängere CE über E bis F, so daß EF = CE ist, so ist $DE = \frac{1}{2}(p - q)$ und $\angle CBF = 2R - \gamma$. Daher ist $\triangle CDE$ bestimmt, dann Punkt F, und der Kreis über CF, welcher den Winkel $2R - \gamma$ faßt, ist ein Ort für B.
6. $a - b + p - q$, h_c, γ. 7. 8. s. Anh. IV, S. 204.

§. 30.

Wenn sich unter den zur Konstruktion eines Dreiecks gegebenen Stücken die Summe zweier Höhen z. B. $h_a + h_b$ befindet, so fälle die Höhen AE und BF, verlängere BF über F um AE bis G, so daß $BG = h_a + h_b$ wird. Errichtet man ferner auf BG in G eine Senkrechte bis sie die Verlängerung von BC in D trifft und fällt $CH \perp GD$, so ist $\triangle CHD \cong AEC$, daher $BD = a + b$ und $\angle GDB = \gamma$. Da CA = CD, so ist $\angle CAD = CDA = ADG = \frac{1}{2}\gamma$; also DA Halbierungslinie des Winkels GDC.

1. a, $h_a + h_b$, γ 4. a+b, h_a, h_b (§. 49) 7. $h_a + h_b$, α, γ
2. a, b, $h_a + h_b$ (§. 49) 5. a+b, $h_a + h_b$, c 8. a + b, $h_a + h_b$, α
3. a—b, $h_a + h_b$, γ 6. c, $h_a + h_b$, γ

Ein Parallelogramm zu konstruieren aus

9. a, $h_a + h_b$, α 12. a+b, h_a, h_b (§. 49) 15. $h_a + h_b$, α, $\angle$ (bf)
10. a, b, $h_a + h_b$ (§. 49) 13. a+b, $h_a + h_b$, f 16. a+b, $h_a + h_b$, $\angle$ (bf)
11. a—b, $h_a + h_b$, α 14. f, $h_a + h_b$, α

§. 31.

Befindet sich unter den zur Konstruktion eines Dreiecks gegebenen Stücken die Differenz zweier Höhen z. B. $h_b - h_a$, so fälle die Höhen AE und BF, trage AE auf FB von F aus ab, so daß $BG = h_b - h_a$ wird. Errichtet man ferner auf BG in G eine Senkrechte bis sie BC in D trifft, und fällt $DH \perp AC$, so ist $\triangle$ CHD $\cong$ CEA, daher $BD = a - b$. Da $CA = CD$, so ist $\angle CAD = CDA = ADG = R - \frac{1}{2}\gamma$; also DA Halbierungslinie des Winkels GDC.

1. b, $h_b - h_a$, γ 4. a+b, $h_b - h_a$, γ 7. c, $h_b - h_a$, γ
2. a, $h_b - h_a$, γ 5. a—b, h_a, h_b (§. 49) 8. $h_b - h_a$, α, γ
3. a, b, $h_b - h_a$ (§. 49) 6. a—b, $h_b - h_a$, c 9. $h_b - h_a$, a—b, α

Ein Parallelogramm zu konstruieren aus

10. b, $h_b - h_a$, α 13. a+b, $h_b - h_a$, α 16. f, $h_b - h_a$, α
11. a, $h_b - h_a$, α 14. a—b, h_a, h_b (§. 49) 17. $h_b - h_a$, α, $\angle$ (bf)
12. a, b, $h_b - h_a$ (§. 49) 15. a—b, $h_b - h_a$, f 18. $h_b - h_a$, a—b, $\angle$ (bf)

§. 32.

Unter den zur Zeichnung eines Dreiecks gegebenen Stücken befinde sich der Radius r des umgeschriebenen Kreises.

a) Einfache Aufgaben.

1. Gleichseit. $\triangle$ r 5. c, r, α 9. r, h_a, γ
2. R $\triangle$ r, α 6. c, r, h_a 10. p, q, r
3. Gleichschenkl. $\triangle$ c, r 7. c, h_c, r
4. a, b, r 8. c, t_c, r

b) In den folgenden Aufgaben wird eine Seite leicht durch r und einen gegebenen oder doch zu konstruierenden Winkel gefunden, indem man ihn als doppelten Centriwinkel in den Kreis einträgt. In den Aufgaben 21 bis 28 ist mit Hülfe von §. 11 eine Nebenfigur zu vermeiden.

11. R $\triangle$ r, $\alpha - \beta$ (§. 27) 15. r, t_c, γ
12. Gleichschenkl. $\triangle$ r, α 16. r, h_c, γ
13. Gleichschenkl. $\triangle$ r, γ 17. r, a + b, α
14. r, α, β 18. r, a — b, α

19. r, a − b, β
20. a + b + c, r, α
21. a + b, r, γ
22. a − b, r, γ
23. a + b, c, r
24. a − b, c, r
25. a + b, r, p − q (§. 27)
26. a − b, r, p − q (§. 27)
27. a + b, r, α − β (§. 27)
28. a − b, r, α − β (§. 27)
29. a + b, $h_a + h_b$, r (§. 30)
30. a − b, $h_b - h_a$, r (§. 31)
31. $h_a + h_b$, r, γ (§. 30)
32. $h_b - h_a$, r, γ (§. 31)
33. u, v, r (§. 11, 5)

c) Verbindet man den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises mit einer Dreiecksecke und schlägt über dieser Linie als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch die Mitten der anliegenden Seiten.

34. r, c, t_a
35. r, γ, t_a
36. c, γ, t_a
37. c, γ, ∠ (ct_a)
38. c, r, ∠ (ct_a)
39. r, γ, ∠ (ct_a)
40. b, γ, ∠ (ct_a) (§. 19)
41. h_a, γ, ∠ (ct_a) (§. 19)

§. 33.

Aufgaben in denen der Radius ρ des eingeschriebenen Kreises gegeben.

Den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises findet man durch Halbierung der Winkel.

1. Gleichschenkl. △ c, ρ
2. Gleichschenkl. △ ρ, h_c
3. Gleichschenkl. △ ρ, γ
4. Gleichseit. △ ρ
5. Gleichseit. △ h — ρ
6. R △ ρ, α
7. R △ a, ρ
8. R △ ρ, h
9. R △ ρ, w_c
10. ρ, α, β
11. c, ρ, α
12. ρ, h_c, α
13. ρ, h_c, γ
14. a, ρ, h_c
15. ρ, q, α
16. ρ, h_c, p
17. ρ, w_c, γ

§. 34.

Aufgaben über das Sehnenviereck, wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises = r gegeben.

a) Einfache Aufgaben. Bei einigen derselben ist zu beachten, daß, wenn in einem Kreise der Peripheriewinkel gegeben, auch die zugehörige Sehne bekannt ist.

1. r, a, b, c
2. r, a, c, e
3. r, a, b, f
4. r, a, e, f
5. r, a, b, α
6. r, a, c, α
7. r, a, e, α
8. r, a, c, γ
9. r, a, α, β
10. r, a, α, δ
11. r, a, γ, δ
12. r, a, ∠ (ae), ∠ (af)
13. r, ∠ (ae), ∠ (be), ∠ (ce)
14. r, a, e, ∠ (de)
15. r, a, b, ∠ (de)
16. r, a, α, ∠ (de)
17. r, a, b, ε
18. r, a, α, ε
19. r, a, δ, ε
20. r, a, e, ε,
21. r, e, ε, ∠ (af)
22. r, d, ε, ∠ (df)
23. r, c, ε, ∠ (cf)
24. r, f, ε, ∠ (cf)
25. r, δ, ε, ∠ (ce)
26. r, ε, ∠ (ae), ∠ (be)
27. r, e, f, ε
28. r, e, α, ε
29. r, a, c, β + γ

b) In den folgenden Aufgaben, welche $a \pm b$ unter den gegebenen Stücken enthalten, kann man eine dieser Größen, nämlich a oder b leicht aus den anderen gegebenen Stücken konstruieren.

30. r, a + b, c, f
31. r, a − b, c, f
32. r, a + b, c, γ
33. r, a − b, c, γ
34. r, a + b, c, ∠(cf)
35. r, a − b, c, ∠(cf)
36. r, a + b, c, ∠(df)
37. r, a − b, c, ∠(df)
38. r, a + b, f, ∠(ce)
39. r, a − b, f, ∠(ce)
40. r, a + b, f, ∠(be)
41. r, a − b, f, ∠(be)
42. r, a + b, α, ∠(ce)
43. r, a − b, α, ∠(ce)
44. r, a + b, ∠(af), ∠(be)
45. r, a − b, ∠(af), ∠(be)
46. r, a + b, ∠(af), ∠(cf)
47. r, a − b, ∠(af), ∠(cf)
48. r, a + b, ε, ∠(df)
49. r, a − b, ε, ∠(df)

c) Bei den folgenden Aufgaben ist §. 22, a zu beachten und §. 32, b, 21—24.

50. r, a+b, c, d
51. r, a−b, c, d
52. r, a+b, c, e
53. r, a−b, c, e
54. r, a+b, e, f
55. r, a−b, e, f
56. r, a+b, c, β
57. r, a−b, c, β
58. r, a + b, e, γ
59. r, a − b, e, γ
60. r, a + b, f, β
61. r, a − b, f, β
62. r, a + b, α, β
63. r, a − b, α, β
64. r, a+b, c, ∠(af)
65. r, a−b, c, ∠(af)
66. r, a + b, e, ∠(ce)
67. r, a − b, e, ∠(ce)
68. r, a+b, ∠(af), ∠(bf)
69. r, a−b, ∠(af), ∠(bf)
70. r, a + b, e, ε
71. r, a − b, e, ε
72. r, a + b, β, ε
73. r, a − b, β, ε

§. 35.

Aufgaben über das Sehnenviereck, wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises nicht gegeben ist.

a) In den folgenden Aufgaben läßt sich leicht ein Dreieck zeichnen; der um dasselbe beschriebene Kreis ist auch der um das Viereck beschriebene.

1. a, b, β, c
2. a, b, β, α
3. a, b, β, f
4. a, b, β, ∠(af)
5. a, b, β, ε
6. a, b, c, e
7. a, b, e, α
8. a, b, e, f
9. a, b, e ∠(af)
10. a, b, e, ε
11. a, c, ∠(ae), ∠(be)
12. a, α, ∠(ae), ∠(be)
13. a, f, ∠(ae), ∠(be)
14. a, ∠(ae), ∠(be), ∠(af)
15. a, ε, ∠(ae), ∠(be)
16. a, c, β, ∠(ae)
17. a, d, β, ∠(ae)
18. a, α, β, ∠(ae)
19. a, β, γ, ∠(ae)
20. a, f, β, ∠(ae)
21. a, β, ∠(ae), ∠(af)
22. a, β, ∠(ae), ∠(bf)

23. a, β, ε, ∠(ae)
24. a, b, c, ∠(ae)
25. a, b, d, ∠(ae)
26. a, b, α, ∠(ae)
27. a, b, γ, ∠(ae)
28. a, b, f, ∠(ae)
29. a, b, ∠(ae), ∠(af)
30. a, b, ∠(ae), ∠(bf)
31. a, b, ε, ∠(ae)
32. a, e, β, ε
33. a, d, e, β
34. a, e, α, β
35. a, e, β, γ
36. a, e, f, β
37. a, e, β, ∠(af)
38. a, e, β, ∠(bf)
39. a, e, β, ε
40. a, c, e, ∠(be)
41. a, d, e, ∠(be)
42. a, e, α, ∠(be)
43. a, e, γ, ∠(be)
44. a, e, f ∠(be)
45. a, e, ∠(af), ∠(be)
46. a, e, ∠(be), ∠(bf)
47. a, e, ε, ∠(be)
48. a, c, e, ∠(ae)
49. a, d, e, ∠(ae)
50. a, e, α, ∠(ae)
51. a, e, γ, ∠(ae)
52. a, e, f, ∠(ae)
53. a, e, ∠(ae), ∠(af)
54. a, e, ∠(ae), ∠(bf)
55. a, e, ε, ∠(ae)
56. a + b, c, e, β
57. a − b, c, e, β
58. a + b, e, α, β
59. a − b, e, α, β
60. a + b, e, f, β
61. a − b, e, f, β
62. a + b, e, β, ∠(af)
63. a − b, e, β ∠(af)
64. a + b, e, β, ε
65. a − b, e, β, ε
66. a + b, c, e, ∠(ae)
67. a − b, c, e, ∠(ae)
68. a + b, d, e, ∠(ae)
69. a − b, d, e, ∠(ae)
70. a + b, e, α, ∠(ae)
71. a − b, e, α, ∠(ae)
72. a + b, e, γ, ∠(ae)
73. a − b, e, γ, ∠(ae)
74. a + b, e, f, ∠(ae)
75. a − b, e, f, ∠(ae)
76. a + b, e, ∠(ae), ∠(af)
77. a − b, e, ∠(ae), ∠(af)
78. a + b, e, ∠(ae), ∠(bf)
79. a − b, e, ∠(ae), ∠(bf)
80. a + b, e, ε, ∠(ae)
81. a − b, e, ε, ∠(ae)
82. e + a, b, c, ∠(ae)
83. e − a, b, c, ∠(ae)
84. e + a, b, d, ∠(ae)
85. e − a, b, d, ∠(ae)
86. e + a, b, α, ∠(ae)
87. e − a, b, α, ∠(ae)
88. e + a, b, γ, ∠(ae)
89. e − a, b, γ, ∠(ae)
90. e + a, b, f, ∠(ae)
91. e — a, b, f, ∠(ae)
92. e + a, b, ∠(ae), ∠(af)
93. e − a, b, ∠(ae), ∠(af)
94. e + a, b, ∠(ae), ∠(bf)
95. e − a, b, ∠(ae), ∠(bf)
96. e + a, b, ε, ∠(ae)
97. e − a, b, ε, ∠(ae)
98. e + a, b, c, β
99. e − a, b, c, β
100. e + a, b, d, β
101. e − a, b d, β
102. e + a, b, α, β
103. e − a, b, α, β
104. e + a, b, β, γ
105. e − a, b, β, γ
106. e + a, b, f, β

107. $e-a, b, f, \beta$
108. $e+a, b, \beta, \angle(af)$
109. $e-a, b, \beta, \angle(af)$
110. $e+a, b, \beta, \varepsilon$
111. $e-a, b, \beta, \varepsilon$
112. $e+a, b, c, \angle(be)$
113. $e-a, b, c, \angle(be)$
114. $e+a, b, d, \angle(be)$
115. $e-a, b, d, \angle(be)$
116. $e+a, b, \alpha, \angle(be)$
117. $e-a, b, \alpha, \angle(be)$
118. $e+a, b, \gamma, \angle(be)$
119. $e-a, b, \gamma, \angle(be)$
120. $e+a, b, f, \angle(be)$
121. $e-a, b, f, \angle(be)$
122. $e+a, b, \angle(af), \angle(be)$
123. $e-a, b, \angle(af), \angle(be)$
124. $e+a, b, \angle(be), \angle(bf)$
125. $e-a, b, \angle(be), \angle(bf)$
126. $e+a, b, \varepsilon, \angle(be)$
127. $e-a, b, \varepsilon, \angle(be)$

b) Das unter a) Gesagte ist zu beachten und außerdem, daß in jedem Sehnenviereck die Summe der gegenüberliegenden Winkel $2\,R$ beträgt.

128. a, b, c, α
129. a, c, α, β
130. a, c, e, β
131. a, b, f, δ
132. a, b, α, δ
133. $a, \gamma, \varepsilon, \angle(df)$
134. $a+b, f, \alpha, \angle(ce)$
135. $a-b, f, \alpha, \angle(ce)$
136. $a+b, c, d, e$
137. $a-b, c, d, e$

c) Bei den folgenden Aufgaben vergleiche §. 23, a (s. auch Anh. IV, S. 204.)

138. $e, \beta, \gamma, \varepsilon$
139. $e, f, \alpha, \varepsilon$
140. $e, f, \varepsilon, \angle(be)$

d) Schlägt man um A mit c einen Kreisbogen, welcher $\overset{\frown}{ADC}$ in F trifft, so ist $CF = d$ und $\angle FAC = \angle(ce) = \angle(af)$; mithin $\angle FAB = \angle(af) + \angle(ae) = 2\,R - \varepsilon$. In den folgenden Aufgaben suche man daher zunächst $\triangle FAB$ zu konstruieren.

141. a, b, c, ε (§. 58, 15)
142. a, c, e, ε (§. 58, 16)
143. a, c, β, ε (§. 58, 14)
144. $a, c, \varepsilon, \angle(ae)$
145. $a, c, b+d, \varepsilon$
146. $a, c, b-d, \varepsilon$
147. $a, c, e+b, \varepsilon$
148. $a, c, e-b, \varepsilon$
149. $b, a+c, \angle(be), \angle(de)$
150. $a+c, e, \angle(be), \angle(de)$
151. $a+c, \beta, \angle(be), \angle(de)$
152. $a+c, \angle(ae), \angle(be), \angle(de)$
153. $a+c, b+d, \angle(be), \angle(de)$
154. $a+c, b-d, \angle(be), \angle(de)$
155. $a+c, e+b, \angle(be), \angle(de)$
156. $a+c, e-b, \angle(be), \angle(de)$
157. $b, a-c, \angle(be), \angle(de)$
158. $a-c, e, \angle(be), \angle(de)$
159. $a-c, \beta, \angle(be), \angle(de)$
160. $a-c, \angle(ae), \angle(be), \angle(de)$
161. $a-c, b+d, \angle(be), \angle(de)$
162. $a-c, b-d, \angle(be), \angle(de)$
163. $a-c, e+b, \angle(be), \angle(de)$
164. $a-c, e-b, \angle(be), \angle(de)$

e) Bei den folgenden Aufgaben ist §. 22, b zu beachten und außerdem für 173 bis 182 noch §. 35, d

165. $a+b, c+d, e, \alpha$
166. $a+b, c-d, e, \alpha$
167. $a-b, c-d, e, \alpha$
168. $a+b, c+d, \angle(ae), \angle(de)$
169. $a+b, c-d, \angle(ae), \angle(de)$
170. $a-b, c-d, \angle(ae), \angle(de)$

171. $a+b, c, d, \alpha$
172. $a-b, c, d, \alpha$
173. $a+b, c+d, e, \varepsilon$
174. $a+b, c-d, e, \varepsilon$
175. $a-b, c-d, e, \varepsilon$
176. $a+b, c+d, \angle(ae), \angle(ce)$
177. $a+b, c-d, \angle(ae), \angle(ce)$
178. $a-b, c-d, \angle(ae), \angle(ce)$
179. $a+b, c, d, \varepsilon$
180. $a-b, c, d, \varepsilon$
181. $a+c, b, d, \beta$
182. $a-c, b, d, \beta$

183. s. Anh. IV, S. 204.

§. 36.

Aufgaben über das Tangentenviereck, wenn der Radius ρ des eingeschriebenen Kreises gegeben.

a) Einfache Aufgaben.

1. $\rho, \alpha, \beta, \gamma$
2. ρ, a, b, β
3. ρ, a, β, γ
4. ρ, a, e, α
5. ρ, e, α, β
6. ρ, a, e, β
7. ρ, e, α, γ, (AM und CM sind zu konstruieren)
8. $\rho, c, e, \angle(de)$
9. $\rho. a, \alpha, \gamma$
10. ρ, a, b, α
11. $\rho, e, a+b, \beta$
12. $\rho, e, a-b, \beta$

b) Fig. 3. Wenn ρ gegeben, ferner zwei Stücke, so daß die Seite AB vollständig, die Seiten AD und BC nur der Richtung nach gezeichnet werden können, und als viertes Stück die Seite c, so ist $\triangle$ DMC besonders zu zeichnen, da Seite $CD = c$, die Höhe darauf $= \rho$ und der Winkel an der Spitze $CMD = 2R - \frac{1}{2}(\gamma+\delta) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ gegeben ist, wodurch dann CM und DM bestimmt sind.

13. ρ, a, c, α
14. ρ, c, α, β
15. $\rho, a, c, \alpha+\beta$

c) Fig. 3. In den folgenden Aufgaben ist BC auf BA von B aus bis E abzutragen. Es ist $\triangle BME \cong BMC$, also $\angle BEM = \frac{1}{2}\gamma$ und $ME = MC$. Es kommt zunächst darauf an $\triangle AME$ zu konstruieren, in welchem $\angle AME = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ und $\angle MEA - MAE = 2R - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$ ist.

16. e, ρ, α, γ
17. $\rho, \gamma, \angle(ae), \angle(de)$
18. $a-b, e, \rho, \alpha$
19. $a-b, \rho, \alpha, \beta$
20. $a-b, \rho, \angle(ae), \angle(de)$
21. $a+b, \rho, \alpha, \gamma$
22. $a-b, e, \rho, \gamma$
23. $a-b, \rho, \gamma, \delta$
24. $a-b, \rho, \gamma, \angle(ae)$
25. $a-b, \rho, \gamma, \angle(de)$
26. $a, b, \rho, \gamma-\alpha$
27. $a-b, e, \rho, \gamma-\alpha$
28. $a-b, \rho, \beta, \gamma-\alpha$
29. $a-b, \rho, \gamma-\alpha, \angle(ae)$
30. $a-b, \rho, \gamma-\alpha, \angle(de)$
31. $a, b, \rho, \gamma+\alpha$
32. $a-b, e, \rho, \gamma+\alpha$
33. $a-b, \rho, \beta, \delta$
34. $a-b, \rho, \gamma+\alpha, \angle(ae)$
35. $a-b, \rho, \gamma+\alpha, \angle(de)$

§. 37.

Aufgaben über das Tangentenviereck, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises nicht gegeben ist.

a) Aus drei gegebenen Seiten läßt sich die vierte leicht konstruieren, da $a + c = b + d$.

1. a, b, d, β
2. d, e, ∠(ae), ∠(be)
3. a, d, e, ∠(ae)
4. a, d, β, ∠(ae)
5. a, c, β, ∠(ae)
6. a, b, c, e
7. a, b, d, ∠(ae)
8. a, b, c, ∠(ae)
9. a, d, e, β
10. a, c, e, β
11. b, d, e, ∠(ae)
12. b, c, e, ∠(ae)
13. c, e, ∠(ae), ∠(be)
14. a + b, c, e, β
15. a − b, c, e, β
16. a − b, d, e, β
17. a + b, d, e, ∠(ae)
18. a − b, d, e, ∠(ae)
19. a − b, c, e, ∠(ae)
20. e + a, b, c, ∠(ae)
21. e − a, b, c, ∠(ae)
22. e + a, b, d, ∠(ae)
23. e − a, b, d, ∠(ae)
24. e + a, b, c, β
25. e − a, b, c, β
26. e + a, b, d, β
27. e − a, b, d, β
28. e + a, b, c, ∠(be)
29. e − a, b, c, ∠(be)
30. e + a, b, d, ∠(be)
31. e − a, b, d, ∠(be)

b) In den folgenden Aufgaben kann man leicht eine Seite nebst zwei anliegenden Winkeln zeichnen und durch Halbierung derselben den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises finden.

32. a, b, α, β
33. a, b, β, ∠(ce)
34. e, ∠(ae), ∠(be), ∠(de)
35. a, e, α, ∠(ae)
36. a, e, γ, ∠(ae)
37. a, e, ∠(ae), ∠(ce)
38. a, α, β, ∠(ae)
39. a, β, ∠(ae), ∠(ce)
40. a, b, e, α
41. a, b, e, ∠(ce)
42. a, b, ∠(ae) ∠(de)
43. a, b, γ, ∠(ae)
44. a, b, ∠(ae), ∠(ce)
45. a, e, α, β
46. a, e, β, ∠(de)
47. a, e, β, γ
48. a, e, β, ∠(ce)
49. b, e, ∠(ae), ∠(de)
50. b, e, γ, ∠(ae)
51. b, e, ∠(ae), ∠(ce)
52. a + b, e, α, β
53. a − b, e, α, β
54. a + b, e, β, ∠(ce)
55. a − b, e, β, ∠(ce)
56. a + b, e, ∠(ae), ∠(de)
57. a − b, e, ∠(ae), ∠(de)
58. a + b, e, ∠(ae), ∠(ce)
59. a − b, e, ∠(ae), ∠(ce)
60. e + a, b, ∠(ae), ∠(de)
61. e − a, b, ∠(ae), ∠(de)
62. e + a, b, γ, ∠(ae)
63. e − a, b, γ, ∠(ae)
64. e + a, b, ∠(ae), ∠(ce)
65. e − a, b, ∠(ae), ∠(ce)
66. e + a, b, α, β
67. e − a, b, α, β
68. e + a, b, β, ∠(de)
69. e − a, b, β, ∠(de)
70. e + a, b, β, γ
71. e − a, b, β, γ
72. e + a, b, β, ∠(ce)
73. e − a, b, β, ∠(ce)
74. e + a, b, α, ∠(be)
75. e − a, b, α, ∠(be)
76. e + a, b, ∠(be), ∠(de)
77. e − a, b, ∠(be), ∠(de)
78. e + a, b, ∠(be), ∠(ce)
79. e − a, b, ∠(be), ∠(ce)

c) Fig. 3. Da $a+c=b+d$, so ist auch $a-b=d-c$; trägt man daher BC auf AB von B aus $ab=BE$, und CD von D aus auf AD $ab=DF$, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck $EAF: AEF=AFE=R-\frac{1}{2}\alpha$; ferner in dem gleichschenkligen Dreieck $CDF: DCF=DFC=R-\frac{1}{2}\delta$, und im Dreieck $EBC: BCE=CEB=R-\frac{1}{2}\beta$; mithin $AFC=R+\frac{1}{2}\delta$ und $AEC=R+\frac{1}{2}\beta$. Ferner $MC=ME=MF$, daher $ECF=\frac{1}{2}EMF=AME=\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ (§. 36, c).

Die Aufgaben 89, 99, 100, 122 lassen sich auch noch auf die in §. 36, c angegebene Weise lösen.

80. a, b, β, δ
81. e, δ, $\angle$(ae), $\angle$(be)
82. a, e, δ $\angle$(ae)
83. a, β, δ, $\angle$(ae)
84. a, b, e, δ,
85. a, b, δ, $\angle$(ae)
86. a, e, β, δ
87. b, e, δ, $\angle$(ae)
88. a, b, α, δ
89. a, b, α, γ
90. a, e+b, δ, $\angle$(ae)
91. a, e−b, δ, $\angle$(ae)
92. a, e+b, δ, $\angle$(be)
93. a, e−b, δ, $\angle$(be)
94. a+b, e, β, δ
95. a−b, e, β, δ
96. a+b, e, δ, $\angle$(ae)
97. a−b, e, δ, $\angle$(ae)
98. a−b, e, δ, $\angle$(be)
99. a−b, e, α, γ
100. a−b, α, β, δ
101. a, b, β, $\gamma-\alpha$
102. a, e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
103. b, e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(be)
104. a, b, e, $\gamma-\alpha$
105. a, b, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
106. a, e, β, $\gamma-\alpha$
107. a, e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(be)
108. a, β, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
109. e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae), $\angle$(be)
110. a+b, e, β, $\gamma-\alpha$
111. a−b, e, β, $\gamma-\alpha$
112. a+b, e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
113. a−b, e, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
114. a, e+b, $\gamma-\alpha$, $\angle$(be)
115. a, e−b, $\gamma-\alpha$, $\angle$(be)
116. a, e+b, β, $\gamma-\alpha$
117. a, e−b, β, $\gamma-\alpha$
118. a, e+b, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
119. a, e−b, $\gamma-\alpha$, $\angle$(ae)
120. a−b, $\gamma-\alpha$ $\angle$(ae), $\angle$(de)
121. a−b, β, $\angle$(ae), $\angle$(de)
122. a−b, γ, $\angle$(ae), $\angle$(de)

§. 37a.

Aufgaben über das Tangentenviereck.

In den folgenden Aufgaben ist $\triangle AMB$ leicht zu konstruieren; außerdem ist noch c gegeben. Zur Analysis kann ein doppelter Weg eingeschlagen werden. 1) Verlängere AD und BC, bis sie sich in O schneiden; konstruiere den in $\triangle CDO$ beschriebenen Kreis, welcher OD in P berührt, so ist, wenn AD den in ABCD beschriebenen Kreis in Q berührt, $PQ=CD$ (§. 43). 2) Verlängere AB über B

hinaus um $c = BF$, trage an BF in B $\angle \frac{1}{2}\delta$ und in F $\angle \frac{1}{2}\gamma$ an; die freien Schenkel beider schneiden sich in G; dann ist $\triangle BGF \cong CMD$, und $MG \parallel AB$. Verlängert man AM und FG bis sie sich in H schneiden, so ist MBGH ein Sehnenviereck, also $\angle HMG = HBG = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle GMB = GHB = \frac{1}{2}\beta$, $\angle MGH = MBH = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle MGB = MHB = \frac{1}{2}\delta$. Nach Konstruktion von $\triangle AMB$ ist Punkt F, mithin auch H bestimmt, da $\angle BHF = \frac{1}{2}\beta$.

Die Aufgaben 7 bis 10 lassen sich nur nach der zweiten Analysis lösen.

1. a, c, α, β
2. c, ρ, α, β
3. a, c, ρ, α
4. a, c, ρ, α + β
5. a, c, ρ, α − β (§. 29, 1)
6. a + c, ρ, α, β
7. a, c, α, γ
8. a, c, α, δ
9. a + c, ρ, α, γ
10. a + c, α, β, γ

§. 38.

Aufgaben über das Tangentenviereck, welches ein Trapez oder Antiparallelogramm ist.

a) Die Höhe des Trapezes ist gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises. Ist der Radius des eingeschriebenen Kreises, so wie eine nicht parallele Seite gegeben, so zeichnet man letztere zwischen den beiden parallelen Seiten hin und fällt vom Mittelpunkt darauf ein Lot; dieses trifft den Kreis im Berührungspunkt der nicht parallelen Seite. Zu beachten ist noch, daß der Mittelpunkt gefunden wird, wenn man einen Winkel halbiert und durch die Mitte einer nicht parallelen Seite zu den parallelen Seiten eine Parallele zieht. Für die Aufgaben 15 bis 20 vergleiche noch §. 8, b.

1. a, b, ρ
2. b, ρ, α
3. a, e, ρ,
4. b, d ρ,
5. ρ, α, β
6. b + h, α, β
7. a + c, d, ρ
8. a, ρ, α
9. a, b, β
10. a, α, β
11. b, α, β
12. a − b, c, ρ
13. a, ρ, α + β (§. 11, 4)
14. a, ρ, α − β (§. 29, 1)
15. b, d, α
16. a, b, c
17. a − c, α, β
18. a − c, b, α
19. a − c, b, β
20. a, c, α

b) Zieht man die Mittellinie, so geht diese durch den Mittelpunkt, welcher auch auf der Halbierungslinie des von den nicht parallelen Seiten gebildeten Winkels liegt.

21. a + c, α, β
22. a + c, ρ, α

c) Trägt man BC auf AB von B aus ab = BI, so ist $\angle MIB = \frac{1}{2}\gamma = R - \frac{1}{2}\beta$, mithin $\angle IMB = R$, und ebenso $CMB = R$, also CMI eine gerade Linie. Ferner $\angle AMI = R - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\angle AIM - MAI = R - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

23. a, b, α 25. a—b, α, β 27. a—b, ρ, β 29. a—b, ρ, α—β
24. a, b, α+β 26. a—b, ρ, α 28. a—b, ρ, α+β (§. 29, 1)

d) Im Antiparallelogramm sind die beiden nicht parallelen Seiten einander gleich; daher ist durch zwei Seiten (entweder durch die beiden parallelen, oder durch eine parallele und die nicht parallele) auch die dritte gegeben. Die Projektion der Diagonale auf eine der parallelen Seiten ist gleich der nicht parallelen Seite.

30. ρ, α 33. b, α 36. a, c 39. a—c, α
31. a, ρ 34. a, α 37. a—c, b 40. b, e
32. b, ρ 35. a, b 38. a—c, ρ 41. e, ρ

§. 39.

Aufgaben über das Viereck, um und in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

a) Beachte §. 37, c, besonders daß in diesem Fall $\angle ECF = R - \alpha$ ist.

1. a, b, β
2. a, e, ∠(ae)
3. a, b, e
4. a, β, ∠(ae)
5. e, ∠(ae), ∠(be)
6. a, b, ∠(ae)
7. a, e, β
8. a, e, ∠(be)
9. a+b, e, β
10. a—b, e, β
11. a+b, e, ∠(be)
12. a—b, e, ∠(be)
13. a, e+b, ∠(be)
14. a, e—b, ∠(be)
15. a, e+b, β
16. a, e—b, β
17. a, e+b, ∠(ae)
18. a, e—b, ∠(ae)
19. a, b, r
20. a, e, r
21. a, r, β
22. e, r, ∠(ae)
23. a, r, ∠(ae)
24. a+b, e, r
25. a—b, e, r
26. a, e+b, r
27. a, e—b, r
28. a, b, α

b) Einfache Aufgaben.

29. ρ, α, β 30. a, α, β 31. a, ρ, α 32. a—b, c, e

c) 33. e, ρ, α. Anal. Schlage um M, den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, mit MC einen Kreis, lege von einem beliebigen Punkte desselben an den eingeschriebenen Kreis zwei Tangenten, so bilden diese $\angle \gamma = 2R - \alpha$.

d) Trägt man BC auf AB von B aus ab = BI, so ist, wenn M der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, $\angle MIB = \frac{1}{2}\gamma = R - \frac{1}{2}\alpha$; mithin $\angle MIA - MAI = R + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = R$; folglich beträgt im △ AMI an der Seite AI = a—b die Differenz der Winkel = R.

34. a, b, ρ (§. 29, 1) 36. a—b, ρ, e (§. 29, 1) 38. a—b, α, β
35. a—b, ρ, β (§. 29, 1) 37. a—b, e, α

e) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist §. 35, d zu beachten.

39. a, c, e 41. a+c, ∠(be), ∠(de) 43. a, c, ∠(be)
40. a, c, r 42. a—c, ∠(be), ∠(de)

f) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist §. 37a zu beachten.

44. a, c, α 45. a+c, ρ, α

§. 40—46a.

Aufgaben über das Dreieck, wenn Radien der Berührungskreise gegeben sind und damit zusammenhängende Aufgaben.

§. 40.

Allgemeine Bemerkungen über die Größe der Winkel und den Kreis der neun Punkte, sowie über die Längenbeziehungen zwischen den Radien und den Mittelsenkrechten.

Fig. 4. 1) $m'mA \perp m''Am'''$ als Winkelhalbierende zweier Nebenwinkel; ebenso $m''mB \perp m'''Bm'$; $m'''mC \perp m''Cm'$.

2) Verbindet man daher die Mitte G von mm''' mit A, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $mAm''' : Gm = GA = Gm'''$, also $mGA = 2mBA = \beta$. Mithin muß der Kreis, der durch A, B und C geht, auch durch die Mitte von mm''' und ebenso durch die Mitten von mm'' und mm' gehen.

3) Im $\triangle AmB$ ist $AmB = 2R - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = R + \frac{1}{2}\gamma$; und $Am'''B = Bm'''m + Am'''m = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = R - \frac{1}{2}\gamma$. Ebenso $AmC = R + \frac{1}{2}\beta$ und $Am''C = R - \frac{1}{2}\beta$; $BmC = R + \frac{1}{2}\alpha$ und $Bm'C = R - \frac{1}{2}\alpha$.

4) Verbindet man die Mitte H von $m'm''$ mit A, so ist, weil $m''A \perp m'A$ (siehe 1), $Hm'' = HA = Hm'$, demnach $m''HA = 2m''BA = \beta$; d. h. der Kreis, welcher durch A, B, C geht, muß auch durch die Mitte H von $m'm''$ gehen und aus demselben Grunde auch durch die Mitten von $m'm'''$ und $m''m'''$. Daher der

Lehrsatz. Der um ein Dreieck beschriebene Kreis geht auch durch die Mitten der 6 Centralen der vier Berührungskreise desselben Dreiecks.

Anmerkung 1. Sieht man das Dreieck $m'm''m'''$ als Urdreieck und also $\triangle ABC$ als dessen Höhendreieck an, so lautet der Satz:

„Der um das Höhendreieck beschriebene Kreis geht auch durch die Mitten sowohl der Seiten, wie der oberen Höhenabschnitte des Urdreiecks." (Kreis der neun Punkte oder Feuerbachscher Kreis.)

Anmerkung 2. Bedenkt man, daß $\triangle ABC$ nicht allein als das Höhendreieck von $m'm''m'''$, sondern auch von $mm'm''$, $mm'm'''$, $mm''m'''$ angesehen werden kann, so sieht man, daß zu jedem Höhendreieck vier Urdreiecke gehören, und der obige Satz erhält folgende Form: „Der um ein Höhendreieck beschriebene Kreis geht durch die Mitten der Seiten der zu dem Höhendreieck gehörenden vier Urdreiecke".

5) Weil $AG = Gm = GB$, so ist G die Mitte des Bogens AGB und weil $AH = Hm' = HB$, so ist H die Mitte des Bogens AHB; also muß die Linie HG durch den Mittelpunkt M des um ABC beschriebenen Kreises gehen und in der Mitte L der Sehne AB auf dieser senkrecht stehen.

Zieht man noch durch m zu AB eine Parallele, welche GH in N und die Verlängerung von m'''F''' in K trifft, so übersieht man leicht nachstehende Folgerungen:

6) $HL = r + p_c = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$ als Mittellinie des Trapezes m'F'F''m''.

Ebenso ist $r + p_b = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_c)$

$r + p_a = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$

7) $NG = \frac{1}{2}Km''' = \frac{1}{2}(\rho_c + \rho)$, denn G ist die Mitte von mm''' und $GN \parallel Km'''$. Ferner ist das Lot GS auf $CE''' = \frac{1}{2}(\rho_c + \rho)$ als Mittellinie des Trapezes mEE'''m'''.

8) $LG = r - p_c = NG - NL = \frac{1}{2}\rho_c + \frac{1}{2}\rho - \rho = \frac{1}{2}(\rho_c - \rho)$.

Ebenso ist: $r - p_b = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho)$

$r - p_a = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$

9) Aus (6) und (8) ergiebt sich durch Addition:

$2r = \frac{1}{2}\rho_a + \frac{1}{2}\rho_b + \frac{1}{2}\rho_c - \frac{1}{2}\rho$

oder $4r + \rho = \rho_a + \rho_b + \rho_c$

10) Durch Subtraktion von $r + p_a$ und $r + p_b$ (6) erhält man:

$p_a - p_b = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_a)$

Ebenso: $p_a - p_c = \frac{1}{2}(\rho_c - \rho_a)$

$p_b - p_c = \frac{1}{2}(\rho_c - \rho_b)$

11) Aus (6) und (8) findet man:

$p_a + p_b = \frac{1}{2}(\rho_c + \rho)$

Ebenso ist: $p_b + p_c = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho)$

$p_c + p_a = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho)$

12) Aus (6) findet man durch Addition:

$3r + p_a + p_b + p_c = \rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ (siehe 9) also $p_a + p_b + p_c = r + \rho$.

13) $\angle(h_c w_c) = PCO = FmO = CGM = GCM = CBH = CAH = Cm'''F''' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ (§. 28).

14) $\angle(m'm'', F'F'') = R - m''m'F' = R - m'''CP = \angle(h_c w_c) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $AGS = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

15) Weil Viereck m'''AmB ein Sehnenviereck ist, so ist $\angle Bm'''m = BAm = \frac{1}{2}\alpha$; $\angle Am'''m = ABm = \frac{1}{2}\beta$. Ebenso ist $\angle Am''m = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle Cm''m = \frac{1}{2}\alpha$; $\angle Bm'm = \frac{1}{2}\gamma$; $\angle Cm'm = \frac{1}{2}\beta$.

Anmerkung. Bei Lösung der folgenden Aufgaben wird §. 97, 1 wiederholt angewandt.

§. 41.

Ist der Umfang $a + b + c$ eines Dreiecks gegeben, so beachte man, daß $AF''' = AE'''$, $BF''' = BD'''$; also $a + b + c = CE''' + CD'''$, und da $CE''' = CD'''$, so ist $CE''' = CD''' = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Ebenso ist $BF'' = BD'' = \frac{1}{2}(a + b + c)$; $AE' = AF' = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

In den folgenden Aufgaben ist $a+b+c$ gegeben und außerdem:

1. ρ_c, a
2. ρ_c, ρ
3. ρ, γ
4. ρ_c, w_c
5. w_c, γ
6. ρ_c, α
7. ρ_c, h_c
8. h_c, γ (§. 24, 3)
9. h_a, γ (§. 24, 4)
10. ρ_c, $\alpha-\beta$
11. ρ_c, h_a
12. $h_c+\rho_c$, γ
13. $h_c+\rho_c$, $\alpha-\beta$
14. $\rho_c-\rho$, γ
15. $\rho_c+\rho$, γ
16. ρ_a, ρ_b
17. $\rho_a+\rho_b$, γ

§. 42.

Ist in einem Dreieck der Überschuß der Summe zweier Seiten über die dritte z. B. $a+b-c$ gegeben, so ist folgendes zu beachten:

$AE = AF$, $BD = BF$, also: $a+b-c = CE+CD$, und da $CE = CD$, so ist $\frac{1}{2}(a+b-c) = CE = CD$. Ebenso ist $BF = BD = \frac{1}{2}(a+c-b)$; $AF = AE = \frac{1}{2}(b+c-a)$

Ferner ist, da $BF'' = AF' = \frac{1}{2}(a+b+c)$,

$AE'' = AF'' = BD' = BF' = \frac{1}{2}(a+b+c) - c = \frac{1}{2}(a+b-c)$

Ebenso ist $BD''' = BF''' = CD'' = CE'' = \frac{1}{2}(b+c-a)$

und $AE''' = AF''' = CE' = CD' = \frac{1}{2}(a+c-b)$

In den folgenden Aufgaben ist $a+b-c$ gegeben und außerdem:

1. ρ_a, $\alpha-\beta$
2. $\rho_a+\rho_b$, α
3. ρ, α
4. a, ρ_a
5. c, ρ_a
6. α, γ
7. ρ, $\alpha-\beta$
8. ρ, $\alpha-\gamma$
9. ρ, ρ_c
10. $\rho_c-\rho$, γ
11. ρ, c
12. ρ, ρ_a
13. ρ, h_a
14. h_a, γ
15. ρ, w_c
16. w_c, γ
17. ρ, h_c
18. h_c, γ
19. $h_c-\rho$, γ
20. $h_c-\rho$, $\alpha-\beta$
21. ρ_c, γ
22. ρ_a, α
23. ρ_a, $\gamma-\beta$
24. ρ_a, h_a
25. ρ_a, h_b
26. h_b, α (§. 25, 2)
27. ρ_a, h_c
28. ρ_a, α
29. ρ_a, w_b
30. ρ_a, γ
31. ρ_a, ρ_b
32. ρ_a, ρ_c
33. $\rho_a+\rho_b$, γ
34. h_b, β (§. 25, 1)
35. w_b, β

§. 43.

Sind einzelne Seiten gegeben, so ist zu beachten:

1) daß der von einem inneren und einem äußeren Berührungspunkte, welcher letzterer auf der Verlängerung der Dreiecksseite liegen muß, begrenzte Teil einer Seite gleich der diesen Teil schneidenden Dreiecksseite ist, also $FF'' = AF'' + AF = \frac{1}{2}(a+b-c) + \frac{1}{2}(b+c-a) = b$. Mithin $FF'' = DD'' = b$; $EE' = FF' = a$; $DD''' = EE''' = c$.

2) daß der von zwei äußeren Berührungspunkten, von denen der eine in einer Dreiecksseite, der andere in deren Verlängerung liegt, begrenzte Teil einer Seite gleich der die Verlängerung dieses Teiles schneidenden Dreiecksseite ist, also $F''F''' = AF'' + AF''' = \frac{1}{2}(a+b-c) + \frac{1}{2}(a+c-b) = a$. Mithin $F''F''' = E''E''' = a$; $D'D''' = F'F''' = b$; $E'E'' = D'D'' = c$.

Daher ist auch $SE = SE''' = WE' = WE'' = \frac{1}{2}c$.

In den folgenden Aufgaben ist die Grundlinie c gegeben und außerdem

1. ρ, γ
2. r, ρ
3. ρ_c, γ
4. r, ρ_c
5. $a, \rho_c - \rho$
6. $a, \rho_a + \rho_b$
7. $t_c, \rho_a + \rho_b$
8. $t_c, \rho_c - \rho$
9. ρ_a, α
10. ρ_b, α
11. ρ_c, α
12. $\rho, \alpha - \beta$ (§. 29 u. §. 142, 5)
13. $\rho_c, \alpha - \beta$ (§. 29)
14. $\rho_c - \rho, \alpha - \beta$
15. $\rho_c - \rho, \alpha$
16. $\rho_a + \rho_b, h_a$
17. $\rho_a + \rho_b, h_c$
18. $\rho_a + \rho_b, \alpha$
19. $\rho_c - \rho, h_a$
20. $\rho_c - \rho, h_c$
21. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$
22. $\rho_a - \rho_b, \gamma$
23. ρ, ρ_c
24. ρ_a, ρ_b
25. $\rho, \rho_a + \rho_b$
26. $\rho_c, \rho_a + \rho_b$
27. $\rho_c + \rho, \gamma$
28. $\rho_c + \rho, r$
29. $\rho_c + \rho, \alpha - \beta$
30. ρ_a, γ
31. r, ρ_a

§. 44. (s. auch Anh. IV, S. 204.)

Wenn die Summe zweier Seiten gegeben, z. B. $a + b$, so beachte man, daß $F'F'' = FF'' + FF' = b + a$ ist. Ebenso $E'E''' = a + c$; $D''D''' = b + c$.

Ferner ist durch das Lot SG, welches von der Mitte G der Linie mm''' auf EE''' gefällt ist, auch EE''' in S halbiert, mithin $SC = CE''' - SE''' = AW = \frac{1}{2}(a + b + c) - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + b)$.

In den Aufgaben 22 und 23 verlängere wie in §. 15, c, da α gegeben, AC um BC über C hinaus bis Z, verbinde B mit Z und mit dem Mittelpunkt m des Kreises, dessen Radius gegeben. Man kennt dann von dem $\triangle$ mZB die Seite mZ und kann den gegenüberliegenden Winkel mBZ durch α ausdrücken, so daß ein Ort für den Punkt B bekannt ist; ein zweiter ist die Richtung von BA. Auch die Aufgaben 2 und 3 können so gelöst werden.

In den folgenden Aufgaben ist $a + b$ gegeben und außerdem:

1. ρ_a, ρ_b
2. ρ_a, β
3. ρ_a, α
4. ρ_c, γ
5. ρ, γ
6. c, ρ_c
7. c, ρ_a
8. c, ρ
9. ρ, ρ_c
10. $\rho_c + \rho, h_c - \rho$
11. $\rho_c + \rho, h_a$
12. $\rho_c + \rho, \alpha$
13. $\rho_c + \rho, \alpha - \beta$
14. $c, \rho_c + \rho$
15. $\rho_a + \rho_b, \gamma$
16. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$
17. $\rho_a - \rho_b, \gamma$
18. $\rho_c - \rho, \gamma$
19. $c, \rho_c - \rho$
20. $\rho_c - \rho, r$
21. $\rho_c - \rho, \rho_a + \rho_b$
22. ρ, α
23. ρ_c, α
24. $c, \rho_a - \rho_b$
25. $\rho_a, \alpha - \beta$

In den folgenden Aufgaben sind die Dreiecke CSG und CE'm' zu konstruieren; ferner ist GSAL ein Sehnenviereck, also $\angle GSL = GAL = \frac{1}{2}\gamma$, daher $SL \perp CG$. Trägt man dann von E' aus $\frac{1}{2}(a + b)$ auf E'S bis X ab, so ist $m'X = m'L$.

26. ρ_a, γ (§. 142, 18)
27. $a - b + c, \gamma$
28. $\rho_c + \rho, \rho_a$
29. $a - b + c, \rho_a$
30. $a - b + c, \rho_c + \rho$
31. s. Anh. IV, S. 204.

§. 45. (ſ. auch Anh. IV, S. 204.)

Wenn die Differenz zweier Seiten z. B. $a - b$ gegeben iſt, ſo iſt zu beachten, daß $FF''' = F'''F''' - F'''F = a - b$ iſt. Ebenſo iſt $EE'' = c - a$; $DD' = c - b$.

Fällt man von H auf CE' das Lot HW, ſo iſt $CW = \frac{1}{2}(a + b) - b = \frac{1}{2}(a - b)$ und $HW = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho_b)$; ebenſo läßt ſich zeigen, daß $AS = \frac{1}{2}(a - b)$. In den Aufgaben 6, 43, 44 iſt zu beachten, daß $OL = \frac{1}{2}(u - v)$ iſt.

In den Aufgaben 30 und 31 iſt, wie in §. 16, c, da α gegeben, AC über A bis Y zu verlängern, ſo daß $CY = CB$, und dann ähnlich wie in den entſprechenden Aufgaben des §. 44 zu verfahren. Auch die Aufgaben 8, 9, 10, 11 können ſo gelöſt werden.

In den folgenden Aufgaben iſt $a - b$ gegeben und außerdem:

1. ρ, ρ_c	9. ρ, β	17. $\rho_c + \rho$, α	25. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
2. ρ, $\alpha - \beta$	10. ρ_c, α	18. $\rho_c + \rho$, γ	26. $\rho_a - \rho_b$, $p - q$
3. ρ_c, $\alpha - \beta$	11. ρ_c, β	19. $\rho_c + \rho$, r	27. ρ_a, ρ_b
4. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$	12. c, ρ	20. $\rho_c + \rho$, $h_c - \rho$	28. ρ, h_a
5. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$	13. c, ρ_c	21. $\rho_c - \rho$, γ	29. ρ, h_b
6. $\rho_c - \rho$, $u - v$	14. c, $\rho_c - \rho$	22. $\rho_c - \rho$, r	30. ρ_a, α
7. r, $\alpha - \beta$	15. c, $\rho_a - \rho_b$	23. $\rho_a + \rho_b$, γ	31. ρ_b, α
8. ρ, α	16. c, $\rho_c + \rho$	24. $\rho_a + \rho_b$, r	32. c, $\rho_a + \rho_b$

In den Aufgaben 33 bis 42 iſt Dreieck CWH und entweder CEm oder CE'''m''' zu konſtruieren; ferner iſt WHLA ein Sehnenviereck, alſo $\angle AWL = AHL = \frac{1}{2}\gamma$, mithin $WL \parallel CG$. Trägt man dann von E reſp. E''' aus $\frac{1}{2}(a - b)$ auf E'''W bis X reſp. X' ab, ſo iſt $mX = mL$ und $m'''X' = m'''L$.

33. ρ, γ (§. 142, 15)	37. $\rho_a - \rho_b$, ρ	41. $a + b + c$, $\rho_a - \rho_b$
34. ρ_c, γ	38. $\rho_a - \rho_b$, ρ_c	42. $a + b - c$, $\rho_a - \rho_b$
35. $a + b + c$, γ	39. $a + b + c$, ρ_c	43. $u - v$, ρ
36. $a + b - c$, γ	40. $a + b - c$, ρ	44. $u - v$, ρ_c
		45. ſ. Anh. IV, S. 204.

§. 46 (ſ. auch Anh. IV, S. 204.)

In den folgenden Aufgaben ſind einzelne Radien, ſo wie Seiten oder Winkel halbierende Transverſalen, oder Höhen gegeben. Man beachte §. 40, ferner daß $PL = \frac{1}{2}(p - q)$ und $OL = \frac{1}{2}(u - v)$. In den Aufgaben 90 bis 95 iſt das am Schluß der §§. 44 und 45 Geſagte zu beachten.

1. ρ_c, α, γ
2. $\rho_c + \rho$, α, β
3. $\rho_c - \rho$, α, β
4. $\rho_a + \rho_b$, α, β
5. $\rho_a - \rho_b$, α, β
6. $h_c + \rho_c$, α, β
7. $h_c - \rho$, α, β
8. ρ, ρ_c, γ
9. ρ, ρ_a, γ
10. ρ_a, ρ_c, γ
11. ρ, $\rho_a + \rho_b$, γ
12. ρ, ρ_c, $\alpha - \beta$
13. ρ_c, $\rho_a + \rho_b$, γ
14. ρ_a, ρ_b, γ
15. ρ_c, h_c, γ
16. ρ_c, h_a, γ
17. h_c, ρ_c, $\alpha - \beta$
18. h_c, ρ_c, α
19. h_a, ρ_a, γ
20. h_c, ρ_a, $\alpha - \beta$
21. h_c, ρ_b, a
22. h_c, ρ_a, β
23. h_c, $\rho_a + \rho_b$, γ
24. h_c, $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
25. h_a, $\rho_c - \rho$, β
26. h_a, $\rho_a + \rho_b$, β
27. h_a, $\rho_a - \rho_b$, γ
28. h_c, $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
29. h_c, $\rho_c - \rho$, γ
30. ρ_c, w_c, γ
31. ρ, w_c, $\alpha - \beta$
32. h_c, w_c, ρ
33. w_c, ρ_c, $\alpha - \beta$
34. h_c, w_c, ρ_c
35. w_c, ρ_a, $\alpha - \beta$
36. w_c, $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
37. w_c, ρ_a, γ (§. 142, 19)
38. w_c, $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
39. w_c, $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$
40. r, $\rho_c - \rho$, α
41. r, $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
42. r, $\rho_c - \rho$, h_c
43. r, $\rho_c - \rho$, h_a
44. r, $\rho_a + \rho_b$, α
45. r, $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
46. r, $\rho_a + \rho_b$, h_c
47. r, $\rho_a + \rho_b$, h_a
48. r, ρ, $\rho_a + \rho_b$
49. r, ρ_a, ρ_b
50. r, ρ, ρ_c
51. r, $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$
52. r, $\rho_a - \rho_b$, γ
53. r, $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
54. r, $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
55. r, $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$
56. a, b, $\rho_c + \rho$
57. a, b, $\rho_a - \rho_b$
58. ρ, ρ_c, $\rho_a + \rho_b$
59. h_c, $\rho_c - \rho$, $\rho_a + \rho_b$
60. t_c, $\rho_c - \rho$, $\rho_a + \rho_b$
61. p — q, $\rho_a + \rho_b$, γ
62. p — q, $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$
63. p — q, $\rho_a - \rho_b$, γ
64. p — q, $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$
65. p — q, $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$
66. p — q, $h_c + \rho_c$, $\alpha - \beta$
67. p, q, $\rho_c - \rho$
68. p, q, $\rho_a + \rho_b$
69. p — q, r, $\rho_c - \rho$
70. p — q, r, $\rho_a + \rho_b$
71. p — q, r, $\rho_a - \rho_b$
72. p — q, r, $\rho_c + \rho$
73. p — q, r, $h_c - \rho$
74. p — q, r, $h_c + \rho_c$
75. p — q, $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$
76. u, v, $\rho_a + \rho_b$
77. u — v, r, $\rho_c - \rho$
78. u — v, h_c, $\rho_c - \rho$
79. u — v, p — q, $\rho_c - \rho$
80. h_c, w_c, $\rho_c - \rho$
81. u, v, $\rho_c - \rho$
82. u — v, w_c, $\rho_c - \rho$
83. u — v, ρ, ρ_c
84. u — v, $\rho_c - \rho$, $\rho_a + \rho_b$
85. u — v, p — q, $\alpha - \beta$ (§. 50, 3)
86. u — v, h_c, $\alpha - \beta$
87. u — v, w_c, $\alpha - \beta$
88. u — v, h_c, w_c
89. ρ_a, ρ_b, $\alpha - \beta$
90. $\rho_c + \rho$, ρ_a, γ (§. 142, 24)
91. a — b + c, $\rho_c + \rho$, γ
92. $\rho_a - \rho_b$, ρ, γ (§. 142, 22)
93. $\rho_a - \rho_b$, ρ_c, γ (§. 142, 23)
94. a + b + c, $\rho_a - \rho_b$, γ (§. 142, 16)
95. a + b — c, $\rho_a - \rho_b$, γ (§. 142, 17)
96. u — v, p — q, $\rho_a + \rho_b$
97. u — v, $\rho_a + \rho_b$, h_c
98. u — v, $\rho_a + \rho_b$, t_c
99. u — v, $\rho_a + \rho_b$, w_c
100. u — v, $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$

101—107 s. Anh. IV, S. 204.

§. 46a.

Konstruktion des Dreiecks aus besonderen Punkten.

Im folgenden sind die Fußpunkte von w_a, w_b, w_c resp. mit O', O'', O''' bezeichnet; der Durchschnittspunkt der Höhen mit X, der Schwerpunkt mit Z und die Mitte der Seite AB mit L. Alle übrigen Bezeichnungen wie in Fig. 4.

1. m', m'', m''' 3. M, m, m''' 5. C, M, m 7. C, M, m'
2. m, m', m'' 4. M, m' m'' 6. C, M, m''' 8. C, O''', L

Anmerkung. Ähnliche Aufgaben siehe §. 64a und §. 139, 55 und 56.

§. 47.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks die Grundlinie = c und die Differenz der Quadrate der beiden Seiten $a^2 - b^2 = d^2$ gegeben, so ist bei der Auflösung folgender Weg einzuschlagen:

Errichte auf AB = c in A ein Lot AE = d, halbiere EB in F, errichte auf EB in F ein Lot, welches AB in D trifft, und auf AB in D ein Lot, so kann jeder Punkt desselben als Spitze des Dreiecks angesehen werden, z. B. C. Beweis. $BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2$; BD = DE, da $\triangle$ BDF $\cong$ EDF, mithin $BC^2 - AC^2 = DE^2 - AD^2 = AE^2 = d^2$.

a) In den folgenden Aufgaben ist $a^2 - b^2$ gegeben und außerdem:

1. c, t_c 3. c, α 5. c, t_a 7. c, h_a 9. c, $\alpha - \beta$
2. c, h_c 4. c, r 6. r, γ 8. c, γ

b) Wenn man berücksichtigt, daß a und b Seiten eines Dreiecks sind, dessen Grundlinie gleich der Differenz resp. Summe der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Segmente ist (siehe §. 14), so erhält man neue Aufgaben, wenn man in den vorhergehenden p − q resp. p + q für c setzt; gleichzeitig muß jedoch $\alpha - \beta$ für γ gesetzt werden.

10. p − q, t_c 13. p − q, h_a 16. p − q, t_a
11. p − q, h_c 14. p − q, $\alpha - \beta$ 17. p − q, r
12. p − q, α 15. p − q, γ

c) Da $a^2 - b^2$, c, p und q abhängige Stücke sind, so daß durch zwei derselben die anderen mitgegeben, so sind die Aufgaben, in denen p oder q statt c gegeben, auf ähnliche Weise zu lösen.

18. p, t_c 22. p, h_a 26. p, γ 30. p, t_a
19. q, t_c 23. q, h_a 27. q, γ 31. q, t_a
20. p, h_c 24. p, α 28. p, r 32. p, $\alpha - \beta$
21. q, h_c 25. q, α 29. q, r 33. q, $\alpha - \beta$

d) Da a und b auch Seiten eines Dreiecks sind, welches man erhält, wenn man die nach der Mitte der Grundlinie gezogene Transversale (Mittellinie) um sich selbst verlängert (siehe §. 19), so sind noch folgende Aufgaben auf die oben angegebene Art lösbar:

34. t_c, h_a 36. t_c, h_b 38. t_c, h_c
35. t_a, t_c 37. t_b, t_c 39. t_c, $\angle(at_c)$

§. 48.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks die Grundlinie = c und die Summe der Quadrate der beiden Seiten $a^2 + b^2 = s^2$ gegeben, so gelangt man durch folgende Konstruktion zur Lösung:

Verlängere AB = c über A hinaus um $\frac{1}{2}s$ bis D, errichte auf AD in D ein Lot DE = $\frac{1}{2}s$, verbinde E mit A, schlage mit EA um A einen Kreisbogen, welcher ein in der Mitte G von AB errichtetes Lot in F trifft, und schlage mit GF um G einen Kreis, so kann jeder Punkt desselben als Spitze des Dreiecks angesehen werden, z. B. C. Beweis. Nach einem bekannten Satz ist, da CG Mittellinie von AB: $AC^2 + BC^2 = 2AG^2 + 2CG^2$. Da CG = FG, so ist $AC^2 + BC^2 = 2(AG^2 + FG^2) = 2AF^2 = 2AE^2 = 2(AD^2 + DE^2) = 2(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^2) = s^2$.

Anmerkung. Da, wenn c und $a^2 + b^2$ gegeben, auch t_c = CG = GF bekannt ist, so sind diese drei Stücke von einander abhängig.

a) In den folgenden Aufgaben ist $a^2 + b^2$ gegeben und außerdem:

1. c, h_c	5. c, h_a	9. t_c, r	13. c, $\angle(at_c)$	17. c, $\angle(at_a)$ (§. 52)
2. t_c, h_c	6. t_c, h_a	10. r, γ	14. t_c, $\angle(at_c)$	18. c, p − q
3. c, α	7. p, q	11. c, γ	15. c, t_a (§. 52)	19. t_c, p − q
4. t_c, α	8. c, r	12. t_c, γ	16. t_a, t_c (§. 52)	

b) Da a und b auch Seiten des Dreiecks sind, dessen Grundlinie die Differenz, resp. Summe der durch die Höhe auf der Grundlinie gebildeten Segmente ist (siehe §. 14), so lassen sich noch folgende Aufgaben auf ähnliche Weise lösen:

20. a^2+b^2, p—q, h_c 21. a^2+b^2, p—q, $\alpha-\beta$ 22. a^2+b^2, p—q, α.

§. 48a. (s. Anh. IV, S. 204.)

B. Aufgaben, welche mit Benutzung der Sätze von den Verhältnissen zu lösen sind.

§. 49.

Einfache Aufgaben.

a) Wenn das Verhältnis zweier Dreiecksseiten gegeben ist und die eine von ihnen, so ist auch die andere bekannt. Ebenso sind die Seiten bekannt, wenn ihre Summe oder Differenz und ihr Verhältnis gegeben ist.

1. a, c, a:b
2. c, a:c, b:c
3. c, γ, a:c
4. c, α, a:c
5. a, a:b:c
6. c, a+b, a:b
7. c, a−b, a:b
8. a+b, a:b:c
9. a−b, a:b:c
10. a+b+c, a:b:c
11. a+c, b+c, a:b
12. a+c, b−c, a:b
13. a−c, b−c, a:b
14. a+b, a−c, a:b
15. c, a:c, a:b
16. a, h_c, a:b
17. h_c, a:h_c, b:h_c

b) Da sich in jedem Dreieck zwei Seiten umgekehrt wie die auf sie gefällten Höhen verhalten, so ist durch das Verhältnis der Seiten auch das der Höhen und umgekehrt gegeben.

18. h_a, t_b, a:b
19. h_a, t_c, a:b
20. h_a, α, a:b
21. h_a, γ, a:b
22. h_a, h_b, α−β
23. c, h_a:h_c, γ
24. a, h_c, h_a:h_b
25. a+b, h_c, h_a:h_b
26. a−b, h_c, h_a:h_b
27. a+c, b+c, h_a:h_b
28. a, h_a:h_c, h_b:h_c

Auch folgende bereits in §. 30 und 31 aufgeführte Aufgaben lassen sich von dem oben angegebenen Gesichtspunkt aus lösen:

29. a, b, $h_a + h_b$ (§. 30, 2)
30. a + b, h_a, h_b (§. 30, 4)
31. a, b, $h_b - h_a$ (§. 31, 3)
32. a−b, h_a, h_b (§. 31, 5)

§. 50.

a) In jedem Dreieck ist $h_c^2 = a^2 - p^2$ und $h_c^2 = b^2 - q^2$; mithin $a^2 - p^2 = b^2 - q^2$ oder $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ oder $(a+b)(a-b) = (p+q)(p-q)$ und hieraus $a+b : p+q = p-q : a-b$. Mit Benutzung dieser Proportion sind folgende Aufgaben lösbar:

1. p, q, a + b
2. p, q, a − b

b) Es verhält sich $u:v = a:b$, also $u+v:u-v = a+b:a-b$. Nach a) verhält sich: $p+q:a-b = a+b:p-q$. Beide Proportionen dividiert: $\frac{(u+v)(a-b)}{(p+q)(u-v)} = \frac{(a+b)(p-q)}{(a+b)(a-b)}$. Oder da, wenn $\alpha < R$, $u+v = p+q$, und wenn $\alpha > R$, $u+v = p-q$ ist, so ist

im ersten Fall $u-v : a-b = a-b : p-q$
im zweiten Fall $u-v : a-b = a-b : p+q$

Mithin sind u − v, a − b, und p − q abhängige Stücke.

3. u−v, p − q, α−β (§. 18, 10; §. 46, 85).
4. u, v, a + b

§. 51.

In den folgenden Aufgaben ist unter t die Transversale zu verstehen, welche von C nach AB gezogen, letztere im Verhältnis m:n teilt

1. c, γ, t
2. c, h_c, t
3. a:b, γ, t

4. a, b und die Transversale t, welche c im Verhältnis m:n teilt. Anal. CD = t, so daß BD:AD = m:n. Ziehe AE ∥ BC bis zum Durchschnitt mit CD, so ist △ BCD ∽ ADE, mithin a:AE = m:n und t:DE = m:n, wodurch AE und DE zu bestimmen.

5. t_a, t_b und die Transversale t, welche c im Verhältnis 1:2 teilt. Anal. $AD = t_a$, $BE = t_b$, beide schneiden sich in S; $CF = t$ und $BF:AF = 1:2$; ziehe EG und $SH \parallel CF$, so ist $BG:AG = 2:1$ und $BH:AH = 4:5$, mithin $\triangle ASB$ nach 4 zu konstruieren.

6. c, Transversale t, welche a im Verhältnis m:n, und Transversale t', welche b im Verhältnis m':n' teilt. Anal. $t = AD$, so daß $BD:CD = m:n$; $t' = BE$, so daß $AE:CE = m':n'$. Ziehe durch C eine Parallele zu AB, welche AD verlängert in F, und BE verlängert in G trifft. Dann ist $\triangle ABD \sim CDF$, also $t:DF = m:n$ und $c:CF = m:n$, wodurch DF und CF bestimmt. Auf der anderen Seite ebenso. Daher kann das Trapez ABFG aus den beiden parallelen Seiten und den beiden Diagonalen gezeichnet werden.

§. 51a.

Dreiecksaufgaben, in denen die Summe resp. Differenz zweier Seiten und die nach der Mitte der einen von ihnen gezogene Transversale (Mittellinie) oder durch die Richtung derselben bedingte Winkel gegeben sind.

a) Zur Analysis der folgenden Aufgaben ist BC über C um AC bis D zu verlängern, oder AC auf CB von C aus bis D' abzutragen; E sei die Mitte von AC; zieht man nun durch B eine Parallele zu AC, welche DE in F und ED' in F' trifft, so ist $BF = \frac{1}{2}(a+b)$ und $BF' = \frac{1}{2}(a-b)$.

1. $a+b$, t_b, γ 4. $a-b$, h_a, t_b 7. $a+b$, h_a, $\angle(at_b)$
2. $a-b$, t_b, γ 5. $a+b$, t_b, $\angle(at_b)$ 8. $a-b$, h_a, $\angle(at_b)$
3. $a+b$, h_a, t_b 6. $a-b$, t_b, $\angle(at_b)$

b) Zur Analysis der folgenden Aufgaben, in denen $AD = t_a$, und $AE = h_a$ ist, ist BC über C um $\frac{1}{2}AC$ bis G zu verlängern, oder $\frac{1}{2}AC$ auf CB von C bis G' abzutragen; zieht man durch D eine Parallele zu AC, welche GA in H und AG' in H' trifft, so ist $DH = a+b$, da $DG = \frac{1}{2}(a+b)$, und $DH' = a-b$, da $DG' = \frac{1}{2}(a-b)$ ist.

9. $a+b$, t_a, h_a 11. $a+b$, t_a, $\angle(at_a)$ 13. $a+b$, h_a, $\angle(at_a)$
10. $a-b$, t_a, h_a 12. $a-b$, t_a, $\angle(at_a)$ 14. $a-b$, h_a, $\angle(at_a)$

§. 52.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks zwei oder alle drei von den Ecken nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogene Transversalen (Mittellinien) gegeben sind, so beachte man, daß die Verbindungslinie der Fußpunkte je zweier Transversalen der dritten Seite parallel ist und daß sich alle drei Transversalen in einem Punkte schneiden und durch diesen Punkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden.

In den Aufgaben 36 bis 115 sind zur Konstruktion Parallelen zu ziehen.

1. Gleichschkl. $\triangle h_c, t_a$
2. c, t_a, t_c
3. c, t_a, t_b
4. $c, \angle(ct_a), \angle(ct_b)$
5. $c, t_a, \angle(ct_a)$
6. $c, t_a, \angle(ct_b)$
7. $c, t_a, \angle(ct_c)$
8. $c, t_c, \angle(t_at_c)$
9. $c, t_a, \angle(t_at_b)$
10. $c, t_a, \angle(t_at_c)$
11. $c, \angle(ct_a), \angle(t_at_b)$
12. $c, \angle(ct_a), \angle(t_at_c)$
13. $t_a, t_c, \angle(ct_a)$
14. $t_a, t_b, \angle(ct_a)$
15. $t_a, t_c, \angle(ct_c)$
16. $t_a, t_b, \angle(t_at_b)$
17. $c, t_a+t_b, \angle(ct_a)$
18. $c, t_a-t_b, \angle(ct_a)$
19. $c, t_a+t_b, \angle(t_at_b)$
20. $c, t_a-t_b, \angle(t_at_b)$
21. t_a, t_c, h_c
22. $t_c, h_c, \angle(ct_a)$
23. $h_c, \angle(ct_c), \angle(ct_a)$
24. $t_c, \angle(ct_c), \angle(ct_a)$
25. $t_a, h_c, \angle(ct_c)$
26. $t_c, \angle(at_c), \angle(t_at_c)$
27. $t_c, \angle(at_c), \angle(t_bt_c)$
28. t_a, t_c, γ
29. $c, \angle(ct_c), \angle(t_at_b)$
30. $c, \angle(t_at_c), \angle t_bt_c)$
31. $t_c, \angle(ct_c), \angle(at_b)$
32. $t_c, \alpha, \angle(t_at_c)$
33. $t_c, \angle(bt_a), \angle(ct_a)$
34. $t_c, h_c, \angle(at_b)$
35. $h_c, \angle(ct_c), \angle(at_b)$
36. t_a, t_b, h_c
37. $t_a, h_c, \angle(ct_b)$
38. $c, h_c, \angle(t_at_b)$
39. $c, h_c, \angle(t_at_c)$
40. $a, b, \angle(ct_c)$
41. $a, b, \angle(t_at_b)$
42. t_a, t_b, t_c
43. $t_a, t_c, \angle(t_bt_c)$
44. $t_c, \angle(t_at_c), \angle(t_bt_c)$
45. $t_c, t_a+t_b, \angle(t_at_b)$
46. $t_c, t_a-t_b, \angle(t_at_b)$
47. $t_a, t_b, \angle(at_c)$
48. $t_a, t_b, \angle(ct_c)$
49. t_a, t_b, γ
50. $c, \alpha, \angle(at_a)$
51. $c, \alpha, \angle(t_at_b)$
52. $c, \alpha, \angle(t_at_c)$
53. $c, t_c, \angle(t_at_b)$
54. $c, t_c, \angle(at_a)$
55. $c, t_c, \angle(bt_a)$
56. $c, t_a, \angle(at_c)$
57. $c, t_a, \angle(t_bt_c)$
58. $c, t_a, \angle(at_b)$
59. $c, t_a, \angle(bt_b)$
60. $c, t_a, \angle(bt_c)$
61. $a, c, \angle(t_at_b)$
62. $c, \angle(ct_a), \angle(t_bt_c)$
63. $c, \angle(ct_a), \angle(bt_b)$
64. $c, \angle(ct_a), \angle(at_b)$
65. $c, \angle(ct_a), \angle(at_c)$
66. $c, \angle(ct_a), \angle(bt_c)$
67. $c, \angle(ct_c), \angle(at_a)$
68. $c, \angle(ct_c), \angle(bt_a)$
69. $c, \angle(at_a), \angle(bt_a)$
70. $c, \angle(at_a), \angle(bt_b)$
71. $c, \angle(at_a), \angle(at_b)$
72. $c, \angle(t_at_b), \angle(at_c)$
73. $c, \gamma, \angle(at_a)$
74. $c, \gamma, \angle(t_at_b)$
75. $c, \gamma, \angle(ct_a)$
76. $c, \gamma, \angle(at_b)$
77. $c, \gamma, \angle(t_at_c)$
78. $c, \angle(t_at_c), \angle(at_c)$
79. $c, \angle(t_at_c), \angle(bt_b)$
80. $c, \angle(bt_a), \angle(bt_c)$
81. $c, \angle(t_at_c), \angle(at_b)$
82. $c, \angle(at_a), \angle(bt_c)$
83. $c, \angle(at_b), \angle(bt_a)$
84. $c, \angle(bt_a), \angle(at_c)$
85. $t_c, \angle(at_c), \angle(bt_a)$
86. $t_c, \angle(at_c), \angle(bt_b)$
87. $t_c, \angle(at_c), \angle(ct_a)$
88. $t_c, \angle(at_c), \angle(ct_b)$
89. $t_c, \angle(at_c), \angle(t_at_b)$
90. $t_c, \angle(ct_c), \angle(at_a)$
91. $t_c, \angle(ct_c), \angle(t_at_b)$
92. $t_c, \gamma, \angle(t_at_c)$
93. $t_c, \angle(t_at_c), \angle(at_b)$
94. $t_c, \angle(t_at_c), \angle(bt_b)$
95. $t_c, \angle(t_at_c), \angle(ct_b)$
96. $t_c, \alpha, \angle(at_b)$
97. $t_c, \alpha, \angle(at_a)$
98. $t_c, \alpha, \angle(bt_b)$
99. $t_c, \alpha, \angle(ct_b)$
100. $t_c, \alpha, \angle(t_at_b)$
101. $t_c, \gamma, \angle(at_a)$
102. $t_c, \gamma, \angle(ct_a)$
103. $t_c, \gamma, \angle(t_at_b)$
104. $t_c, \angle(at_b), \angle(bt_a)$
105. $t_c, \angle(at_b), \angle(at_a)$
106. $t_c, \angle(at_b), \angle(ct_a)$
107. $t_c, \angle(at_a), \angle(t_at_b)$
108. $t_c, \angle(at_a), \angle(bt_b)$
109. $t_c, \angle(at_a), \angle(ct_b)$
110. $t_c, \angle(ct_a), \angle(ct_b)$
111. $t_c, h_c, \angle(at_a)$
112. $h_c, \angle(ct_c), \angle(at_a)$
113. $t_c, h_c, \angle(t_at_b)$
114. $h_c, \angle(ct_c), \angle(t_at_b)$
115. $t_c, h_a, \angle(ct_a)$

§. 53.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn beliebige Transversalen gegeben sind.

1. h_a, h_b, h_c. 1. Anal. Trage h_a auf AC von C aus ab $= CG$, und h_b auf CB von C aus $= CH$; dann ist $AC : BC = h_a : h_b = CG : CH$; mithin $GH \parallel AB$. Also $b : c = h_c : h_b = h_a : GH$; folglich GH und auch $\triangle GHC$ zu konstruieren. 2. Aufl. Zeichne einen beliebigen Winkel H und schneide auf dem einen Schenkel desselben $HI = h_a$ und $IK = h_b$ ab, auf dem andern $HL = h_c$, ziehe $KM \parallel IL$, und bezeichne LM mit x. Dann zeichne einen rechten Winkel B, mache den einen Schenkel $BG = h_c$, schlage von G aus mit x und von B aus mit h_b Kreisbogen, die sich in E treffen, errichte auf EB in E ein Lot AC, welches den freien Schenkel des rechten Winkels B in A und eine durch G zu AB gezogene Parallele in C trifft, so ist ABC das verlangte Dreieck. Beweis. Zu beweisen, daß das von A auf BC gefällte Lot $AD = h_a$. BECG ein Sehnenviereck, mithin $\angle BCE = BGE$. Ferner $\angle BEG = BCG = ABC$. Also $\triangle ABC \sim BGE$. Daher $EG : BG = BC : AC$ oder $x : h_c = BC : AC$ oder $x : h_c = BE : AD$ oder $x : h_c = h_b : AD$. Da aber $LM : HL = IK : HI$ oder $x : h_c = h_b : h_a$, so ist $AD = h_a$. 3. Aufl. Man lege h_a, h_b, h_c unter beliebigen Winkeln so hin, daß sie einen Punkt gemeinsam haben und konstruiere den durch die drei freien Endpunkte bestimmten Kreis, so schneidet derselbe von den Schenkeln drei Strecken ab, welche ein dem gesuchten ähnliches Dreieck bestimmen. (Zu vermeiden sind nur die Lagen, bei denen die drei freien Endpunkte in gerader Linie liegen und der durch die drei freien Endpunkte bestimmte Kreis durch den gemeinsamen Punkt geht.) 4. Aufl. Zeichne ein Dreieck DEF, dessen drei Seiten die Höhe $h_a = EF$, $h_b = DF$, $h_c = DE$ sind; in diesem falle die drei Höhen $DG = a$, $EH = b$, und $FI = c$. Dann zeichne aus den drei Höhen ein neues Dreieck KLC, so daß $CL = a$, $CK = b$, $KL = c$ ist; fälle die Höhe CM und verlängere sie bis N, so daß $NC = h_c$, ziehe durch N eine Parallele AB zu KL, so ist ABC das verlangte Dreieck. Beweis. Fällt man im Dreieck ABC die Höhen AO und BP, so verhält sich $AB : BC = AO : CN$, ferner $AB : BC = c : a$; mithin $AO : h_c = c : a$ (1). Im $\triangle DEF$ verhält sich $h_a : h_c = c : a$ (2). Aus (1) und (2) : $AO = h_a$. (Diese Auflösung ist nur dann möglich, wenn sich aus den drei Höhen wirklich ein Dreieck konstruieren läßt, was nicht immer der Fall zu sein braucht).

2. h_a, h_b, w_c. Anal. $w_c = CD$; $DE \perp AC$. Dann ist $b : a = h_a : h_b$ und $b : a = AD : BD$; mithin $h_a : h_b = AD : BD$, also $h_a + h_b : h_a = AB : AD = h_b : DE$; daher DE zu finden.

3. a, b, w_c. 1. Anal. $CD = w_c$; verlängere AC um BC bis E, so ist $b : a + b = w_c : EB$, daher EB zu finden. 2. Anal. $w_c = CD$; ziehe $AE \parallel BC$ bis zum Durchschnitt mit CD, so ist $AE = b$. Ferner $\triangle ADE \sim BCD$, daher $a : b = w_c : DE$; hierdurch ist DE zu bestimmen. 3. Anal. $w_c = CD$; verlängere CD bis es den umgeschriebenen Kreis in E trifft, so ist $\triangle ACD \sim ECB$, daher $b : w_c = CE : a$; hieraus CE zu bestimmen. Ferner ist noch $\triangle DBE \sim BCE$, daher $DE : EB = EB : EC$, woraus EB zu bestimmen.

4. c, γ, w_c. Anal. $CD = w_c$; durch c und γ ist der umgeschriebene Kreis gegeben; CD trifft denselben in E; BE bekannt. $\triangle BDE \sim CBE$, also $CE : BE = BE : DE$, woraus DE zu bestimmen. Schlage daher über w_c als Durchmesser einen Kreis, lege an denselben eine Tangente $= EB$, und ziehe von dem Endpunkte derselben eine Sekante durch den Mittelpunkt, so ist das außerhalb des Kreises liegende Stück derselben $= ED$ (§. 139, 49 u. Anh. II, 127).

5. c, r, w_c 6. γ, r, w_c

Für die Aufgaben 7 bis 10 ist zur Analysis folgende Konstruktion zu machen: Kreis um $\triangle ABC$, G die Mitte von $\overset{\frown}{AB}$, F die von AB, GF trifft verlängert den Kreis in H und eine Parallele durch C zu AB in L; GE und $HW \perp AC$, GD und $HK \perp BC$. Dann ist $CD = CE = AW = BK = \frac{1}{2}(a + b)$ und $CW = CK = BD = AE = \frac{1}{2}(a - b)$. Ferner $\angle AFE = AGE$ (AFGE Sehnenviereck) $= BGD = BFD$, also EFD eine gerade Linie; und $\angle HFK = HBK = HAW = HFW$, also FKW eine gerade Linie. $\triangle GFD \sim GDL$ ($\angle GDF = GLD = \frac{1}{2}\gamma$), also $GF \cdot GL = GD^2$; und $\triangle HWL \sim HFW$, also $HF \cdot HL = HW^2$; da nun $GL - GF = HF - HL = h_c$, so sind GL und GF, sowie HF und HL nach §. 139, b, 7. und 8. Auflösung zu konstruieren. Für die Aufgaben 9 und 10 ist zu beachten, daß $\angle WAH = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. 2. Anal. für 7 und 8. Schlage mit CA um C einen Kreis, welcher AB in E, CB in F und deren Verlängerung in G trifft; $AH \perp AB$ bis zum Durchschnitt mit dem Kreise, so ist $AH = 2h_c$; HG und HF treffen AB resp. in L und K. Dann ist $\angle L = R - GHA = AHF = AGF = \frac{1}{2}\gamma$, also $\triangle LGB \sim GAB$, mithin $(a + b)^2 = c \cdot BL$. Ferner $\angle KFB = HFG = \frac{1}{2}HCG = \frac{1}{2}ECF = EAF = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, mithin $\triangle AFB \sim FBK$, daher $(a - b)^2 = c \cdot KB$.

7. a+b, h_c, γ (II, 217)
8. a−b, h_c, γ (II, 218)
9. a+b, h_c, $\alpha - \beta$ (II, 219)
10. a−b, h_c, $\alpha - \beta$ (II, 220)

11. $a+b$, w_c, γ. 1. Anal. Es sei $CD = w_c$; fälle von D auf BC und AC resp. die Lote DE und DF; trage AF auf CE ab $= EG$; dann ist $\triangle EGD \cong AFD$, mithin $\angle DGE = \alpha$, und also $\angle GDB = \gamma$; daher $\triangle GDB$ zu konstruieren aus $GB = a + b - 2CF$, dem gegenüberliegenden Winkel γ und der Höhe aus demselben DE, welche leicht zu finden. 2. Anal. nach §. 73, 7. 3. Anal. Verlängere BC über B um AC bis F, schlage um ABC einen Kreis, der von der Verlängerung von CD in E getroffen wird, dann ist $\triangle EBF \cong EAC$, also $\angle EFB = ACE = \frac{1}{2}\gamma$; mithin ECF ein gleichschenkliges leicht zu konstruierendes Dreieck. Da $\angle ABE = ACE = \frac{1}{2}\gamma$, so kann man über DE einen Kreis schlagen, welcher $\frac{1}{2}\gamma$ faßt und CF in B schneidet.

12. $a-b$, w_c, γ. 1. Anal. Ähnlich wie 11, Anal. 1; wenn GE auf EB von E bis H abgetragen wird, so ist $\angle BDG$ nach §. 29, 5 zu konstruieren. 2. Anal. nach §. 73, 8.

13. $\triangle$, w_c, $a:b$. 1. Anal. $CD = w_c$; AE und $BF \perp CD$; $GH \parallel AE$ bis zum Durchschnitt mit den Parallelen durch A und B zu CD; BC und HC treffen verlängert GA in I und L. Dann ist $\triangle GHC$ bestimmt; ferner $IA = LG$, und wenn $CK \perp IA$, $AK = \frac{1}{2}LG$. 2. Anal. Nachdem $\triangle GHC$ bestimmt, findet man E und F nach §. 114, 1, a.

14. $a+b=s$, $c+h_c=s'$, γ. Anal. Figur wie 7. CG und DE schneiden sich in R. Auf der Verlängerung von LF über F hinaus werde $AB = FO$ abgetragen, so daß $LO = s'$, dann $OP \perp CG$. Dann ist $\triangle AFG \sim ERG$, $\triangle AGO \sim EGP$, $\triangle AFO \sim ERP$, daher $RP = 2ER = DE$, so daß nach der Konstruktion von CEGD (wie bei 7) P zu finden ist. Nun ist $\triangle OGP \sim CGL$, somit $OG \cdot GL = PG \cdot GC$ und $GO + GL = s'$ (§. 139, a)

15. $a-b$, $c+h_c$, γ. Anal. wie 14, nur wird $OQ \perp CH$ gefällt. Es wird schließlich $HO \cdot HL = HQ \cdot HC$, während $HO - LH = c + h_c$ (§. 139, b).

16. $a+b$, $c-h_c$, γ. Anal. wie 14, nur wird $c = FO'$ auf der Verlängerung von GF über F hinaus abgetragen. $O'P' \perp CG$.

17. $a-b$, $c-h_c$, γ. Anal. wie 16, nur $O'Q' \perp CH$.

18. h_c+p, h_c+q, γ. 1. Anal. $CD = h_c$; Kreise um BDC und ADC; die Halbierungslinien der Winkel CDB und ADC treffen die Kreise resp. in F und L; ferner FE und LH senkrecht AB. Dann ist $DE = EF = \frac{1}{2}(CD + DB)$ (§. 44), und $DH = HL = \frac{1}{2}(CD + AD)$, so daß die Punkte H, D, E, F, L bestimmt sind, und eine auf HE in D errichtete Senkrechte ein Ort für C ist. Ferner $\angle LCF = LCA + ACB + BCF = LDA + \gamma + BDF =$

$R+\gamma$. 2. Anal. CD über D verlängert, DE = DA und DF = DB; CH ⊥ FB und CL ⊥ EA. Dann sind die Punkte C, E, F, L, H bestimmt und CF ein Ort für D. Ferner $\angle LDH = LDC + CDB + BDH$; nun sind LADC und CDBH Sehnenvierecke, also $LDC = LAC = R - LCA$; $\angle BDH = BCH$, mithin $LDH = R - LCA + R + BCH = 2R - (\frac{1}{2}R - ACD) + DCB - \frac{1}{2}R = R + \gamma$.

19. $h_c + p$, $h_c + q$, $\alpha - \beta$. 1. Anal. CD = h_c; AD auf DB abgetragen bis M. Kreise um CDB und CDM; $\angle$ CDB halbiert, die Halbierungslinie treffe die Kreise resp. in F und L. Dann ist $\angle CFD = CBD = \beta$ und $\angle CLD = CMD = \alpha$; mithin $FCL = \alpha - \beta$. Da nun $DE = \frac{1}{2}(h_c + p)$ und $DH = \frac{1}{2}(h_c + q)$, so sind die Punkte D, E, H, F und L bestimmt. Eine Senkrechte auf DE in D ist ein Ort für C; ferner ist von △ LCF die Seite LF und der gegenüberliegende Winkel FCL bekannt. 2. Anal. AD auf DB abgetragen bis M; CD über D verlängert und darauf DE = DA und DF = DB abgetragen. CH senkrecht FB, und treffe EM ∥ FB in L. CDML ein Sehnenviereck, also $\angle CLD = CMD = \alpha$; und auch CDHB ein Sehnenviereck, also $\angle CHD = CBD = \beta$. Mithin $CLD = LHD + LDH$, oder $\alpha = \beta + LDH$, also $LDH = \alpha - \beta$.

§. 53a.

Dreiecks-Aufgaben, in denen eine Relation zwischen den Winkeln besteht.

Wenn in einem Dreieck $\alpha = 2\beta$, so ist $p - q = b$, $p = \frac{1}{2}(b + c)$, $q = \frac{1}{2}(c - b)$, $a - b = v$, $\angle(h_c w_c) = \frac{1}{2}\beta$.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn $\alpha = 2\beta$, aus

1. a, b	4. h_c, t_c	7. u, v	10. b, c	13. b + c, q
2. p, q	5. t_c, p − q	8. a + b, v	11. b + c, a	14. c − b, h_c
3. h_c, p − q,	6. h_c, w_c	9. a − b, c	12. b + c, h_c	15. c − b, p

16. Dreieck aus a und b, wenn $\alpha = 3\beta$. Anal. Ein Kreis um C mit b treffe AB in D, und ein Kreis um D mit b treffe BC in E; dann ist EB = b.

§. 54.

Die unter a bis r verzeichneten Stücke dienen nur dazu, die Gestalt des gesuchten Dreiecks zu bestimmen; um dasselbe vollständig zu zeichnen, muß noch eins der unter 1 bis 20 aufgeführten Stücke hinzugenommen werden, man erhält so $17 \cdot 20 = 340$ verschiedene Aufgaben. Von diesen sind mehrere bereits früher vorgekommen, namentlich diejenigen, in denen α und β, sowie auch die, in denen das Verhältnis a : b, $h_a : h_b$ oder dgl. und außerdem noch $a \pm b$, $h_b \pm h_a$

oder dgl. gegeben. Der Vollständigkeit wegen sind sie alle angeführt; die einfacheren und die bereits früher behandelten können leicht ausgeschieden werden.

Zur Bestimmung der Gestalt des Dreiecks sind folgende Stücke gegeben:

a. α, β	*g.* $c : h_c$, γ (§. 11)	*n.* $\angle(at_c)$, $\angle(bt_c)$ (§. 11)
b. γ, $a : b$	*h.* $p : q$, γ (§. 11)	*o.* $\angle(ct_a)$, $\angle(ct_b)$ (§. 52)
c. $h_a : h_b$, γ	*i.* $a : b$, $\alpha - \beta$ (§. 14)	*p.* $\angle(t_at_c)$, $\angle(t_bt_c)$ (§. 52)
d. $a : b$, α	*k.* $p : q$, $\alpha - \beta$ (§. 14)	*q.* γ, $\angle(at_a)$ (§. 52)
e. $a : b : c$	*l.* $t_a : t_b : t_c$ (§. 52, 42)	*r.* γ, $\angle(t_at_b)$ (§. 52)
f. $h_c : w_c$, γ	*m.* $h_a : h_b : h_c$ (§. 53, 1)	

Zur Bestimmung der Größe des Dreiecks seien folgende Stücke gegeben:

1. c	5. r	9. $a+b$	13. h_b+h_a	17. t_c+h_c
2. h_c	6. ρ	10. $a-b$	14. h_b-h_a	18. t_c-h_c
3. t_c	7. ρ_c	11. $a+b+c$	15. w_c+h_c	19. t_c+w_c
4. w_c	8. $p \mp q$	12. $a+b-c$	16. w_c-h_c	20. t_c-w_c

Eine für alle 340 Aufgaben ausreichende Konstruktion erhält man auf folgende Weise: In dem der Gestalt nach gezeichneten Dreieck konstruiere man das Stück, welches dem zur Bestimmung der Größe des Dreiecks gegebenen Stücke entspricht. Ist z. B. noch r gegeben, so konstruiere r' (wenn die entsprechenden Größen in dem der Gestalt nach gezeichneten Dreieck zur Unterscheidung mit Strichen versehen werden). Dann findet man mittelst der Proportion $r' : r = a' : a$ die Seite a und kann dann leicht das Dreieck zeichnen.

Anmerkung. Teilt man die Linien, welche einen beliebigen Punkt mit den Ecken eines Dreiecks verbinden, in demselben äußeren oder inneren Verhältniß, und verbindet die Teilpunkte, so sind diese Linien parallel den entsprechenden Seiten des Dreiecks und bilden ein dem ursprünglichen ähnliches. Der beliebig gewählte Punkt, der mithin auch in eine Ecke des Dreiecks fallen kann, heißt Ähnlichkeitspunkt. Hat man umgekehrt zwei ähnliche Dreiecke mit parallelen Seiten, so schneiden sich die Linien, welche die homologen Ecken verbinden, in einem Punkte, dem Ähnlichkeitspunkt. Durch geeignete Wahl dieses Punktes kann man das gesuchte Dreieck, wenn es der Gestalt nach konstruiert ist, ohne Anwendung einer Nebenfigur konstruieren. So sind z. B. als Ähnlichkeitspunkte zu wählen für 5, 6, 7 die Mittelpunkte der betreffenden Kreise, für 15 der Fußpunkt der Höhe.

§. 55.

a) In den folgenden Aufgaben läßt sich auch das Dreieck leicht der Gestalt nach zeichnen; durch das dritte Stück wird dann die Größe desselben bestimmt. Zuweilen ist auch durch das Verhältnis zweier Linien nur ein Teil des Dreiecks der Gestalt nach bestimmt, z. B. eins der Dreiecke, welche durch eine Höhe abgeschnitten werden; durch die beiden anderen Stücke wird dann die Größe bestimmt.

1. $c,\ a : h_c,\ \gamma$
2. $c,\ h_c : t_c,\ \alpha$
3. $a,\ h_c : t_c,\ \alpha$
4. $a,\ h_c : t_c,\ \gamma$
5. $a,\ h_c : p,\ \alpha$
6. $h_c,\ b : w_c,\ \gamma$
7. $h_b,\ h_c : p,\ \gamma$
8. $a - c,\ w_c : h_c,\ \gamma$
9. $h_c - h_a,\ \rho : c,\ \alpha - \beta$ (§. 29)
10. $a + b + c,\ c : r,\ h_a : h_b$
11. $r,\ b : h_c,\ \gamma$
12. $a,\ h_c,\ c : r$
13. $h_c,\ c : r,\ \alpha$
14. $a,\ b,\ c : r$
15. $b,\ c : r,\ \alpha$
16. $a,\ c,\ b : h_a$
17. $h_c,\ \angle(at_a),\ \angle(bt_a)$
18. $a,\ c : t_a,\ \angle(ct_a)$
19. $w_c,\ h_c,\ a : h_b$
20. $a + b,\ \gamma,\ \angle(bt_a)$
21. $a,\ \alpha,\ \angle(bt_c)$
22. $a,\ t_a : t_c,\ \gamma$
23. $a,\ t_a : h_c,\ \gamma$
24. $h_c,\ t_a,\ h_a : t_c$
25. $a + b,\ c,\ a : h_c$
26. $a - b,\ c,\ a : h_c$
27. $a + b : c,\ h_a + h_b,\ \alpha - \beta$
28. $a + b : c,\ h_b - h_a,\ \alpha - \beta$
29. $c + h_c,\ a : b,\ \gamma$
30. $c - h_c,\ a : b,\ \gamma$
31. $c + h_c,\ \angle(at_c),\ \angle(bt_c)$
32. $c - h_c,\ \angle(at_c),\ \angle(bt_c)$
33. $R\,\triangle\, a^2 : b^2,\ h$ (§. 114, b)

b) Wenn eine Seite = a und das Verhältnis der Grundlinie zur Höhe $c : h_c$ gegeben ist, so mache zur Analysis folgende Konstruktion: Wenn $CD = h_c$, so konstruiere $\triangle BAE \sim CDB$ und in entsprechender Lage, so ist $\angle CBE = R$, ferner $h_c : c = a : EB$. Dadurch ist E bestimmt und ein Ort für A ist nach §. 10 zu finden.

34. $a,\ c : h_c,\ t_a$
35. $a,\ c : h_c,\ b$
36. $a,\ c : h_c,\ h_a$
37. $a,\ c : h_c,\ r$
38. $a,\ c : h_c,\ h_b$
39. $a,\ c : h_c,\ \triangle$
40. $a,\ c : h_c,\ b : h_b$

§. 56.

In den folgenden Viereckaufgaben sind vier Stücke (Winkel und Verhältnisse) zur Bestimmung der Gestalt des Vierecks und ein Stück zur Bestimmung der Größe desselben gegeben. Man zeichnet zunächst das Viereck der Gestalt nach, verlängert resp. verkürzt die betreffende Seite bis sie die gegebene Größe erreicht und zieht dann Parallelen.

1. c, a : b, α, β, γ
2. a, b : c : d, γ, δ
3. f, a : b : c, ∠(af) ∠(bf)
4. a, b : c : d, α, β
5. a, γ, δ, ∠(de), ∠(bf)
6. a, γ, δ, ∠(ce), ∠(cf)
7. a, ∠(be), ∠(ce), ∠(cf), ∠(af)
8. a, ∠(be), ∠(ce), ∠(cf), ∠(de)
9. a, ∠(be), ∠(de), ∠(cf), ∠(bf)
10. a, e, c : d, γ, δ
11. e, ∠(af), ∠(bf), ∠(cf), ∠(df)
12. e, α, β, γ, ∠(af)
13. a, c : d : e : f, β
14. a, γ, δ, ∠(af), ∠(de)
15. b, α, γ, ∠(af), ∠(be)
16. a, β, δ, ε, ∠(df)
17. b, a : c, ∠(ae), ∠(af), ∠(ce)
18. a + b + c + d, α, ∠(af) ∠(be), ∠(ce)
19. a, e : f, β, δ, ε (§. 23).

§. 57.

Aufgaben über das Trapez, bei denen Verhältnisse vorkommen.

a) Das Trapez ist zunächst der Gestalt nach zu zeichnen; zur Bestimmung der Größe ist noch ein Stück gegeben.

1. d, ∠(de), ∠(bf), ∠(cf)
2. f, a : d, b : c, α

b) Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß die Linie, welche den Durchschnittspunkt F der nicht parallelen Seiten mit dem Durchschittspunkt E der Diagonalen verbindet, die beiden parallelen Seiten halbiert; und daß AE : EB = EC : ED, also AE + EC : BE + ED = AE : EB, oder e : f = AE : EB

3. a, c, b : d, α + β
4. a, b : d, α + β, ∠(be)
5. a, e : f, ε, α + β
6. a, b : d, ε, α + β
7. a, α, β, ε (§. 23, 52)

c) In gleichen Dreiecken verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Seiten, auf welche sie gefällt sind. Das eine der gleichen Dreiecke läßt sich zeichnen; von dem andern kennt man eine Seite, den gegenüberliegenden Winkel und findet durch Verhältnisse die betreffende Höhe.

8. b, d, ∠(de), ∠(df)
9. e, f, ∠(be), ∠(de), (b und d bis zum Durchschnitt zu verlängern).

§. 58.

Aufgaben über das Sehnen- und Tangenten-Viereck, bei denen Verhältnisse vorkommen.

a) Das Sehnenviereck ist zunächst der Gestalt nach zu zeichnen durch drei der gegebenen Stücke; das vierte dient dann zur Bestimmung der Größe.

1. r, a : b : c, α
2. d, a : b : c, α
3. f, a : b : c, α
4. r, a : b : e, α
5. c, a : b : e, α
6. f, a : b : e, α
7. r, a : b, α, β
8. c, a : b, α, β
9. e, a : b, α, β
10. a, α, β, ε
11. f, a : b, α, β,
12. e, a : b, c : d, β
13. r, a : b, c : d, β

b) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEB und CED a : c = AE : DE = BE : CE folgt; ist daher außer a und c noch ε gegeben, so kann

eins der Dreiecke AED oder BEC der Gestalt nach gezeichnet werden, das vierte Stück dient dann zur Bestimmung der Größe des Vierecks.

14. a, c, ε, α (§. 35, 143) 15. a, c, ε, d (§. 35, 141) 16. a, c, e, ε (§. 35, 142)

c) Das gesuchte Tangentenviereck ist durch drei der gegebenen Stücke der Gestalt nach bestimmt, das vierte dient zur Bestimmung der Größe.

17. e, α, β, γ 20. a, b : c : d, α 23. ρ, a : b, α, γ (§. 37, 89)
18. e, a : b, α, β 21. ρ, b : c : d, α 24. c, a : b, α, γ (§. 37, 89)
19. e, b : c : d, α 22. e, a : b, α, γ (§. 37, 89)

Anmerkung. Zahlreiche Aufgaben ergeben sich noch aus den §§. 34, 35, 36, 37, wenn man in den dort gestellten Aufgaben statt der Seiten ihr Verhältnis nimmt; man kann dann stets das Viereck der Gestalt nach konstruieren und muß nur noch zur Bestimmung der Größe eine Linie, welche aber nicht in dem Verhältnis vorkommen darf (in diesem Fall ist die Auflösung einfacher) hinzunehmen.

§. 59.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks die Grundlinie c und das Verhältnis der beiden Seiten a : b gegeben ist oder die Abschnitte u und v (vergl. §. 18), so ist der Apollonische Lehrsatz anzuwenden. Derselbe heißt:

Wenn man über dem Abstande zweier zugeordneten harmonischen Punkte als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so haben die Entfernungen sämtlicher Punkte dieses Kreises von den beiden anderen zugeordneten harmonischen Punkten dasselbe Verhältnis, nämlich das, in welchem die Linie geteilt ist.

Teile daher AB durch die Punkte D und E im Verhältnis m : n harmonisch nach §. 114, 1 (D liegt auf AB, E auf der Verlängerung über B), schlage über DE als Durchmesser einen Kreis, so soll, wenn C ein beliebiger Punkt desselben, AC : BC = m : n sein.

Beweis. Eine Parallele durch B zu AC gezogen, treffe CE in F und CD in G. Es ist AD : BD = AC : BG und AE : BE = AC : BF. Da die ersten Verhältnisse beider Proportionen gleich sind, so folgt BG = BF. Da ∠ FCG = R, so muß BC = BG sein; ∠ BCG = BGC = ACG; daher AC : BC = AD : BD = m : n.

Zusatz. Wenn in einem Dreieck von der Spitze nach der Grundlinie eine Linie so gezogen ist, daß sich die entstandenen Abschnitte wie die Seiten verhalten, so halbiert die Linie den Winkel an der Spitze; daher ∠ ACD = BCD.

a) 1. a : b, c, h_c 4. a : b, p, q 6. u, v, h_c
2. a : b, c, t_c 5. u, v, w_c 7. u, v, t_c
3. a : b, c, w_c

8. a : b, c, t_a. Anal. Verlängere AB über A um sich selber bis H, so ist CH = $2t_a$.

9. u, v, t_a.

b) Ist $a : b$ und t_c gegeben, so beachte, daß nach §. 19 ein Dreieck konstruiert werden kann, dessen Seiten a, b und $2t_c$ sind.

10. $a : b$, t_c, h_c 11. $a : b$, t_a, t_c

c) Auch wenn $a : b$ und $p - q$, resp. $p + q$ gegeben, ist mit Berücksichtigung von §. 14 die obige Konstruktion anzuwenden.

12. $a : b$, h_c, $p \mp q$.

d) In den folgenden Aufgaben ist außer c noch $t_a : t_b$ oder $a : t_a$ gegeben. Zur Analysis sind zwei Wege möglich. Entweder verlängere AB über A und B hinaus um sich selbst resp. bis H und G, so ist $CH = 2t_a$, $CG = 2t_b$, $HCG = \angle(t_a t_b)$ und $HCB = \angle(at_a)$; mithin $CH : CG = t_a : t_b$, und $CH : CB = 2t_a : a$. Oder ziehe durch den Schwerpunkt S zu CA und CB Parallelen, welche AB resp. in K und L treffen, so ist $AK = KL = LB = \frac{1}{3}c$, $SL : SK = a : b$, und $SA : SL = AD : DB = t_a : \frac{1}{2}a$.

13. c, h_c, $t_a : t_b$ 18. u, v, $t_a : t_b$ 23. c, $a : t_a$, $b : t_b$
14. p, q, $t_a : t_b$ 19. c, h_c, $a : t_a$ 24. c, $a : b : t_a$
15. c, t_c, $t_a : t_b$ 20. p, q, $a : t_a$ 25. c, $a : t_a : t_b$
16. c, γ, $t_a : t_b$ 21. c, t_c, $a : t_a$ 26. u, v, $a : t_a$
17. c, $a : b$, $t_a : t_b$ 22. c, t_b, $a : t_a$

27. $a : b$, t_a, t_b. Anal. Es sei $AD = t_a$ und $BE = t_b$. Ziehe $CF \parallel EB$ bis zum Durchschnitt mit AD, so ist $AF = \frac{4}{3}t_a$, $CD : AC = \frac{1}{2}a : b$, und $CF = \frac{2}{3}t_b$.

28. a, b, $t_a : t_b$. Anal. Es sei $AD = t_a$, $BE = t_b$. Ziehe $AF \parallel EB$ bis zum Durchschnitt mit CB; dann ist $CF = 2a$, $DF = \frac{3}{2}a$, $DA : FA = t_a : 2t_b$ und $CA = b$.

29. t_c, $t_a : t_b$, γ. Anal. Der Schwerpunkt sei S; halbiere AB in F, verlängere CF über F um sich selber bis O, trage SF auf FO von F bis N ab, so ist $CO = 2t_c$, $\angle CBO = 2R - \gamma$, $SN = \frac{2}{3}t_c$ und $BN : BS = t_a : t_b$.

30. t_c, $a : b$, $t_a : t_b$. Anal. ähnlich wie 29.

§. 60. (s. auch Anhang IV, S. 205.)

Viereckaufgaben, bei denen zum Teil der Apollonische Lehrsatz anzuwenden ist.

In den Aufgaben 1 bis 8 ist das Viereck zuerst der Gestalt nach zu zeichnen.

1. a, b, $\angle(de)$, $\angle(df)$, $\angle(cf)$ 5. a, b, e, $\angle(ce)$, $\angle(de)$
2. a, b, f, $\angle(ce)$, $\angle(de)$ 6. $a : b$, e, f, α, e (§. 23)
3. a, b, e, f, $c : d$ 7. $a : c$, e, f, β, e (§. 23)
4. a, b, e, $c : d : f$ 8. a, f, δ, $\angle(be)$, $\angle(ce)$

Ein Sehnenviereck zu zeichnen aus

9. a, b, c, d. 1. Anal. Bestimme die Gestalt von $\triangle BCD$ durch

BE:CE = a:c, CE:DE = b:d (§. 58, b) und durch b:c. 2. Anal. Verlängere BC über B bis F, so daß BF = c, trage d auf AB ab = BH, und ziehe durch H eine Parallele HG zu AC, so ist △ BFH ≅ ACD; BG ist zu bestimmen durch a:d = b:BG; ferner läßt sich ein doppelter Ort für den Punkt H finden, da BH = d, und FH:GH = AC:GH = a:d. 3. Anal. Ziehe durch B eine Parallele zu AC, welche die Verlängerung von DC in F trifft, so ist △ BCF ∽ ABD; daher CF zu konstruieren aus d:b = a:CF, und folglich auch DF, so daß DF und BD:BF = d:b bekannt ist. (Andere Auflösungen siehe §. 135, 6; §. 138, 1; §. 141, 1).

10. a, c, e, f. 1. Anal. Ähnlich wie bei 9. 2. Anal. Trage c auf BD ab = BF, und e auf AB ab = BG, ziehe FH ∥ AD, so ist △ ACD ≅ BFG; BH ist bestimmt durch f:a = c:BH; ferner läßt sich ein doppelter Ort für den Punkt F finden, da BF = c und GF:HF = AD:HF = f:c. 3. Anal. Ziehe von C eine Parallele zu AD, welche AB in F trifft, so ist △ ACF ∽ BCD, also AF zu konstruieren aus f:e = c:AF; mithin BF und BC:CF = f:e bekannt. (Andere Auflösungen siehe §. 135, 7; §. 138, 2; §. 141, 2.)

11. Trapez e, f, α, β (§. 23, 53). Anal. Verlängere AD und BC bis sie sich in F schneiden; verbinde F mit dem Durchschnittspunkt E der Diagonalen, so geht diese Linie durch die Mitten von BA und CD. △ ABF läßt sich nun der Gestalt nach zeichnen und auch das Trapez, da man noch einen zweiten Ort für den Punkt E kennt, nämlich AE:BE = e:f.

12. Tangentenviereck a, b, c, ρ. Anal. Trage auf AB von A aus d = AD′ und von B aus b = BC′ ab, so ist ∠ MC′D′ = ½γ und MD′C′ = ½δ; ∠ AMB = ½γ + ½δ; zieht man ME bis zum Durchschnitt mit AB, so daß ∠ AME = ½γ, so wird ∠ BME = ½δ. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEM und EMC′ folgt EM² = AE · C′E; und ebenso EM² = BE . D′E; folglich AE · C′E = BE · D′E; also Punkt E zu konstruieren nach §. 116, 2, Aufl. 3, und dann zu beachten, daß EM gleich den von E an einen der Hülfskreise gelegten Tangenten ist.

13. Sehnen-Tangentenviereck a, b, c. 1. Anal. wie 9. 2. Anal. ähnlich wie 12; ∠ AEM = R.

14. Viereck aus a, b, c:d, α, γ. Anal. Trägt man an AB in B ∠δ und in A ∠(de) nach außen zu an, so erhält man △ ABF ∽ ADC; ∠ CBF = β + δ, also bekannt. Ferner AB:BF = d:c, dadurch auch BF und somit Punkt F bekannt; endlich ∠ FAC = α.

Ähnlich der vorigen Aufgabe sind folgende Aufgaben über das Sehnenviereck zu lösen:

15. a, b, c:d, α
16. a, b, c:d, ε (§. 35, d)
17. a, c, b:d, β (§. 35, d)
18—48. s. Anh. IV, S. 205.

§. 61.

Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken und Antiparallelogrammen mit Benutzung der stetigen Teilung.

a) Wenn ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen ist, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden, so daß also $a^2 = bc$ $(a > b)$, dann beachte, daß wenn man von C auf AB das Lot CD fällt, $a^2 = c \cdot BD$, also $b = BD$ ist; da nun $b^2 = c \cdot AD$ oder $BD^2 = c \cdot AD$, so ist AB in D stetig geteilt. Da $\triangle ACD \sim BCD$, so ist $BC : AC = BD : CD$ oder $BC : BD = BD : CD$; daher bilden auch die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks BCD eine stetige Proportion. Zuweilen ist zu berücksichtigen, daß das Dreieck stets der Gestalt nach konstruiert werden kann; zur Bestimmung der Größe dient dann das gegebene Stück.

1. c	4. h	7. c + b	10. c − a	12. q
2. b	5. a + b	8. c − b	11. p	13. p − q
3. a	6. a − b	9. c + a		

b) Wenn ein Antiparallelogramm zu zeichnen ist, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt und in welchem $\angle ACB = ADB = R$, so ist folgendes zu beachten: Fällt man von D auf AB das Lot DE, so ist $BE = a - \frac{1}{2}(a - c) = \frac{1}{2}(a + c) = b$, daher bilden, wie unter a) gezeigt, die Seiten des Dreiecks ABD eine stetige Proportion, so daß die Aufgaben selber auf die unter a) zurückzuführen sind.

Unter den oben angegebenen Bedingungen ein Antiparallelogramm zu zeichnen, wenn gegeben:

14. a	17. e	20. e − b	23. a + e	25. a + c
15. b	18. ρ	21. a + b	24. a − e	26. a − c
16. c (13)	19. e + b	22. a − b		

§. 62.

Zur Zeichnung eines Dreiecks sind zwei Summen oder zwei Differenzen oder eine Summe und eine Differenz zweier Dreiecksseiten und ein Winkel gegeben.

a) Der gegebene Winkel liege der Seite gegenüber, welche zweimal vorkommt.

1. $a + c$, $b + c$, γ (§. 139, 33). 1. Anal. Verlängere AC über A um $c = AD$, BC über B um $c = BE$, und verbinde A, B, C, D, E mit dem Mittelpunkt m''' des zu AB gehörenden äußeren Berührungskreises; ferner seien noch von m''' auf CB, CA und AB resp. die Lote $m'''F$, $m'''G$ und $m'''H$ gefällt. Dann ist $\triangle DAm''' \cong BAm''' \cong BEm'''$, folglich $\angle m'''DC = R - \frac{1}{2}\beta$ und $m'''EC = R - \frac{1}{2}\alpha$, also $\angle Dm'''E = R + \frac{3}{2}\gamma$; daher Punkt m''' zu konstruieren. Die Punkte A und B sind zu finden, da $FB = DG$ und $GA = FE$. 2. Anal. Verlängere

AC über A um $c = AD$, und BC über B um $c = BE$; ziehe AE und DE; ziehe durch einen beliebigen Punkt H auf AE Parallelen zu DE und AB, welche AD und BE resp. in F und G treffen, so ist $DF = EG = GH$.

2. $a - c$, $b - c$, γ (§. 139, 34). 1. Anal. ähnlich wie die von 1, nur daß der Mittelpunkt m des eingeschriebenen Kreises statt m″ konstruiert wird. 2. Anal. ähnlich wie 1.

3. $a - c$, $b + c$, γ (§. 139, 35). 1. Anal. Verlängere AC über A um $c = AD$, trage auf CB von B aus $c = BE$ ab, und verbinde A, B, C, D, E mit dem Mittelpunkt m″ des zu AC gehörenden äußeren Berührungskreises; dann ist $\triangle BEm'' \cong BAm'' \cong DAm''$; folglich $\angle ADm'' = \frac{1}{2}\beta$ und $CEm'' = R - \frac{1}{2}\alpha$, also $\angle Dm''E = CEm'' + DCE - CDm'' = \frac{3}{2}\gamma$.

b) Wenn der gegebene Winkel der Seite, welche zweimal vorkommt, anliegt, so lassen sich zwar die Aufgaben durch Addition oder Subtraktion der gegebenen Summen oder Differenzen auf die drei vorhergehenden zurückführen; jedoch kann man dieselben auch direkt lösen, wie aus der zwei Aufgaben hinzugefügten Analysis zu ersehen.

4. $a + b$, $a + c$, γ. Anal. Verlängere AC über C um $a = CD$ und BC über B um $c = BE$; ziehe durch D eine Parallele zu BC und durch E eine Parallele zu AC, beide treffen sich in G; GE und DB schneiden sich verlängert in F; ziehe durch einen beliebigen Punkt I auf BF Parallelen mit AB und BE, welche AF und EF resp. in K und H treffen, so ist $KI = IH = EF$.

5. $a - b$, $a - c$, γ. Anal. Verlängere AC über A bis D, so daß $CD = a$, und trage AB auf BC ab bis E, so daß $BE = a$; ziehe durch E eine Parallele zu AC, und durch D eine Parallele zu BC, beide schneiden sich in G; EG trifft BD in F; verbinde A mit F; ziehe durch einen beliebigen Punkt I auf BF Parallelen mit AB und BE, welche AF und EF resp. in K und H treffen, so ist $KI = IH = HF$.

6. $a - b$, $a + c$, γ 8. $a + b$, $a - c$, γ
7. $a - b$, $b + c$, γ 9. $a - b$, $c - b$, γ

§. 63.

Wenn das Produkt zweier Seiten gegeben, so kann folgender Satz benutzt werden:

Zieht man von der Spitze C eines Dreiecks zwei Linien CP bis zum Durchschnitt mit AB, CQ bis zum Durchschnitt mit dem um das Dreieck beschriebenen Kreise, so daß $\angle ACP = QCB$, und CP und CQ entweder beide innerhalb oder beide außerhalb von $\angle ABC$ liegen, so ist $CP \cdot CQ = ab$. Beweis. $\triangle ACP \sim QCB$.

I) Ist $CP = h_c$, so ist $CQ = 2r$.

II) Ist $CP = w_c$, so liegt Q in der Verlängerung von CP.

III) Ist $CP = t_c$, so ziehe $CE \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit dem umgeschriebenen Kreise; EP treffe den Kreis in Q, und CP treffe ihn in S; dann ist $\triangle CPE$ gleichschenklig, also $\angle CEQ = SCE$, daher $\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{ES}$, $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BS}$, $\angle ACQ = SCB$ und $CQE = \alpha - \beta$ (§. 27). Wenn c und t_c gegeben, so ist QP zu finden; außerdem wird $\angle CPQ$ durch PA halbiert.

In den folgenden Aufgaben ist ab gegeben und außerdem:

1. h_c, c	6. h_c, $p - q$	11. r, $p - q$	16. w_c, t_c
2. h_c, γ	7. r, c	12. r, $\alpha - \beta$	17. w_c, c
3. h_c, w_c	8. r, γ	13. w_c, γ	18. $p - q$, $\alpha - \beta$
4. h_c, $\alpha - \beta$	9. r, w_c	14. w_c, $\alpha - \beta$	19. $p - q$, t_c
5. h_c, t_c	10. r, t_c	15. w_c, $p - q$	

20. t_c, $\alpha - \beta$. 2. Anal. Fig. 2. Da ab und $\alpha - \beta$ gegeben, so ist der Inhalt von $\triangle CBE$ bekannt; dieses kann nun nach §. 104 in ein gleichschenkliges verwandelt werden, dessen Schenkel $CH = EH = t_c$ sind; hierdurch ist auch CE bestimmt, also $\triangle CME$ und der um ABC beschriebene Kreis.

21. c, t_c	23. t_c, $\angle(ct_c)$	26. $a + b$, γ	29. $a - b$, $\alpha - \beta$
22. c, t_c, $\alpha - \beta$ (§. 141, 17)	24. c, γ	27. $a - b$, γ	30. $a + b$, w_c
	25. t_c, γ (§. 19)	28. $a + b$, $\alpha - \beta$	

Die Aufgaben 26 bis 30 sind ähnlich wie §. 53, 11 und 12, 2. Anal. zu lösen.

31. ab, c, $\alpha - \beta$. Anal. Das Vorhergehende ist auf das Dreieck anzuwenden, welches man erhält, wenn man t_c um sich selber verlängert (§. 19).

§. 64. (s. auch Anh. IV, S. 205.)

Dreiecks-Aufgaben, wenn Radien der Berührungskreise gegeben und damit zusammenhängende Aufgaben. (Vergl. §§. 40—46a.) Fig. 4.

a) Der Inhalt von $\triangle ABC$ ist $= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. Es ist aber auch $\triangle ABC = \triangle AmB + BmC + CmA = \frac{1}{2}c\rho + \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho = \frac{1}{2}\rho(a + b + c)$. Ferner ist $\triangle ABC = E'''Cm''' + D'''Cm''' - (E'''Am''' + F'''Am''' + D'''Bm''' + F'''Bm''') = 2E'''Cm''' - 2Am'''B = \frac{1}{2}(a + b + c)\,\rho_c - c\rho_c = \frac{1}{2}\rho_c(a + b - c)$. Analog ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}(a + c - b)\,\rho_b = \frac{1}{2}(b + c - a)\,\rho_a$. Also $ah_a = bh_b = ch_c = (a + b + c)\,\rho = (b + c - a)\,\rho_a = (a + c - b)\,\rho_b = (a + b - c)\,\rho_c$. Die Proportionen, welche sich hieraus ergeben, sind leicht ersichtlich.

b) Da $\triangle OF'''m''' \infty mKm'''$ und $\triangle CE'''m''' \infty CEm$, so ist $\rho_c : \rho = m'''O : Om = m'''C : Cm$; d. h. mm''' ist in O und C harmonisch geteilt. Hieraus ergiebt sich sofort, da $CP \parallel mF \parallel m'''F'''$, daß auch FF''' in O und P harmonisch geteilt ist; und wenn $OU \perp CE'''$, also $Em \parallel OU \parallel E'''m'''$ ist, daß auch EE''' in U und C harmonisch geteilt ist.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von $m'm''$ und $F'F''$ mit Y, so sind AY, Am'', AC, Am' harmonische Strahlen, also ist $m'm''$ in C und Y harmonisch geteilt, mithin auch $F'F''$ in P und Y.

c) Daraus, daß mm''' in O und C harmonisch geteilt ist, folgt ferner folgende Proportion: $h_c + \rho_c : \rho_c = h_c - \rho : \rho$ (α), woraus hervorgeht, daß von den drei Stücken h_c, ρ_c, ρ je eins von den beiden anderen abhängig ist, so daß, wenn zwei von ihnen gegeben, das dritte leicht zu konstruieren ist; ebenso sind h_a, ρ_a, ρ und h_b, ρ_b, ρ von einander abhängige Stücke. Aus (α) folgt: $h_c : \rho_c = h_c - 2\rho : \rho$ oder $h_c : 2\rho = \rho_c : \rho_c - \rho$; also $h_c - 2\rho : \rho = 2\rho : \rho_c - \rho$ (β). Ferner ergiebt sich aus (α) $h_c + 2\rho_c : \rho_c = h_c : \rho$ und aus (β) $h_c : 2\rho = \rho_c : \rho_c - \rho$ oder $h_c : \rho = 2\rho_c : \rho_c - \rho$ (γ); mithin aus (γ) $h_c + 2\rho_c : \rho_c = 2\rho_c : \rho_c - \rho$.

Es ergeben sich also folgende Proportionen:

$$h_c : \rho = \rho_c : \tfrac{1}{2}(\rho_c - \rho)$$
$$h_b : \rho = \rho_b : \tfrac{1}{2}(\rho_b - \rho)$$
$$h_a : \rho = \rho_a : \tfrac{1}{2}(\rho_a - \rho)$$

d) Nach a) ist $c \cdot h_c = \rho_b\,(a + c - b)$, also $h_c : \rho_b = a + c - b : c$. Da $\triangle LHB \infty CE'm'$, so ist $LH : E'm' = LB : CE'$ d. i. $\tfrac{1}{2}(\rho_a + \rho_b) : \rho_a = \tfrac{1}{2}c : \tfrac{1}{2}(a + c - b) = c : a + c - b$.

Folglich ist $h_c : \rho_b = \rho_a : \tfrac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$

Analog $h_b : \rho_a = \rho_c : \tfrac{1}{2}(\rho_a + \rho_c)$

$h_a : \rho_c = \rho_b : \tfrac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$

Hieraus folgt, daß von den drei Stücken h_c, ρ_a, ρ_b oder h_b, ρ_a, ρ_c oder h_a, ρ_b, ρ_c, je eins durch die beiden anderen bestimmt wird.

e) $Cm : mG = Em : VG = \rho : \tfrac{1}{2}(\rho_c - \rho) = NL : LG$; also $mL \parallel CN$ Es ist aber auch $NF''' \parallel mL$, da $mN \parallel LF'''$; also ist CNF''' eine gerade Linie. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von CF''' mit der Verlängerung von mF mit J, so ist $Fm : mJ = FL : LF'''$; da nun $FL = LF'''$, so ist auch $Fm = mJ = \rho$; d. h. die Verbindungslinie einer Ecke des Dreiecks mit dem auf der gegenüberliegenden Seite liegenden äußeren Berührungspunkt trifft die Peripherie des eingeschriebenen Kreises in demselben Punkt, in welchem sie der auf jener Seite senkrecht stehende Durchmesser desselben Kreises trifft.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn man Lm verlängert, bis sie CP in X trifft, $CX = \rho$ und $XP = h_c - \rho$ ist.

Zu beachten ist noch in mehreren Aufgaben, daß $PL = \frac{1}{2}(p - q)$ und $LO = \frac{1}{2}(u - v)$ ist.

1. $a + b$, c, h_c 2. $a - b$, c, h_c

(Andere Auflösungen dieser Aufgaben finden sich §. 66, 1, 2 und §. 138, 3, 4; hier sind sie mit Hülfe der unter a) aufgestellten Proportionen zu lösen; eine vierte Konstruktion ergiebt sich aus der Figur zu §. 53, 7 und 8, 2. Anal.)

3. $a + b + c$, h_c, ρ
4. $a + b - c$, h_c, ρ_c
5. c, h_c, ρ
6. c, h_c, ρ_c
7. c, $\triangle$, ρ
8. c, $\triangle$, ρ_c
9. h_c, $\triangle$, ρ
10. h_c, $\triangle$, ρ_c
11. $a + b$, c, w_c
12. $a - b$, $p - q$, w_c
13. $a - b$, $p - q$, ρ
14. $a - b$, $p - q$, ρ_c
15. $a - b$, $p - q$, h_c
(§. 66, 4 u. §. 138, 6)
16. $a - b$, $p - q$, $\rho_c - \rho$
17. $a - b$, $p - q$, $h_c - \rho$
18. $a - b$, $u - v$, w_c
19. $a - b$, $u - v$, ρ
20. $a - b$, $u - v$, ρ_c
21. $a - b$, $u - v$, h_c
22. $a - b$, $u - v$, $\rho_c - \rho$
23. $a - b$, $u - v$, $h_c - \rho$
24. $a + b$, $p - q$, ρ_a
25. $a + b$, $p - q$, h_c
(§. 66, 3 u. §. 138, 5)
26. $a + b$, $p - q$, $\rho_a + \rho_b$
27. c, h_c, ρ_a
28. c, $\triangle$, ρ_a
29. h_c, $\triangle$, ρ_a
30. w_c, ρ, ρ_c
31. w_c, ρ_a, ρ_b
32. $a + b$, h_c, ρ (§. 44, 9)
33. $a - b$, h_c, ρ
(§. 45, 1)
34. $a + b$, h_c, ρ_c
35. $a - b$, h_c, ρ_c
36. $a + b$, h_c, ρ_a, (§. 44, 1)
37. $a - b$, h_c, ρ_a (§. 45, 29)
38. h_c, t_c, ρ
39. h_c, $p - q$, ρ
40. t_c, $p - q$, ρ
41. h_c, t_c, ρ_c
42. h_c, $p - q$, ρ_c
43. t_c, $p - q$, ρ_c
44. $p - q$, ρ, ρ_c
45. t_c, ρ, ρ_c
46. h_c, t_c, ρ_a
47. h_c, $p - q$, ρ_a
48. t_c, $p - q$, ρ_a
49. $p - q$, ρ_a, ρ_b
50. t_c, ρ_a, ρ_b
51. h_c, r, ρ
52. h_c, r, ρ_c
53. h_c, r, ρ_a

54. ρ, ρ_a, ρ_b. 1. Aufl. Ziehe durch m', m'', m''' Parallelen zu AB, welche GH resp. in N', N'', N''' treffen und die durch C zu AB gezogene Parallele treffe GH in C'; dann sind L, N, N'', H, N', bekannt. Da N', C', N'', L harmonische Punkte sind, kann man C' finden; und ebenso N''', da C', N, L, N''' harmonische Punkte sind. Also G bekannt, da es auf der Mitte von NN''' liegt. 2. Aufl. $LH = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$; ein von H mit $\frac{1}{2}(\rho_a - \rho_b)$ geschlagener Kreis berührt AC und BC; und ein Kreis von L mit $\frac{1}{2}h_c$, das aus ρ und ρ_a zu finden ist, berührt BC; daher BC gemeinschaftliche innere Tangente beider Kreise. 3. Aufl. Aus ρ und ρ_a ist h_a; aus ρ und ρ_b ist h_b; und aus ρ_a und ρ_b ist h_c zu konstruieren; daher $\triangle ABC$ nach §. 53, 1. 4. Anal. Es verhält sich $Bm : Bm'' = \rho : \rho_b$, und wenn man CV' senkrecht mm'' fällt, $BV' : V'm'' = m'C : Cm'' = \rho_a : \rho_b$. Unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse und des Umstandes, daß CV' senkrecht mm'' ist, läßt sich $\triangle mm'm''$ mithin auch ABC der Gestalt nach

konſtruieren; zur Beſtimmung der Größe dient dann eins der gegebenen Stücke. Andere Löſungen ähnlich wie die in 55.

55. ρ_a, ρ_b, ρ_c. 1. Anal. Parallelen durch m′ und m″ treffen m‴F‴ reſp. in O′ und O″. Dann iſt m‴CO′m′ ein Sehnenviereck, alſo $m'''O'C = m'''m'C = R - \frac{1}{2}\alpha$; ferner m‴O″Cm″ ein Sehnenviereck, daher $\angle m'''CO'' = m'''m''O'' = R - \frac{1}{2}\alpha$. Mithin $\triangle m'''O''C \sim m'''CO'$, alſo m‴O″:m‴C = m‴C:m‴O′. Hiernach iſt CE‴m‴D‴ leicht zu konſtruieren, ferner m″ und endlich B, welches auf einem Halbkreiſe über m‴m‴ liegt. 2. Anal. m‴C wird wie vorher beſtimmt. m‴E‴ und CO′ ſchneiden ſich in X, m‴D‴ und CO″ in Z, ſo iſt $E'''X = \rho_a$ und $D'''Z = \rho_b$, A iſt Höhendurchſchnittspunkt im $\triangle m'''CX$, B der im $\triangle m'''CZ$. 3. Anal. Es iſt $\rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c)$. Zeichnet man daher einen beliebigen Kreis und zieht von einem beliebigen Punkte außerhalb desſelben nach dem Kreiſe Strecken, welche $= \rho_a, \rho_b, \rho_c$ ſind, ſo ſind die anderen Abſchnitte dieſer Sekanten (natürlich vom Punkt aus gerechnet) proportional mit reſp. s−a, s−b, s−c, wodurch das Dreieck der Geſtalt nach bekannt wird. Andere Löſungen ähnlich wie in 54; außerdem ſ. §. 141, 19.

Die folgenden Aufgaben ſind unter Berückſichtigung der Bemerkung zu §. 53, Aufgabe 7 bis 10 zu löſen.

56. $a + b$, $\rho_a - \rho_b$, h_c (II, 223)
57. $a - b$, $\rho_a - \rho_b$, h_c (II, 224)
58. $\rho_a - \rho_b$, h_c, γ (II, 240)
59. $\rho_a - \rho_b$, h_c, $\alpha - \beta$ (II, 241)
60. $a + b$, $\rho_c + \rho$, h_c (II, 221)
61. $a - b$, $\rho_c + \rho$, h_c (II, 222)
62. $\rho_c + \rho$, h_c, γ (II, 226)
63. $\rho_c + \rho$, h_c, $\alpha - \beta$ (II, 227)

64.—76 (ſ. Anh. IV, S. 206.)

§. 64a. Konſtruktion des Dreiecks aus beſonderen Punkten.

Die Bezeichnungen ſind wie in §. 46, a und Fig. 4.

Bei den erſten drei Aufgaben iſt zu beachten, daß ein oberer Höhenabſchnitt doppelt ſo groß iſt, wie das vom Mittelpunkt des umgeſchriebenen Kreiſes auf die entſprechende Seite gefällte Lot.

1. C, O‴, X 2. C, X, M 3. C, X, L

4. C, F, F‴. Bei der Auflöſung iſt zu beachten, daß O‴ vierter harmoniſcher Punkt zu F, F‴, P iſt.

5. C, F′, F″. Wenn ſich m′m″ und F′F″ verlängert in Y treffen, ſo iſt zu beachten, daß AY, Am″, AC, Am′ harmoniſche Strahlen ſind; alſo iſt m′m″ in Y und C harmoniſch geteilt; folglich auch F′F″ in Y und P.

6. C, m, L. Anal. Es iſt $CO''' \cdot O'''G = AO''' \cdot O'''B = mO''' \cdot m'''O'''$; folglich $CO''' : mO''' = m'''O''' : O'''G = F'''O''' : LO'''$; mithin $CF''' \parallel mL$. Errichtet man auf AB in L die Senkrechte LN, welche CF‴ in N trifft, ſo iſt $\triangle FLm \cong LF'''N$, mithin $NL = mF = \rho$.

7. C, m, Z. Anal. wie 6, da L zu finden.

8. m, L, Z. Anal. wie 6.

9. C,M,Z. Anal. XM wird durch Z im Verhältnis 2:1 geteilt.

10. C, X, Z (9).

Anmerkung. Ähnliche Aufgaben siehe §. 46a, §. 139, 55 u. 56 und im zweiten Anhange.

§. 65.

Aufgaben über das Höhendreieck.

Fig. 4. Wir verweisen auf die Bemerkungen in den §§. 40—46 und §. 64. Man sehe m′ m″ m‴ als das Urdreieck, ABC als dessen Höhendreieck an. Hinzugefügt werde nur noch folgendes, indem △ m′ m″ m‴ als Urdreieck angesehen wird (siehe §. 40, 4, Anm. 2), da für die drei anderen Urdreiecke mm′m″ mm″m‴ und mm‴m′ die Bemerkungen dieselben oder ganz ähnliche sind.

a) Mit α, β, γ mögen jetzt die Winkel bei resp. m′,m″,m‴ im △m′m″m‴ bezeichnet werden; mit α', β', γ' die im Höhendreieck ABC resp. bei A, B, C liegenden Winkel. Aus §. 40, 3 folgt dann: $\alpha = R - \frac{1}{2}\alpha'$, $\beta = R - \frac{1}{2}\beta'$, $\gamma = R - \frac{1}{2}\gamma'$; $\alpha - \beta = \frac{1}{2}(\beta' - \alpha')$. Hieraus und aus §. 40, 13 folgt, daß $\angle(h_c w_c) = \frac{1}{2}(h_c' w_c')$ ist.

b) Da der um das Höhendreieck beschriebene Kreis auch durch die Mitten der Seiten des Urdreiecks geht (§. 40, 4, Lehrs.) und alle Linien in dem durch die Mitten der Seiten als Eckpunkte bestimmten Dreieck halb so groß als die homologen Linien in dem Urdreieck sind, so ist der Radius des um das Höhendreieck beschriebenen Kreises halb so groß wie der Radius des um das Urdreieck beschriebenen Kreises.

c) Da △ CE‴m‴ ∽ HAG, weil die Winkel gleich, so verhält sich $HG : HA = Cm''' : CE'''$ oder $r : \frac{1}{2}c = h_c : \frac{1}{2}(a' + b' + c')$ d. i. der Inhalt des Urdreiecks ist gleich dem halben Produkt aus dem Umfang des Höhendreiecks und dem Radius des um das Urdreieck beschriebenen Kreises.

Vergleichen wir hiermit (§. 64a), so erhalten wir:

$ah_a = bh_b = ch_c = (a+b+c)\rho = (a+b-c)\rho_c = (a+c-b)\rho_b = (b+c-a)\rho_a = (a'+b'+c')\,r.$

1. a', b', c'
2. a', b', α
3. a', b', γ
4. $a'+c'-b', \alpha, a$
5. $a'+c'-b', \alpha, h_a$
6. $a'+c'-b', \alpha, h_c$
7. c', r, h_a
8. c', c, h_a
9. $a'+b'\ c', h_a$
10. $a', c, \alpha-\beta$
11. $c', c, \alpha-\beta$
12. $a', r, \alpha-\beta$
13. $c', r, \alpha-\beta$
14. $a'+b'+c', w_c', h_c$
15. w_c', h_c, γ
16. w_c', h_c, α
17. $a'+b'+c', h_a, h_b$
18. $a'+b'+c', b, h_a$
19. $a'+b'+c', h_a+h_b, \alpha$
20. $a'+b'+c', h_c, r$
21. $a'+b'-c', w_c', h_c$ (§. 64, b)
22. h_c', ρ_c', h_c
23. w_c', h_c, t_c (§. 64, b)
24. w_c', ρ', h_c (§. 64, b)
25. w_c', h_c, r (§. 64, b)
26. w_c', h_c', h_c (§. 64, b)
27. w_c', w_c, h_c (§. 64, b)
28. w_c', h_c', w_c
29. c', r, h_c
30. c', c, h_c

§. 66. (ſ. auch Anh. IV, S. 206.)

Aufgaben über das Dreieck und Viereck, bei denen das Apolloniſche Berührungs-Problem (§. 100) zur Anwendung kommt.

a) In den folgenden Aufgaben kennt man von einem Dreieck eine Seite, eine Gerade als Ort für die gegenüberliegende Ecke und die Summe oder Differenz der beiden anderen Seiten. Iſt z. B. c und a+b gegeben und ſoll C auf der gegebenen L liegen, ſo fälle man AF ⊥ L und verlängere es über F um ſich ſelbſt bis A'; ferner verlängere man BC über C hinaus um AC bis E; dann berührt der mit AC um C geſchlagene Kreis den mit a+b um B geſchlagenen in E und geht durch A und A', alſo §. 100, 3.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben

1. a + b, c, h_c (§. 64, 1 u. §. 138, 3)
2. a − b, c, h_c (§. 64, 2 u. §. 138, 4)
3. a + b, p − q, h_c (§. 64, 25 und §. 138, 5)
4. a − b, p − q, h_c (§. 64, 15 und §. 138, 6)
5. a + b, p, q (§. 50, 1)
6. a − b, p, q (§. 50, 2)
7. a + b, p − q, t_c (§. 27 u. 28)
8. a − b, p − q, t_c (§. 27 u. 28)
9. a + b, h_c, t_c (§. 27 u. 28)
10. a − b, h_c, t_c (§. 27 u. 28)
11. a + b, c, ∠ (ct_c)
12. a − b, c, ∠ (ct_c)
13. a + b, t_c, ∠ (ct_c) (§. 19)
14. a − b, t_c, ∠ (ct_c) (§. 19)
15. c, h_c, $t_a + t_b$ (§. 52)
16. c, h_c, $t_a - t_b$ (§. 52)
17. p, q, $t_a + t_b$
18. p, q, $t_a - t_b$
19. h_c, t_c, $t_a + t_b$
20. h_c, t_c, $t_a - t_b$
21. p − q, h_c, $t_a + t_b$
22. p − q, h_c, $t_a - t_b$
23. p − q, t_c, $t_a + t_b$
24. p − q, t_c, $t_a - t_b$
25. a − b, u − v, h_c, (§. 50, b)

Für die Aufgaben 21 bis 24 iſt folgendes zu beachten: $AE = t_a$, $BF = t_b$, $CD = t_c$ ſchneiden ſich in S; ferner ſei $CG = h_c$, und SH ſenkrecht AB; dann iſt $HD = \frac{1}{3} DG = \frac{1}{6}(p - q)$. Ferner iſt noch in den Aufgaben 19 bis 24 §. 19 auf △ ASB anzuwenden.

Ein Viereck zu zeichnen aus

26. a + b, c, d, e, ε
27. a − b, c, d, e, ε
28. a + c, e, f, ∠ (be), ∠ (bf)
29. a − c, e, f, ∠ (be), ∠ (bf)
30. e + f, a, c, β, γ
31. e − f, a, c, β, γ

Bei den Aufgaben 28 bis 31 iſt §. 23 zu beachten.

Ein Trapez zu zeichnen, wenn gegeben

32. a, c, b + d, h
33. a, c, b − d, h
34. a, c, b + d, ∠(ae)
35. a, c, b − d, ∠(ae)
36. a − c, b + d, h, e
37. a − c, b − d, h, e
38. a − c, b + d, h, ∠(be)
39. a − c, b − d, h, ∠(be)
40. a − c, b + d, h, ∠(ae)
41. a − c, b − d, h, ∠(ae)
42. a − c, b + d, h, ε (§. 12, d)
43. a − c, b − d, h, ε (§. 12, d)
44. a, c, e + f, h
45. a, c, e − f, h
46. a, c, e + f, β
47. a, c, e − f, β
48. a + c, e + f, h, b
49. a + c, e − f, h, b
50. a + c, e + f, h, ∠(bf)
51. a + c, e − f, h, ∠(bf)
52. a + c, e + f, h, α
53. a + c, e − f, h, α

54. Ein Trapez, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zu zeichnen, wenn gegeben a, c, ρ.

55. Ein Viereck, in und um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zu zeichnen, wenn gegeben a, c, ρ. Anal. wie §. 37a. H liegt auf einem über AF errichteten Halbkreise. Der Kreis um MHGB berührt diesen Halbkreis, geht durch B und einen Punkt L, der entsteht, wenn man $BL = 2\rho$ senkrecht auf AF errichtet.

56. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben $a + b + c$, w_c, $a : b$. Anal. AB sei über A und B um AC und BC bis resp. E und F verlängert, so ist $EF = a + b + c$, $CD = w_c$, und $DF : DE = a : b$, also Punkt D bestimmt. Der um $\triangle EFC$ beschriebene Kreis M werde von CD in G getroffen. Dann ist $\angle FCG = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$; $\angle FGC = \frac{1}{2}\alpha$; also $FCG + FGC = R$; $CFG = R$ und CG Durchmesser. Folglich werden sich Kreis um M und der mit CD um D geschlagene Kreis in C berühren. Es kommt also darauf an, Kreis M zu konstruieren, der durch die Punkte E und F geht, und den mit w_c um D geschlagenen Kreis einschließend berührt.

b) In den folgenden Aufgaben ist zur Analysis zunächst die §. 23 angegebene Konstruktion zu machen, nämlich $BF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $DG \parallel AC$ und $CG \parallel AD$ zu ziehen; dann können sie auf §. 100, 6 (einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht) zurückgeführt werden.

Ein Viereck zu zeichnen aus

57. e, f, ε, $a + c$, $b + c$. Anal. Wenn man mit $a + c$ um F und $b + c$ um B Kreise schlägt, so werden diese von einem mit CD um C geschlagenen Kreise, welcher außerdem durch den Punkt D gehen muß, von innen berührt; also §. 100, 6.

58. e, f, ε, $a + c$, $b - c$. Anal. ähnlich der von 57.

59. e, f, ε, $a - c$, $b - c$. Anal. ähnlich der von 57.

c) In den folgenden Trapezaufgaben beachte man zur Analysis die Figur von §. 12, d). Wie dort findet man CH und durch die Lage von AG oder FB einen Ort für B oder A. Ferner kennt man $BC \pm HB$ oder $AH \pm AC$.

In den folgenden Aufgaben ist $e + f$ oder $e - f$ gegeben und außerdem

60. b, d, $\alpha + \beta$
61. $a - c$, b, d
62. $a - c$, b, β
63. b, d, α
64. $a - c$, b, α
65. $a - c$, b, $\alpha + \beta$
66. $a - c$, α, β
67. b, α, β
68. h, α, β
69. b, d, h
70. b, h, α
71. $a - c$, b, h
72. $a - c$, h, α
73. b, h, $\alpha + \beta$
74. $a - c$, h, $\alpha + \beta$

In den folgenden Aufgaben ist $b+d$ oder $b-d$ gegeben und außerdem

75. e, f, ε	80. a + c, e, ε	85. h, e, ∠(af)
76. a + c, e, f	81. a + c, ∠(ae), ∠(af)	86. a + c, h, e
77. a + c, e, ∠(ae)	82. e, ∠(ae), ∠(af)	87. a + c, h, ∠(ae)
78. e, f, ∠(ae)	83. h, ∠(ae), ∠(af)	88. e, h, ε
79. a + c, e, ∠(af)	84. h, e, f	89. a + c, h, ε

90—93. s. Anh. IV, S. 206.

Zweiter Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

A. Aufgaben, welche ohne Anwendung von Verhältnissen zu lösen sind.

§. 67.

a) In den folgenden Aufgaben wird ein Punkt gesucht; man findet denselben als Durchschnittspunkt zweier geometrischer Örter.

1. Gegeben L und L′; auf L einen Punkt X zu bestimmen, der von L′ die Entfernung a hat.

2. Gegeben L und L′; einen Punkt X zu finden, der von L und L′ bezüglich die Entfernungen a und a′ hat.

3. Gegeben L und P; einen Punkt X zu finden, der von L die Entfernung a, von P die Entfernung a′ hat.

4. Gegeben P, P′, und L; einen Punkt X zu finden, der von P und P′ gleiche, von L die Entfernung a hat.

5. Gegeben L und L′; einen Punkt X zu finden, so daß die Linien, welche von ihm nach L und L′ unter den Winkeln α resp. β gezogen, = a resp. b sind.

6. Auf einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, welcher von den beiden anderen Seiten gleich weit entfernt ist.

b) Bei den folgenden Aufgaben fälle von P auf die gegebenen Parallelen ein Lot und ziehe durch einen Punkt desselben oder seiner Verlängerung eine Parallele zu den gegebenen Linien.

Gegeben L ∥ L′ und P; durch P eine Linie zu ziehen, welche die Parallelen in X und Y trifft, so daß, wenn

α) P zwischen L und L′ liegt

7. $PX + PY = s$ 8. $PX - PY = d$

β) P außerhalb L und L′ liegt,

9. $PX + PY = s$ 10. $PX - PY = d$

c) 11. Gegeben die Summe zweier Linien = s und ihre Differenz = d; die Linien sind zu konstruieren.

12. Gegeben die Summe zweier Winkel = σ und ihre Differenz = δ; die Winkel sind zu konstruieren.

13. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

§. 68.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels soll eine Linie gezogen werden.

a) Die Linie geht durch keinen bestimmten Punkt.

1. Die Linie soll = a und ∥ L sein.

2. Die Linie soll = a sein und von den Schenkeln gleiche Stücke abschneiden.

3. Durch den Scheitel eines Winkels außerhalb desselben eine Linie so zu ziehen, daß sie mit beiden Schenkeln gleiche Winkel bildet.

b) Die Linie soll durch einen gegebenen Punkt P gehen, welcher nicht auf einem Schenkel liegt. (Die Aufgaben sind dadurch zu lösen, daß man durch P zu den Schenkeln oder zu Linien, die leicht konstruiert werden können, Parallelen zieht.)

4. Der zwischen den Schenkeln liegende Teil soll gleich einem Schenkel werden.

5. Die Linie soll von den Schenkeln gleiche Stücke abschneiden.

6. Durch P innerhalb des Winkels eine Linie XY so zu ziehen, daß $PX = PY$.

7. Zwischen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks eine Linie = a so zu legen, daß sie durch die Hypotenuse halbiert wird.

8. Durch P außerhalb des Winkels eine Linie, welche den einen Schenkel in X, den anderen in Y trifft, so zu ziehen, daß $PX = XY$.

9. Durch P innerhalb des Winkels eine Linie XY so zu ziehen, daß $PX = 2PY$.

10. Durch P außerhalb des Winkels eine Linie, welche die Schenkel in X und Y schneidet, so zu ziehen, daß $PX = 2XY$.

c) Auf einem der Schenkel des Winkels ist ein Punkt gegeben, durch welchen eine Linie zu ziehen ist.

11. Auf dem einen Schenkel eines Winkels ist P gegeben. Man soll zwischen den Schenkeln eine Linie $XY \parallel L$ so ziehen, daß $PX = XY$.

Auf dem einen Schenkel eines Winkels A ist P gegeben; man soll auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so bestimmen, daß

12. $PX = AX$ 14. $PX - AX = d$
13. $PX + AX = s$ 15. $AX - PX = d$

Auf dem einen Schenkel eines Winkels ist P, auf dem anderen P' gegeben. Man soll auf dem Schenkel, auf welchem P' liegt, einen Punkt X so bestimmen, daß

16. $PX + P'X = s$ 17. $PX - P'X = d$ 18. $P'X - PX = d$

19. Gegeben ein Winkel und Punkt P; durch P eine Linie so zu ziehen, daß sie ein Dreieck mit Umfang s abschneidet. Anal. §. 41.

§. 69.

In einem Dreieck oder Viereck sollen Linien gezogen oder Punkte bestimmt werden.

a) In dem Dreieck ABC soll mit AB eine Parallele XY so gezogen werden (X liegt auf AC, Y auf BC und $BC > AC$), daß

1. $XY = BY$
2. $XY = AX + BY$
3. $XY = BY - AX$
4. $XY = CX + BY$ $(AC < AB)$
5. $XY = CY - AX$ $(BC > AB)$
6. $XY = BY - CX$
7. $CX = BY$
8. $AX + BY = s$ (§. 15, c)
9. $BY - AX = d$ (§. 16, c)
10. $AB + XY = AX + BY$ (§. 37, b)
11. $CX + CY + XY = s$ (§. 24, 2 oder §. 41)
12. $AX + BY + AB + XY = s$ (§. 24, 2 oder §. 41)

b) Die mit AB Parallele XY soll nicht im Dreieck, sondern außerhalb desselben zwischen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über A und B hinaus so gezogen werden, daß

13. $XY = BY$
14. $XY = AX + BY$
15. $XY = CX + BY$ $(CA < AB)$
16. $XY = CY - AX$ $(BC > AB)$
17. $CX = BY$
18. $AX + BY = s$ (8)
19. $BY - AX = d$ (9)
20. $AB + XY = AX + BY$ (10)
21. $CX + CY + XY = s$ (11)
22. $AX + BY + AB + XY = s$ (12)

c) Die mit AB Parallele XY soll außerhalb des Dreiecks zwischen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus so gezogen werden, daß

23. $XY = BY$ $(\alpha < R - \frac{1}{2}\beta)$
24. $XY = BY - AX$
25. $XY = BY - CX$
26. $AX + BY = s$ (8)
27. $BY - AX = d$ (9)
28. $AB + XY = BY + AX$ (§. 42, 6)
29. $CX + CY + XY = s$ (11)
30. $AX + BY + AB + XY = s$ (12)

d) In dem $\triangle ABC$ ist zwischen zwei Seiten eine beliebige Linie zu ziehen.

31. Auf Seite AC des Dreiecks ABC einen Punkt X so zu bestimmen, daß das von X auf AB gefällte Lot $= CX$ wird.

e) In den folgenden Aufgaben finden drei geometrische Örter Anwendung, die sich aus den vorangestellten Lehrsätzen ergeben.

1. Lehrsatz. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Summe der

Senkrechten, die man von einem Punkte der Grundlinie auf die Schenkel fällt, gleich der Höhe zum Schenkel. Beweis. Das gleichschenklige Dreieck sei ABC, auf der Grundlinie AB der Punkt P, $PD \perp AC$, $PE \perp BC$, $AF \perp BC$. Zieht man $PG \parallel BC$ bis zum Durchschnitt mit AF, so ist $\triangle APD \cong PAG$, mithin $PD = AG$, folglich $PD + PE = AG + GF = AF$.

2. Lehrsatz. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Differenz der Senkrechten, die man von einem Punkt der Verlängerung der Grundlinie auf die Schenkel fällt, gleich der Höhe zum Schenkel. Beweis wie vorher.

3. Lehrsatz. Wenn man von einem beliebigen Punkte eines Kreisbogens Senkrechte auf die nach seinen Endpunkten gezogenen Radien fällt, so ist der Abstand der beiden Fußpunkte dieser Senkrechten unveränderlich, nämlich gleich der von dem Endpunkte des einen Radius auf den anderen gefällten Senkrechten. Beweis. Der Kreismittelpunkt sei K, auf dem Bogen AB der Punkt C, $CD \perp KA$, $CE \perp KB$, $AF \perp KB$, G die Mitte von CK, H die Mitte von AK. Nun ist $DG = GE = AH = HF = \frac{1}{2}r$, und weil DCEK ein Sehnenviereck ist, $\angle DGE = 2AKB$, mithin $\triangle DGE \cong AHF$, also $DE = AF$.

Gegeben $\triangle ABC$; auf AB den Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn auf AC und BC die Lote XY und XZ gefällt werden,

32. $XY + XZ = s$ 33. $XY - XZ = d$ 34. $YZ = a'$.

Gegeben $\triangle ABC$; innerhalb desselben den Punkt W so zu bestimmen, daß, wenn man auf BC, CA, AB resp. die Lote WX, WY, WZ fällt

35. $WX + WZ = s$, $WY + WZ = s'$
36. $WX - WZ = d$, $WY - WZ = d'$
37. $WZ - WX = d$, $WZ - WY = d'$
38. $WX - WZ = d$, $WZ - WY = d'$
39. $WX + WZ = s$, $WY - WZ = d$
40. $WX + WZ = s$, $WZ - WY = d$
41. $YZ = a'$, $XZ = b'$
42. $YZ = a'$, $WX + WZ = s$
43. $YZ = a'$, $WX - WZ = d$
44. $YZ = a'$, $WZ - WX = d$

Gegeben Viereck ABCD; innerhalb desselben den Punkt W so zu bestimmen, daß, wenn auf AB, BC, CD, DA resp. die Lote WX, WY, WZ, WV gefällt werden,

45. $WV + WX = s$, $WY + WZ = s'$
46. $WV + WY = s$, $WX + WZ = s'$
47. $WV - WX = d$, $WZ - WY = d'$
48. $WV - WY = d$, $WZ - WX = d'$
49. $WV + WX = s$, $WZ - WY = d$

50. $WV + WY = s$, $WZ - WX = d$
51 $VX = a'$, $YZ = b'$
52. $XZ = a'$, $VY = b'$
53. $VX = a'$, $WZ + WY = s$
54. $VX = a'$, $WZ - WY = d$
55. $XZ = a'$, $WV + WY = s$
56. $XZ = a'$, $WV - WY = d$

Gegeben L, L'. Einen Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn man auf L und L' die Lote XY und XZ fällt,

57. $YZ = a$, $XY + XZ = s$ (Auch nach §. 15, 25)
58. $YZ = a$, $XY - XZ = d$ (Auch nach §. 16, 18)
59. Zwischen den Seiten AC und BC des Dreiecks ABC eine Linie $XY = a$ so zu ziehen, daß $CX = BY$ wird.
60. Zwischen den Seiten AC und BC des Dreiecks ABC eine Linie XY so zu ziehen, daß $XY = CX = BY$ wird.

§. 70.

Mehrere Punkte sind gegeben; es soll eine Linie so gezogen werden, daß die von den Punkten auf dieselbe gefällten Lote gewisse Bedingungen erfüllen.

a) Zwei Punkte P und P' sind gegeben.

1. Durch P eine Linie zu ziehen, welche von P' die Entfernung a hat.
2. Eine Linie zu ziehen, welche PP' nicht schneidet, und von P und P' bezüglich die Entfernungen a und a' hat.
3. Eine Linie zu ziehen, welche PP' schneidet, und von P und P bezüglich die Entfernungen a und a' hat.

b) Gegeben drei Punkte P, P', P''; man soll durch P eine Linie so ziehen, daß, wenn man darauf die Lote P'X und P''Y fällt und

α) die durch P gezogene Linie P'P'' nicht schneidet,

4. $P'X = P''Y$
5. $P'X = 2P''Y$
6. $P'X + P''Y = s$ (verlängere PP'' über P um sich selbst)
7. $P'X - P''Y = d$
8. $PX + PY = s$
9. $PX - PY = d$ (wie 6)

β) die durch P gezogene Linie P'P'' schneidet,

10. $P'X = P''Y$
11. $P'X = 2P''Y$
12. $P'X + P''Y = s$
13. $P'X - P''Y = d$ (wie 6)
14. $PX + PY = s$
15. $PX - PY = d$ (wie 6)
16. $PX = PY$ (wie 6)
17. $P'X = PY$. (Errichte auf PP' in P ein Lot = PP', so liegt der Endpunkt desselben auf P''Y).

Anmerk. Ähnliche Aufgaben siehe §. 75.

§. 71.

Gegeben mehrere Linien und Punkte; man soll durch die Punkte Linien ziehen, welche zu den gegebenen Linien in vorgeschriebenen Beziehungen stehen.

a) Gegeben L, P und P'; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß

1. $PX = P'X$.

2. PX und P'X mit L gleiche Winkel bilden, und P und P' auf derselben Seite von L liegen. Anal. Verlängere P'X über X um PX bis A; PA treffe L in B, so ist $\triangle PXB \cong AXB$; daher $PA \perp L$ und $PB = AB$.

2a. P und P' auf verschiedenen Seiten von L liegen und L den Winkel PXP' halbiert. Anal. wie bei 2.

b) Gegeben L, L', P und P'; man soll den Punkt X auf L und X' auf L' so bestimmen, daß PX und XX' mit L, P'X' und XX' mit L' gleiche Winkel bilden, und

3. P und P' innerhalb des von L und L' gebildeten Winkels liegen (ähnlich wie 2).

4. P innerhalb und P' außerhalb des von L und L' gebildeten Winkels liegt.

5. P und P' außerhalb des von L und L' gebildeten Winkels liegen.

c) P und P' liegen innerhalb einer gegebenen Figur.

6. Innerhalb des Dreiecks ABC sind die Punkte P und P' gegeben; man soll X auf AC, X' auf BC und X'' auf AB so bestimmen, daß PX und XX' mit AC, XX' und X'X'' mit BC, und X'X'' und P'X'' mit AB gleiche Winkel bilden.

7. Gegeben $\triangle ABC$, und in dem von AB und den Verlängerungen der Seiten AC und BC gebildeten Raum die Punkte P und P'; man soll wie in Aufgabe 6 die Punkte X, X', X'' konstruieren.

8. Die ähnliche Aufgabe wie 6, nur sollen P und P' innerhalb eines Rechtecks liegen.

9. Die ähnliche Aufgabe wie 6, nur sollen P und P' innerhalb eines beliebigen Vierecks liegen.

§. 72.

Gegeben die beiden Parallelen L und L'; auf L der Punkt P, auf L' der Punkt P' und außerdem noch P''; man soll durch P'' eine Linie, welche die Parallelen in X und Y schneidet, so ziehen, daß

1. $XY + PP' = s$ 2. $XY - PP' = d$

a) die durch P'' gezogene Linie PP' nicht schneidet und

3. $PX = P'Y$ 5. $PX + P'Y = s$

4. $PX = 2P'Y$ 6. $PX - P'Y = d$

b) die durch P'' gezogene Linie PP' schneidet und

7. $PX = P'Y$ 9. $PX + P'Y = s$
8. $PY = 2\,P'Y$ 10. $PX - P'Y = d$

B. Aufgaben, welche mit Benutzung der Sätze von den Verhältnissen zu lösen sind.

§. 73.

Gegeben $\angle BAC$ und ein Punkt P; man soll durch P eine Linie, welche AB in X und AC in Y schneidet, so ziehen, daß

1. $PX : PY = m : n$; P liegt innerhalb des Winkels.
2. $PX : PY = m : n$; P liegt außerhalb des Winkels.
3. $XY : PX = m : n$; P liegt innerhalb des Winkels.
4. $XY : PX = m : n$; P liegt außerhalb des Winkels.
5. $AX : XY = m : n$ 6. $AX : AY = m : n$
7. $AX + AY = s$. 1. Anal. (Fig. 4). Die Aufgabe ist identisch mit der folgenden: $\triangle ABC$ zu konstruieren, wenn gegeben $a + b$, γ und Punkt Z auf AB. Nach §. 44 ist CSG zu konstruieren; von $\triangle GZB$ oder GZA kennt man nun GZ und den gegenüberliegenden Winkel. 2. Anal. wie 1. Anal. Zieht man $GU \perp CB$, so liegt L auf SU, außerdem ist $\angle ZLG$ ein rechter. 3. Anal. Ziehe durch P Parallelen zu den Schenkeln, welche AB in B und AC in C treffen, so ist $BX + CY$ bekannt; und da $\triangle BPX \sim CYP$, auch $BX \cdot CY = BP \cdot CP$ (s. §. 114, 3). 4. Anal. Verlängere AX um $XE = AY$ und konstruiere $\triangle XEQ \cong YAP$ und in entsprechender Lage. Q ist bestimmt, ferner $\angle PXQ = EAC$. Schneiden sich AP und EQ in D, so geht der durch P, D, Q gelegte Kreis auch durch X.

8. $AX - AY = d$. 1. Anal. (Fig. 4). Die Aufgabe ist identisch mit der folgenden: $\triangle ABC$ zu konstruieren, wenn gegeben $a - b$, γ und Punkt Z auf AB. Nach §. 45 ist HCW zu konstruieren; von $\triangle HZA$ oder HZB kennt man nun HZ und den gegenüberliegenden Winkel. 2. Anal. wie 1. Anal. Zieht man $HV \perp CB$, so liegt L auf WV, außerdem $\angle ZLH$ ein rechter. 3. Anal. ähnlich wie 7; trage auf der Verlängerung von AB von B aus ein Stück $BD = AC - AB + d$ ab, so ist BD Differenz der Höhenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe $= q$, wenn $q^2 = BP \cdot CP$. 4. Anal. Verlängere AX über A bis F, so daß $XF = YA$ wird, und konstruiere $\triangle XFO$ kongruent und in entsprechender Lage mit YAP. Dann wie 7, 4. Anal.

9. $PX \cdot PY = q^2$. 1. Anal. Konstruiere um AXY einen Kreis und verlängere AP, bis es den Kreis trifft. 2. Anal. 3. Anh. 28.

10. $AX \cdot AY = pq$. 1. Anal. a) P liege innerhalb des gegebenen Winkels. Trage $\angle PAY$ an AX in A nach innen an, der freie Schenkel

treffe den um AXY beschriebenen Kreis in Q, so ist $\triangle AXQ \sim APY$, also $AX \cdot AY = AP \cdot AQ$. Trägt man ferner $p = AD$ auf AB und $q = AE$ auf AC ab, so ist auch $AD \cdot AE = AP \cdot AQ$, mithin $\triangle ADQ \sim APE$, daher Punkt Q zu finden. Nun kennt man von $\triangle PQY$ oder PQX eine Seite PQ und den gegenüberliegenden Winkel. b) P liege außerhalb des gegebenen Winkels und zwar auf der Verlängerung von XY über Y. Trage $\angle PAY$ an AX in A nach außen an, der freie Schenkel treffe den um AXY beschriebenen Kreis in Q, so ist Punkt Q wie in a) zu finden; und man kennt dann von $\triangle PQY$ oder PQX eine Seite PQ und den gegenüberliegenden Winkel; im ersteren Fall $\angle PYQ = 2R - QAD$, im zweiten $\angle PXQ = 2R - QAE$. 2. Anal. Für $AX \cdot AY = q^2$ auch auf folgende Weise: Ziehe $PD \parallel AC$, $XZ \parallel DY$ und bestimme zunächst AZ, und dann, da $\triangle DPY \sim ZYX$, den Punkt Y.

11. Innerhalb des Winkels BAC den Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn man von ihm auf AB und AC die Lote XY und XZ fällt, $XY : XZ = m : n$ und $XY + XZ = s$. Anal. Verlängere XY um XZ, und ziehe durch den Endpunkt eine Parallele zu AB; dann §. 114, 1 oder §. 69, 1. Lehrs.

12. Außerhalb des Winkels BAC den Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn von ihm auf AB und AC die Lote XY und XZ gefällt werden, $XY : XZ = m : n$ und $XY - XZ = d$. Anal. ähnlich wie 11.

13. Gegeben die begrenzte Linie AB, außerhalb derselben Punkt P, und von B ist nach der Seite, auf welcher P nicht liegt, eine Linie L unter $\angle \beta$ gezogen. Von P aus soll eine Linie, welche AB in X und L in Y schneidet, so gezogen werden, daß $AX = BY$ ist. 1. 2. 3. Anal. $BX + BY = AB$, daher §. 73, 7. 4. Anal. Konstruiert man $\triangle AXQ$ kongruent und in entsprechender Lage mit BYP, so ist $\angle BAQ$ und $AQ = BP$ bekannt und dadurch Q bestimmt. Ferner $\angle PXQ = PXA + AXQ = BXY + BYP = 2R - \beta$ (§. 11). 5. Anal. Schneiden sich QA und BP in C, so ist QAB Außenwinkel zu ABC, also $\angle QAX = C + ABC$. Ferner $PBY = \beta + ABC$, mithin $C + ABC = YBX + ABC$, oder $C = \beta = 2R - PXQ$; daher QCPX ein Sehnenviereck, von welchem drei Eckpunkte Q, C und P bekannt sind.

Gegeben L und L', A auf L, B auf L' und Punkt P. Durch P eine Gerade zu ziehen, welche L in X und L' in Y so schneidet, daß

14. $AX : BY = m : n$ (sectio rationis des Apollonius). Anal. Man macht $\triangle BYQ \sim AXP$ und in entsprechender Lage, so ist Q bestimmt, da $AP : BQ = m : n$. Ferner $\angle QYP$ bekannt, also §. 11. Eine einfachere Konstruktion wird so erhalten: QB schneide AP in R, so ist PRQY ein Sehnenviereck.

15. $AX \cdot BY = mn$ (sectio spatii des Apollonius). Anal. Man mache $\triangle BYQ \sim APX$ und in entsprechender Lage. Dann ist Q bestimmt,

da $AX:AP = BQ:BY$, also $AP \cdot BQ = AX \cdot BY = mn$ ist. Macht man auf AX $AA' = m$ und auf BY $BB' = n$, so ist $\triangle AA'P \sim BQB'$ und hierdurch Q zu konstruieren. A'P treffe B'Q in R, und PA treffe L' in H; dann ist $\angle PHY$, unter welchem sich die homologen Seiten AP und BY schneiden, gleich $\angle PRQ$, unter welchem sich die homologen Seiten A'P und QB' schneiden, und auch gleich $\angle PYQ$, unter welchem sich die homologen Seiten PX und YQ schneiden. Mithin PQRY auf einem Kreise.

§. 74.

a) Gegeben zwei Parallelen und ein Punkt.

1. Gegeben $L \parallel L'$, P auf L, P' auf L' und P'' nicht auf den Linien; man soll durch P'' eine Linie, welche L in X und L' in Y schneidet, so ziehen, daß $PX:P'Y = m:n$.

2. Gegeben $L \parallel L'$, L'', welche beide schneidet, und P auf keiner der Linien; durch P eine Linie, welche L in X, L' in Y und L'' in Z schneidet, so zu ziehen, daß $ZX:ZY = m:n$.

3. Auf L'', welche die Parallelen L und L' in A und B schneidet, ist P gegeben; man soll durch P eine Linie, welche L und L' in X und Y schneidet, so ziehen, daß $AX \cdot BY = q^2$. 1. Anal. Ziehe $PC \parallel L$ bis zum Durchschnitt mit BX, so ist $AX:PC = AB:BP$; und $BY:PC = AB:AP$; aus beiden Proportionen folgt $q^2:PC^2 = AB^2:AP \cdot BP$, woraus PC zu bestimmen. 2. Anal. Es sei $AX \cdot BY = pq$ gegeben. Konstruiert man $\triangle YBQ \sim PAX$ und in entsprechender Lage, so ist $PA \cdot QB = AX \cdot BY = pq$. Trägt man $p = AD$ und $q = BE$ auf L und L' ab, so ist $PA \cdot QB = AD \cdot BE$, daher $\triangle PAD \sim EBQ$ und Q leicht zu finden. Ferner $\angle PYQ = PYB + BYQ = PXA + APX = 2R - PAX$, also bekannt, und somit Y zu bestimmen. Schneiden sich DP und QE in F, so ist $\angle PFQ = PYQ$, daher Y auf dem Kreise um $\triangle PQF$.

b) Gegeben P, P' und L; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß

4. $PX:P'X = m:n$ (§. 59.)

5. $PX + P'X = s$. Anal. Schlage einen Kreis mit s um P, fälle von P' ein Lot auf L und verlängere es um sich selbst bis Q', so kommt es darauf an, einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P' und Q' geht, und Kreis P berührt (§. 100, 3).

6. $PX - P'X = d$. Anal. ähnlich wie 5.

7. Gegeben P auf L, und P' auf L'; man soll von P nach L' die Linie PX, und von P' nach L die Linie P'Y, welche sich beide in Z schneiden, so ziehen, daß $PZ:ZX = P'Z:ZY = m:n$.

8. Gegeben P auf L, und P' auf L'; man soll von P nach L' die Linie PX, und von P' nach L die Linie P'Y, welche sich beide in

Z unter $\angle \alpha$ schneiden, so ziehen, daß $PZ \cdot ZX = P'Z \cdot ZY$. Anal. Es sei $\angle (PP', L) = \beta$, und $\angle (PP', L') = \gamma$, so ist $\angle XPP' = R - \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$.

Gegeben P auf L, und L'; man soll zwischen L und L' die Linie XY, welche L' in Y unter $\angle \alpha$ schneidet, so ziehen, daß

9. $PX = PY$ 11. $PX = XY$

10. $PX : PY = m : n$ 12. $PX : XY = m : n$

13. Gegeben die Linie AB, und zwischen A und B die Punkte C und D; man soll außerhalb AB den Punkt X so bestimmen, daß $\angle AXC = CXD = DXB$ (§. 59).

Gegeben P auf L, P' auf L', und P'' zwischen beiden Linien; man soll durch P'' eine Linie, welche L in X und L' in Y schneidet, so ziehen, daß

14. $PX + P'Y = s$ (§. 73, 7). Auch ohne Benutzung des Durchschnittspunktes von L und L' ähnlich wie §. 73, 7 zu lösen.

15. $PX - P'Y = d$ (§. 73, 8). Beachte auch 14.

c) Gegeben P, P' und L. Die Linien PX und P'X, welche L resp. in Y und Y' schneiden, so zu ziehen, daß

16. $PX : PY = m : n$ und $P'X : P'Y' = m' : n'$.

17. $PX \cdot PY = q^2$ und $P'X \cdot P'Y' = q'^2$.

18. $PX \cdot PY = q^2$ und $P'X : P'Y' = m : n$.

d) Gegeben drei sich in einem Punkt O schneidende Linien L, L', L'' und

19. P auf L; man soll zwischen L' und L'' eine Linie XY, welche L'' in Y unter $\angle \alpha$ schneidet, so ziehen, daß $PX : XY = m : n$.

20. P auf keiner der drei Linien; man soll durch P eine Linie, welche L in X, L'' in Y und L' in Z schneidet, so ziehen, daß $XZ : YZ = m : n$. Anal. Ziehe durch einen beliebigen Punkt Z' von L' eine Parallele X'Y' zu XY, und $X'U \parallel L''$ (U auf L'), so ist $UZ' : OZ' = m : n$.

21. P auf keiner der drei Linien; durch P eine Linie, welche L in X, L'' in Y und L' in Z schneidet, so zu ziehen, daß $XZ = p$ und $YZ = q$. Anal. ähnlich wie 20.

e) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß sich in gleichen Dreiecken die Grundlinien umgekehrt wie die auf sie gefällten Höhen verhalten.

22. Gegeben die Linie AB und außerhalb derselben die Punkte P und P'; man soll X auf AB so bestimmen, daß $\triangle APX = BP'X$ (2 Aufl.)

23. Gegeben die Linien AB und CD der Größe und Lage nach, und die Linie L; man soll X auf L so bestimmen, daß $\triangle ABX = CDX$.

24. Gegeben die Linien AB und CD der Größe und Lage nach; man soll den Punkt X so bestimmen, daß $\angle AXB = \alpha$, und $\triangle ABX = CDX$.

25. Gegeben die Linien AB, CD und EF der Größe und Lage nach; den Punkt X so zu bestimmen, daß $\triangle ABX = CDX = EFX$.

26. Gegeben P, P', P''; man soll den Punkt X so bestimmen, daß $\angle PXP' = \alpha$ und $\triangle PXP'' = P'XP''$.

§. 75.

Gegeben mehrere Punkte; man soll durch einen Punkt eine Linie ziehen, welche gewissen Bedingungen genügt.

Gegeben die Punkte P, P', P''; man soll durch P eine Linie so ziehen, daß, wenn man darauf von P' und P'' die Lote P'X und P''Y fällt,

1. $PX : PY = m : n$ 2. $P'X : P''Y = m : n$.

3. $P'X : PY = m : n$. Anal. Errichte auf PP' in P ein Lot, welches P''Y in Z trifft, so ist $PP' : PZ = m : n$.

4. $PX \cdot PY = q^2$; zwei Fälle, je nachdem P'P'' von der gesuchten Linie geschnitten wird oder nicht. Anal. Fälle von X auf PP'' ein Lot XA, so ist $AP \cdot PP'' = q^2$.

5. $P'X \cdot P''Y = q^2$; zwei Fälle, wie bei 4. Anal. Errichte auf XY in P ein Lot und fälle auf dieses von P' und P'' Lote, so ist die Aufgabe auf 4 zurückgeführt.

6. $PX \cdot P''Y = q^2$. Anal. wie 4.

Anmerk. Ähnliche Aufgaben siehe §. 70, b.

7. Gegeben P, P' P'' P'''; man soll durch P eine Linie so ziehen, daß, wenn von den drei anderen Punkten darauf Lote P'Q', P''Q'', P'''Q''' gefällt werden, $P'Q' + P''Q'' = P'''Q'''$ ist. Anal. α) Die drei Lote sollen auf derselben Seite der gesuchten Geraden liegen. Ist R die Mitte von P'P'' und RS senkrecht zur gesuchten Geraden, so ist $RS = \frac{1}{2}P'''Q'''$; daher ist der Durchschnittspunkt von P'''R und der gesuchten Geraden bekannt. β) Die Lote liegen nicht auf derselben Seite der gesuchten Geraden; also P'''Q''' auf der einen Seite, P'Q' und P''Q'' auf der anderen. R sei die Mitte von P'P'' und RS senkrecht zur gesuchten Geraden; P'''R und PS schneiden sich in T; dann ist $P'''T = 2RS$; dadurch ist T bekannt. γ) Es liegen P' und P''' auf der einen, P'' auf der anderen Seite der gesuchten Geraden. Ist R die Mitte von P''P''' und RS senkrecht zur gesuchten Geraden, so ist $RS = \frac{1}{2}P'Q'$; daher der Durchschnittspunkt T von P'R und Q'S bestimmt.

8. Gegeben P, P', P'' und L; eine Linie parallel L so zu ziehen, daß, wenn man darauf die Lote PQ, P'Q', P''Q'' fällt, das eine gleich der Summe der beiden anderen ist. Anal. ähnlich wie 7.

9. Gegeben P, P', P'', P'''; man ſoll durch P eine Linie ſo ziehen, daß, wenn von den drei anderen Punkten darauf die Lote P'Q', P''Q'' und P'''Q''' gefällt werden, die Summe dieſer drei Lote = s iſt. Anal. S ſei der Schwerpunkt von △ P'P''P''' und SA ſenkrecht auf der geſuchten Linie, ſo iſt $SA = \frac{1}{3}(P'Q' + P''Q'' + P'''Q''')$.)

§. 76.

In einem Dreieck iſt ein Punkt zu beſtimmen oder eine Linie zu ziehen.

a) In einem Dreieck ABC einen Punkt X ſo zu beſtimmen, daß

1. AX : BX : CX = m : n : p (§. 59).

2. die von X auf die Seiten gefällten Lote = m : n : p.

3. die Entfernungen von den Ecken ſich wie die Entfernungen von den Seiten verhalten. Aufl. Schlage über AB als Sehne einen Kreis, welcher AC berührt, und über AC als Sehne einen Kreis, welcher BC berührt, ſo ſchneiden ſich beide in X.

4. AX + CX = s und BX + CX = s' iſt. Anal. Wenn man mit s um A und mit s' um B Kreiſe ſchlägt, ſo werden dieſe von einem mit CX um X geſchlagenen Kreiſe von innen berührt; alſo §. 100, 6.

5. AX + CX = s und BX − CX = d. Anal. ähnlich der von 4.

6. AX − CX = d und BX − CX = d'. Anal. ähnlich der von 4.

Auf der Seite AB des Dreiecks ABC den Punkt X ſo zu beſtimmen, daß, wenn von X auf AC und BC die Lote XY und XZ gefällt werden,

7. XY : XZ = m : n.

8. XY · XZ = pq. Anal. Beſtimmt man D ſo, daß die auf AC und BC gefällten Senkrechten DE = p und DF = q werden, und trifft eine Parallele zu AB durch D, AC in G, BC in H, ſo iſt XY : XA = p : DG und XZ : XB = q : DH. Durch Zuſammenſetzung ergiebt ſich XA · XB = DG · DH, alſo §. 114, 2. 3.

9. Im △ ABC iſt DE ∥ AB; auf DE den Punkt X ſo zu beſtimmen, daß, wenn XF ⊥ AB, XY ⊥ BC, XZ ⊥ AC, XY : XF = XF : XZ. (Da XF bekannt, ſo Aufl. wie 8.)

10. Gegeben △ ABC; man ſoll auf der durch C zu AB gezogenen Parallelen den Punkt X ſo beſtimmen, daß, wenn CD ⊥ AB, XY ⊥ BC, XZ ⊥ AC, XY : CD = CD : XZ. Anal. Da △ ACD ∞ CXZ und BCD ∞ CXY, ſo iſt CX zu konſtruieren nach der Proportion AC : CX = CX : BC.

11. Im △ ABC iſt von C nach AB beliebig die Tranverſale CD gezogen; man ſoll auf CD den Punkt X ſo beſtimmen, daß, wenn XY ⊥ AB, XZ ⊥ BC und XU ⊥ AC, XZ : XY = XY : XU. Anal. DE ⊥ BC, DF ⊥ AC; und DE · DF = q^2. Setzt man die beiden

Proportionen XZ : CX = DE : CD und XU : CX = DF : CD zusammen und zieht dann aus allen Gliedern die Quadratwurzel, so erhält man XY : CX = q : CD.

b) Im △ ABC soll mit AB eine Parallele, welche AC in X und BC in Y schneidet, so gezogen werden, daß

12. AB : XY = m : n.

13. CX : XY = XY : AC (XY bestimmt durch AB : AC = AC : XY).

14. CX : XY = XY : AB (XY = AC).

15. CX : XY = XY : BC (XY bestimmt durch AB : AC = BC : XY).

16. CX : XY = AY : BC (AY bestimmt durch AB : AC = BC : AY).

17. XY : AY = AY : AB. Anal. ∠ XAY = B, da △ XAY ∞ ABY.

18. XY : AX = CY : AB (AX zu bestimmen durch BC : AB = AB : AX).

19. AX : AB = BY : XY (XY zu bestimmen durch AC : BC = AB : XY).

20. AY : XY = AX : CX. Anal. Ziehe durch C eine Parallele zu AB, welche AY in D schneidet, so ist AD = AB.

21. AX : AY = AY : BY. Anal. wie 20; AD zu bestimmen durch AC : AD = AD : BC.

22. AX : XY = XY : BY. Anal. wie 20; CD zu bestimmen durch AC : CD = CD : BC.

23. CX : XY = XY : BY. Anal. wie 20; CD zu bestimmen durch AC : AB = CD : BC.

24. CX : XY = XY : AX. Anal. wie 20; CD zu bestimmen durch AC : AB = CD : AC.

25. CY : BY = AB : XY. Anal. BC ist in Y stetig geteilt.

Anmerkung. Ähnliche Aufgaben siehe §. 139, 5, 6, 7.

Im △ ABC mit AC eine Parallele XY (X liegt auf BC, Y auf AB) so zu ziehen, daß

26. AX + AY = s. Anal. Ziehe durch X eine Parallele zu AB, welche AC in D trifft, verlängere DX über X bis E, so daß EX = AX; ziehe durch E eine Parallele zu AC, welche BC in G und eine durch C zu AB gezogene Parallele in F trifft; ziehe durch C eine Parallele zu AX, welche AG verlängert in H trifft.

27. AX − AY = d. Anal. ähnlich wie 26, nur daß von X nach AC zu eine Parallele zu EX = AX gezogen wird.

Gegeben △ ABC und auf AC der Punkt P; man soll XY ∥ AB so ziehen, daß, wenn XY von BP in Z getroffen wird,

28. XZ : YZ = m : n. (2 Auflösungen, je nachdem XY die Seiten AC und BC selber oder ihre Verlängerung über C trifft).

29. $XZ \cdot YZ = pq$. Anal. Zieht man zu XY Parallelen, nämlich $EF = p$ zwischen PA und PB, und $GH = q$ zwischen BP und BC, so ist $XZ:p = PZ:PF$ und $ZY:q = BZ:BG$. Durch Zusammensetzung ergiebt sich $PZ \cdot BZ = PF \cdot BG$, also §. 114, 2 und 3.

30. $XY \cdot XZ = q^2$. Anal. wie 29. Es ist Z zu bestimmen aus $PZ \cdot BZ = PF \cdot BG$.

31. Im $\triangle ABC$ ist nach AB die beliebige Transversale CD gezogen; man soll XY (X liegt auf AC, Y auf BC) $\parallel$ AB, welche CD in Z schneidet, so ziehen, daß $XZ = BY$. Anal. Ziehe durch X eine Parallele zu BC, welche AB in F schneidet, und durch A eine Parallele zu BC, welche CF in E schneidet, so ist $AE = AD$.

32. Über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB sind zwei Dreiecke ABC und ABC' gezeichnet (ABC' hat die kleinere Höhe); man soll eine Parallele mit AB, welche AC und BC in X und Y, AC' und BC' in Z und U schneidet, so ziehen, daß $XY:ZU = m:n$. Anal. Ziehe durch C' eine Parallele zu AB, welche BC in D trifft, so wird, da $EY = ZU$ ist, XY von AD in E so geteilt, daß $XY:EY = m:n$; verlängert man CE bis es AB in F schneidet, so ist auch $AB:BF = m:n$.

c) In einem gegebenen Dreieck ist eine beliebige Linie zu ziehen.

33. Im $\triangle ABC$ soll $\parallel$ L eine Linie, welche AC in X, BC in Y und AB in Z schneidet, so gezogen werden, daß $XY:YZ = m:n$ Anal. Ziehe durch B zu L eine Parallele, bis sie AC und AY trifft.

34. Im $\triangle ABC$ soll nach AB die Transversale CD so gezogen werden, daß $AD:CD = CD:DB$. Anal. Schlage um ABC einen Kreis und verlängere CD, bis es den Kreis trifft.

35. Gegeben $\triangle ABC$; von C nach der Verlängerung von AB eine Linie CD so zu ziehen, daß $AD:CD = CD:DB$. Anal. Schlage um ABC einen Kreis.

36. Gegeben $\triangle ABC$; zwischen den Seiten AC und BC eine Linie $XY = a$ so zu legen, daß $CY:AX = m:n$. Anal. Ziehe $DX \parallel BC$ und $CD \parallel XY$; verbinde A mit D, und verlängere es, bis es BC trifft.

37. Gegeben $\triangle ABC$; zwischen den Seiten AC und BC eine Linie XY so zu ziehen, daß $AX = XY = BY$ (§. 141, 3). Anal. Ziehe $XF \parallel BC$ und $BF \parallel XY$; AF trifft BC in D; ziehe durch D eine Parallele zu FB, welche die Verlängerung von AB in E trifft, so ist $AC = CD = DE$ und $BX \parallel EC$. (Da $CX + XY = AC$ und $CY + YX = CB$, so ist auch $\triangle XYC$ ebenso zu konstruieren wie $\triangle ABC$ in §. 62, 1).

38. Gegeben $\triangle ABC$; zwischen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über A und B hinaus eine Linie XY so zu ziehen, daß $AX = XY = BX$ (141, 7), Anal. wie 37.

39. Gegeben $\triangle ABC$; zwiſchen den Seiten AC und BC eine Linie XY ſo zu ziehen, daß $AX+BY=XY$ und $AX:BY=m:n$ (§. 141, 4.) Anal. Ziehe $XG \parallel BC$, und $BG \parallel XY$; AG ſchneidet BC in D; durch D eine Parallele zu XY, welche AB verlängert in F ſchneidet; dann iſt CD beſtimmt durch $AC:CD=m:n$ und $DF=AC+CD$.

40. Gegeben $\triangle ABC$; zwiſchen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über A und B hinaus eine Linie XY ſo zu ziehen, daß $AX+BY=XY$ und $AX:BY=m:n$ (§. 141, 8). Anal. ähnlich wie 39.

41. Gegeben $\triangle ABC$; zwiſchen den Seiten AC und BC eine Linie XY ſo zu ziehen, daß $AX:XY:BY=m:n:p$ (§. 141, 6.) Anal. $BG \parallel YX$ und $XG \parallel CB$ ſchneiden ſich in G; trägt man auf CA und CB reſp. $m=CD$ und $p=CE$ ab, ſo iſt $DE \parallel AG$. Zieht man $DF \parallel AB$ und $EF \parallel GB$, ſo iſt $EF=n$.

42. Gegeben $\triangle ABC$; zwiſchen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über A und B hinaus eine Linie XY ſo zu ziehen, daß $AX:XY:BY=m:n:p$ (§. 141, 10). Anal. ähnlich wie 41.

43. Gegeben $\triangle ABC$; zwiſchen den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus eine Linie XY ſo zu ziehen, daß $AX:XY:BY=m:n:p$. (§. 141, 14.) Anal. ähnlich wie 41.

Dritter Abſchnitt.

Kreis-Aufgaben.

A Aufgaben, welche ohne Anwendung von Verhältniſſen zu löſen ſind.

§. 77.

Gegeben K und P; man ſoll durch P eine Linie ziehen, welche gewiſſen Bedingungen genügt.

a) P liegt auf K. Zur Löſung ſchlage über den von P aus gezogenen Radius einen Halbkreis.

In einem gegebenen Kreiſe

1. durch P eine Sehne zu ziehen, welche vom Mittelpunkt den Abſtand a hat

2. einen Durchmeſſer zu ziehen, welcher von P den Abſtand a hat.

3. eine Sehne = b zu ziehen, welche von P den Abſtand a hat

b) P liegt innerhalb K.

In K durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß

4. sie in P halbiert wird. Oder durch P die kleinste Sehne zu ziehen.

5. XY = a. 1. Anal. PXY ist Tangente an dem Kreise, dessen Radius die vom Mittelpunkt K auf a gefällte Senkrechte ist. 2. Anal. Ziehe in K beliebig eine Sehne AB = a, und schlage mit KP um K einen Kreis, welcher AB in C trifft, so ist KAC ≅ KXP.

6. auf ihr der Peripheriewinkel α steht.

7. die Differenz ihrer Segmente = d ist.

8. ihre Endpunkte von P' gleich weit entfernt sind.

9. In K eine Sehne = a zu ziehen, welche parallel L ist.

c) P liegt außerhalb K.

10. Von P an K eine Tangente zu legen. 1. Anal. Ein über PK als Durchmesser geschlagener Halbkreis geht durch den Berührungspunkt der Tangente. 2. Anal. PA sei die gesuchte Tangente, und KP treffe den Kreis in B; errichtet man auf KP in B eine Senkrechte, welche die Verlängerung von KA in C trifft, so ist △ KBC ≅ KAP. 3. Anal. PA sei die Tangente. Verlängert man KA über A um sich selbst bis D, so ist PD = PK und KD = 2r.

Von P eine Sekante, welche K zuerst in X und dann in Y schneidet, so zu ziehen, daß

11. XY = a (5)

12. PX = XY. 1. Anal. Verlängere KX um sich selber über X hinaus bis A, so ist A bestimmt. 2. Anal. Errichtet man auf PY in X eine Senkrechte, welche den Kreis in B trifft, so ist BY = BP und BY Durchmesser, daher B bestimmt. 3. Anal. Zieht man YC ∥ XK bis zum Durchschnitt mit PK, so ist KC = PK, daher C bestimmt und Y durch CY = 2KX. Oder man zieht XD ∥ YK bis zum Durchschnitt mit PK, so ist PD = DK, daher D bestimmt und X durch DX = $\frac{1}{2}$KY.

13. PX + PY = a.

14. Von P außerhalb K sind nach K zwei Sekanten PAB und PCD gezogen; man soll von P eine dritte Sekante PXY so ziehen, daß sie auf den Bogen AC und BD gleiche Stücke AX und DY nach entgegengesetzter Richtung abschneidet. Anal. $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{XY}$, also AD = XY.

15. Von P außerhalb K ist eine Sekante PAB gezogen, man soll von P aus eine zweite PXY so ziehen, daß der eine zwischen beiden Sekanten enthaltene Bogen doppelt so groß wird, als der andere. Anal. AY = AP.

16. Von P außerhalb K ist nach diesem eine Sekante gezogen; man soll von P aus eine zweite Sekante so ziehen, daß die Summe der zwischen beiden Sekanten enthaltenen Bogen = s ist (siehe 14.)

17. Von P ist durch K ein Durchmesser PAB gezogen; man soll von P aus eine Sekante PXY so ziehen, daß von den beiden zwischen dem Durchmesser und der Sekante liegenden Bogen der eine dreimal so groß wird wie der andere. Anal. PX = KX.

Durch P innerhalb K ist ein Durchmesser AB gezogen; man soll durch P eine Sehne XY so ziehen, daß

18. Bogen $\overset{\frown}{BY} = 2\overset{\frown}{AX}$. Anal. Ein mit PK um P geschlagener Kreis trifft KX in Q, dann ist KP = PQ = QX.

19. Bogen $\overset{\frown}{BY} = 3\overset{\frown}{AX}$. Anal. PX = PK.

d) Innerhalb K sind P und P' gegeben.

20. Durch P und P' innerhalb K sind gleiche und parallele Sehnen zu ziehen.

21. Durch P und P' innerhalb K zwei gleiche Sehnen zu ziehen, welche sich unter $\angle \alpha$ schneiden. Anal. Durchschnittspunkt Z. Es ist $\angle PZK = P'ZK = {}^1/_2\,\alpha$, daher §. 11.

c) Außerhalb K sind P und P' gegeben.

22. Von P und P' außerhalb K zwei Sekanten PYX und P'Y'X' zu ziehen, welche sich gegenseitig in Z halbieren. Anal. PX'XP' ist ein Parallelogramm; daher X'X gleich und parallel PP'.

23. Von P und P' außerhalb K an diesen zwei Sekanten PYX und P'Y'X' zu ziehen, von denen die erstere durch die letztere unter rechtem Winkel halbiert wird. Anal. $\triangle$ PXP' gleichschenklig.

§. 78.

Gegeben K und L; man soll entweder auf L einen Punkt bestimmen, oder zwischen K und L eine Linie ziehen, welche gewissen Bedingungen genügt.

a) Entweder ist L Tangente oder die gesuchte Linie soll Tangente werden.

An K ist eine Tangente gelegt, man soll auf dieser einen Punkt so bestimmen, daß

1. die nach dem anderen Endpunkt des Berührungsdurchmessers gezogene Sekante in der Peripherie halbiert wird.

2. die von ihm an K gelegte und bis zum Durchschnitt mit dem Berührungsdurchmesser verlängerte Tangente im Berührungspunkt halbiert wird. Anal. Die gesuchte Tangente schneidet die gegebene unter einem Winkel von 60°.

3. An K eine Tangente zu legen, welche L parallel ist.

4. An K eine Tangente zu legen, welche mit L $\angle \alpha$ bildet.

b) K und L gegeben; zwischen diesen eine Linie = a so zu ziehen, daß sie

5. $\parallel$ L' wird. 6. K berührt. 7. K unter $\angle \alpha$ schneidet.

8. ihr innerhalb K gelegener Abschnitt = b ist.

9. Von L nach K eine Sekante so zu ziehen, daß sie auf L senkrecht steht und in der Peripherie halbiert wird.

10. Zwischen K und L eine Linie zu ziehen, die in P halbiert wird.

c) Bei Lösung der folgenden Aufgaben beachte §. 77, 5.

In K eine Sehne = a so zu ziehen, daß sie

11. ∥ L wird. 12. auf L senkrecht steht. 13. L unter ∠ α schneidet.

In K eine Sehne, zu welcher der Peripheriewinkel α gehört, so zu ziehen, daß sie

14. ∥ L wird. 15. auf L senkrecht steht. 16. L unter ∠ β schneidet.

d) Gegeben K und L; auf L soll die Linie a so abgetragen werden, daß die von ihren Endpunkten

17. durch den Mittelpunkt K gezogenen Sekanten zwischen ihren Endpunkten eine L parallele Sehne enthalten.

18. an K gelegten Tangenten gleich sind.

19. auf einen gegebenen Durchmesser gefällten Lote in K gleiche Sehnen bilden.

20. an K gelegten Tangenten parallel sind.

21. durch den Mittelpunkt gezogenen Sekanten zwischen ihren Endpunkten eine Sehne = b enthalten. (§. 11, 4.)

e) 22. Gegeben L, K und P; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß PX und die von X an K gelegte Tangente mit L gleiche Winkel bilden. (§. 71, 2.)

23. Gegeben L, K und K'; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß die von ihm an K und K' gelegten Tangenten mit L gleiche Winkel bilden. (Zur Konstruktion benutze §. 79, 1.)

§. 79.

Gegeben K und K'; zwischen diesen eine Linie zu ziehen.

1. An K und K' (K>K') die gemeinschaftlichen Tangenten zu legen. 1. Anal. Die gesuchten äußeren Tangenten seien AA' und BB'. Zieht man durch K' Parallelen zu AA' und BB', welche KA und KB resp. in E und F treffen, so sind die Punkte E und F zu finden, da sie sowohl auf einem mit der Differenz der Radien um K beschriebenen Kreise, als auch auf dem über KK' als Durchmesser geschlagenen Kreise liegen. Die gesuchten inneren Tangenten seien CC' und DD'. Zieht man durch K' Parallelen zu CC' und DD', welche die Verlängerung von KC und KD resp. in G und H treffen, so sind KG und KH die Summen der Radien, und daher die Punkte G und H ähnlich zu finden, wie vorher. 2. Anal. Verlängert man KA und K'A' über A und A' hinaus um sich selbst bis F und F', so ist FF' = KK' und

Trapez KK'F'F nach §. 8, 27 zu konstruieren. Für die inneren Tangenten ist ein Trapez nach §. 8, 37 zu konstruieren.

Zwischen K und K' eine Linie zu ziehen, welche

2. K unter der Sehne a schneidet und K' berührt. Anal. Schlage nach §. 77, 5 einen mit K koncentrischen Kreis.

3. K unter der Sehne a, K' unter der Sehne a' schneidet (§. 77, 5).

4. K unter $\angle \alpha$ schneidet, K' berührt. Anal. Die Linie schneidet K unter einer Sehne, zu welcher der Centriwinkel 2α gehört.

5. K unter $\angle \alpha$, K' unter der Sehne a schneidet.

6. K unter $\angle \alpha$, K' unter $\angle \alpha'$ schneidet.

7. parallel L und deren zwischen den Peripherieen liegendes Stück = a. Anal. Ziehe von K oder K' eine Linie gleich und parallel a.

8. zwischen den Peripherieen liegt und in P halbiert wird. Anal. Verbinde P mit K oder K' und verlängere diese Linie um sich selber.

§. 80.

Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zunächst §. 41, §. 42, §. 43, 1 und dann §. 79, 1 anzuwenden.

1. Von P sind an K zwei Tangenten gezogen; man soll an K eine dritte Tangente so legen, daß das zwischen den beiden ersteren liegende Stück = a ist.

2. Von P nach dem gegebenen Winkel α eine Linie so zu ziehen, daß der Umfang des entstandenen Dreiecks = s ist.

3. Von P nach dem gegebenen Winkel α eine Linie so zu ziehen, daß in dem entstandenen Dreieck der Überschuß der beiden Seiten, welche auf den Schenkeln des Winkels liegen, über die dritte = d wird.

4. Eine gerade Linie zu ziehen, welche K berührt und mit den Schenkeln des gegebenen Winkels α ein Dreieck bildet, dessen Umfang = s.

5. Eine gerade Linie zu ziehen, welche K berührt und mit den Schenkeln des gegebenen Winkels α ein Dreieck bildet, in welchem der Überschuß der beiden Seiten, welche auf den Schenkeln liegen, über die dritte = d ist.

6. An den Bogen eines Kreissektors eine Tangente = a zu legen, so daß ihre Endpunkte auf die Verlängerungen der Radien fallen (§. 11, 4).

§. 81.

Auf oder in einem Kreise sind zwei Punkte P und P' gegeben; man soll durch diese Punkte zwei Sehnen ziehen, welche sich auf der Peripherie schneiden.

a) P und P' liegen auf der Peripherie von K.

Von P und P' zwei Sehnen, welche sich auf der Peripherie schneiden, so zu ziehen, daß

1. sie mit L ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Anal. Die Höhe zur Basis halbiert $\overset{\frown}{PP'}$.

2. sie mit L Winkel bilden, von denen der eine 3mal so groß ist, als der andere. Anal. Berechne die Winkel.

3. das zwischen denselben auf L enthaltene Stück = a ist. Anal. Ziehe durch P eine Parallele PA = a zu L, und verbinde den Endpunkt mit dem Punkt, in welchem die von P' gezogene Sehne L schneidet.

4. die Summe der Sehnen = s ist. (§. 15, 25).

5. die Differenz der Sehnen = d ist. (§. 16, 18.)

6. die Halbierungslinie des entstehenden Peripheriewinkels durch den gegebenen Punkt Q geht.

b) P und P' liegen innerhalb K. Die Aufgaben sind dadurch zu lösen, daß man über PP' als Sehne einen Kreis schlägt, welcher einen bekannten Winkel als Peripheriewinkel faßt.

Durch P und P' zwei Sehnen, welche sich auf der Peripherie schneiden, so zu ziehen, daß

7. die ihre beiden anderen Endpunkte verbindende Sehne Durchmesser wird.

8. sie sich unter $\angle \alpha$ schneiden.

9. die zwischen ihren anderen Endpunkten enthaltene Sehne = a ist.

c) In K ist die Sehne AB gegeben; man soll über AB als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck so zeichnen, daß

10. der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises auf der Peripherie von K liegt. Anal. KM muß senkrecht AB sein.

11. der Mittelpunkt m des eingeschriebenen Kreises auf der Peripherie von K liegt. Bedingung: Centriwinkel AKB > R. Anal. Der Kreis um ABC (BC Basis) muß durch K gehen. (§. 40, 5). Nun ist $\angle AKC = ABC = ACB = 2R - AKB$.

12. der Mittelpunkt m' des zur Grundlinie gehörenden äußeren Berührungskreises auf der Peripherie von K liegt. Bedingung: Centriwinkel AKB < R. Anal. Der Kreis um ABC (BC Basis) geht durch K (§. 40, 5); daher $\angle AKC = 2R - ABC = 2R - BCA = 2R - BKA$.

13. der Durchschnittspunkt der Höhen auf der Peripherie von K liegt. Anal. Bezeichnen wir $\angle AKB$ mit 2α, das Dreieck mit ABC und den Durchschnittspunkt der Höhen mit H, so ist $\angle AHB = 2R - \alpha$, also $\angle ACB = ABC - \alpha$; daher muß BC Tangente sein.

§. 82.

In K ist eine Sehne gegeben; man soll eine zweite Sehne ziehen, welche gewisse Bedingungen erfüllt.

a) In K eine Sehne zu ziehen, welche von der gegebenen Sehne AB halbiert wird und

1. = a ist. 2. mit AB $\angle \alpha$ bildet. 3. durch P geht.

b) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß in einem Trapez die Mittellinie gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten ist; und daß die Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet, gleich der halben Differenz der parallelen Seiten ist.

In K ist die Sehne AB gegeben, und auf ihrer Verlängerung P; man soll durch P eine Sehne so ziehen, daß

4. die Summe der von ihren Endpunkten auf AB gefällten Lote = s ist.

5. die Summe der von A und B auf sie gefällten Lote = s ist.

In K ist die Sehne AB gegeben und auf dieser P; man soll durch P eine Sehne so ziehen, daß

6. die Differenz der von ihren Endpunkten auf AB gefällten Lote = d ist.

7. die Differenz der von A und B auf sie gefällten Lote = d ist.

§. 83.

Konstruktion von Linien an zwei gegebene Kreise.

a) Durch den Durchschnittspunkt P zweier sich schneidenden Kreise K und K′ sollen in beiden Sehnen gezogen werden, welche eine gerade Linie bilden und

1. gleich sind. 1. Anal. Verbinde die Mitte von KK′ mit P. 2. Anal. wie 3.

2. deren Summe = s ist, so daß P zwischen den Endpunkten der Sehnen liegt. Anal. Fälle von K und K′ auf s Lote.

3. deren Summe = s ist, so daß die Endpunkte der Sehnen auf derselben Seite von P liegen. Anal. Verlängere K′P über P um sich selber bis C, schlage mit CP um C einen Kreis, und verfahre mit den Kreisen K und C wie in 2.

4. deren Differenz = d ist, so daß die Endpunkte der Sehnen auf derselben Seite von P liegen. Anal. ähnlich wie 2.

5. deren Differenz = d ist, so daß P zwischen den Endpunkten der Sehnen liegt. Anal. ähnlich wie 3.

6. auf den Sehnen sollen gleiche Peripheriewinkel stehen. Anal. Ziehe von K′ zu KP einen parallelen Radius und verbinde den Endpunkt mit P.

b) Durch den Durchschnittspunkt P zweier sich schneidenden Kreise K und K′ sollen in beiden Sehnen PX und PY (X liegt auf K, Y auf K′) gezogen werden, welche sich unter dem Winkel α schneiden. Diese Aufgaben lassen eine zweifache Analysis zu.

α) Verlängert man PX über P hinaus um PY bis Y′, konstruiert △ PCY′ kongruent und in gleicher Lage mit PK′Y und schlägt mit r′ um C einen Kreis, so ist ∠ KP′C = 2R − α.

β) Trägt man PY auf PX von P aus bis Y″ ab, konstruiert △ PC′Y″ kongruent und in gleicher Lage mit PK′Y, und schlägt mit r′ um C′ einen Kreis, so ist ∠ K′PC′ = α.

In beiden Fällen sind die Aufgaben für die Kreise K und C, oder K und C′ auf die entsprechenden unter a) stehenden zurückzuführen.

In den sich in P schneidenden Kreisen K und K′ zwei Sehnen, welche sich unter dem Winkel α schneiden, so zu ziehen, daß

7. beide Sehnen gleich sind.
8. die Summe beider Sehnen = s ist.
9. die Differenz beider Sehnen = d ist.

Anmerkung. Ähnliche Aufgaben siehe §. 92, 17—20.

c) Gegeben K und K′; man soll auf einer gemeinschaftlichen Tangente AB derselben einen Punkt X so bestimmen, daß, wenn man von X an beide Kreise Tangenten XC und XD legt, welche mit der gemeinschaftlichen Tangente resp. die Winkel α und β bilden, und wenn

α) AB gemeinschaftliche äußere Tangente ist und ferner

a) X zwischen den beiden Berührungspunkten A und B liegt,

10. α = β (§. 71, 2).
11. α + β = σ. Anal. ∠ KXK′ = 2R − ½ σ.
12. α − β = δ. Anal. Verlängere K′B über B hinaus um sich selber bis K″, so ist KXK″ = 2R − ½ δ.
13. α = 2β. Anal. Konstruiere K″ wie in 3) und lege von K an diesen eine Tangente.

b) X auf der Verlängerung der Tangente liegt.

14. α = β.
15. α + β = σ. Anal. ähnlich wie 3.
16. α − β = δ. Anal. ähnlich wie 2.
17. α = 2β. Anal. Die von K′ an K oder umgekehrt gelegte Tangente trifft AB in X.

β) AB gemeinschaftliche innere Tangente ist.

a) X zwischen beiden Berührungspunkten A und B liegt.

18. α = β.
19. α + β = σ. Anal. ähnlich wie 3.
20. α − β = δ. Anal. ähnlich wie 2.
21. α = 2β. Anal. ähnlich wie 8.

b) X auf der Verlängerung der Tangente liegt.

22. α = β. Anal. ähnlich wie 1.
23. α + β = σ. Anal. ähnlich wie 2.
24. α − β = δ. Anal. ähnlich wie 3.
25. α = 2β. Anal. ähnlich wie 4.

d) Gegeben zwei Kreise K und K'; man soll auf einer gemeinschaftlichen Tangente AB zwei Punkte X und Y, welche die Entfernung a haben, so bestimmen, daß, wenn man von X an K eine Tangente legt, welche mit AB $\angle \alpha$ bildet, und von Y eine Tangente an K', welche mit AB $\angle \beta$ bildet, zwischen α und β gewisse Relationen stattfinden. Die folgenden Aufgaben sind auf die unter c) zurückzuführen, wenn man durch X eine Parallele zu der an K' gelegten Tangente zieht, und einen K' gleichen Kreis K'' konstruiert, welcher diese Parallele und AB berührt; K'' ist leicht zu konstruieren, da K'K'' $\parallel$ AB und $=$ a ist.

α) AB sei gemeinschaftliche äußere Tangente.

26. $\alpha = \beta$. 27. $\alpha + \beta = \sigma$. 28. $\alpha - \beta = \delta$. 29. $\alpha = 2\beta$.

β) AB sei gemeinschaftliche innere Tangente.

30. $\alpha = \beta$. 31. $\alpha + \beta = \sigma$. 32. $\alpha - \beta = \delta$. 33. $\alpha = 2\beta$.

Anmerkung. X und Y können verschiedene Lagen haben; nämlich 1) zwischen A und B; 2) auf derselben Verlängerung von AB; 3) auf verschiedenen Verlängerungen von AB; 4) der eine auf AB, der andere auf der Verlängerung.

§. 84.

Zwei koncentrische Kreise und P sind gegeben; durch P eine Linie zu ziehen, welche durch die Kreise in einem vorgeschriebenen Verhältnis geteilt wird.

a) P liegt auf der Peripherie des größeren Kreises; man soll durch P eine Sehne so ziehen, daß sie

1. doppelt so groß ist, als die im kleineren entstandene Sehne.

Anal. Halbiere PK in A. Der Ort für einen Endpunkt der Sehne nach §. 10 zu finden.

2. nmal so groß ist, als die im kleineren entstandene Sehne.

b) P liegt nicht auf der Peripherie eines der beiden Kreise.

3) Innerhalb des kleineren von zwei koncentrischen Kreisen ist P gegeben; man soll durch P eine Linie ziehen, welche in den Peripherieen beider Kreise endigt und in P halbiert wird. Anal. KP ist halbe Diagonale eines Parallelogramms.

Zwei koncentrische Kreise sind gegeben und ein Punkt P, welcher nicht auf der Peripherie eines der beiden Kreise liegt; man soll durch P eine Sehne so ziehen, daß die im größeren Kreise entstandene Sehne

4. doppelt so groß ist, als die im kleineren Kreise entstandene.

Anal. Zeichnet man nach 1 von einem beliebigen Peripheriepunkte eine Sehne der verlangten Art, so haben diese und die gesuchte gleiche Entfernung vom Mittelpunkt.

5. nmal so groß ist, als die im kleineren Kreise entstandene. (2 u. 4.)

§. 85.

a) 1. Zwei parallele Linien L und L′ sind gegeben und K; man soll an K eine Tangente so legen, daß das zwischen L und L′ enthaltene Stück = a ist.

Zwei parallele Linien L und L′ sind gegeben und K, ferner P auf L und P′ auf L′; man soll an K eine Tangente AB so legen, daß A auf L, und B auf L′ zu liegen kommt, und

2. $AP + BP' = a$ (§. 82, b). 3. $AP - BP' = a$ (§. 82, b).

b) In den folgenden Aufgaben finden die drei Lehrsätze von §. 69, e Anwendung.

Gegeben Sektor KAB. Auf $\overset{\frown}{AB}$ den Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn auf KA und KB resp. die Lote XY und XZ gefällt werden,

4. $XY + XZ = s$ 5. $XY - XZ = d$.

Gegeben K, L, L′. Auf der Peripherie von K ist X so zu bestimmen, daß, wenn man auf L und L′ die Lote XY und XZ fällt,

6. $XY + XZ = s$. 7. $XY - XZ = d$. 8. $YZ = a$.

§. 86.

a) Fig. 5. Gegeben K, P und P′ zu verschiedenen Seiten von K; man soll an K eine Tangente AB, welche K in C berührt, so legen, daß, wenn man von P und P′ darauf bezüglich die Lote PA und P′B fällt,

1. $PA = P'B$ 3. $PA - P'B = d$
2. $PA + P'B = s$ 4. $AC + BC = s$

5. $BC - AC = d$. Anal. Verlängere PK über K hinaus um sich selbst bis D und fälle von D auf AB ein Lot.

6. $AC = BC$.

b) Fig. 6. Gegeben K, P und P′; durch P eine Linie AB so zu ziehen, daß, wenn man darauf zwei Lote fällt, von denen das eine P′B durch P′ geht, das andere AC Kreis K in C berührt,

7. $AC = BP'$ 11. $PA - PB = d$ (ähnlich wie 5)
8. $CA + P'B = s$ 12. $PA = PB$ (ähnlich wie 11)
9. $CA - P'B = d$ 13. $CA = PB$ (§. 70, 17)
10. $PA + PB = s$

c) In den folgenden Aufgaben fälle man $K'A' \perp AB$, und beachte K′A′ und A′C.

Fig. 7. Gegeben K, K′ und P; man soll an K eine Tangente AB, welche K in C berührt, so legen, daß wenn man darauf zwei Lote fällt, von denen das eine BP durch P geht, das andere AD Kreis K′ in D berührt,

14. $DA = PB$
15. $DA + PB = s$
16. $DA - PB = d$
17. $AC + BC = s$
18. $AC - BC = d$
19. $AC = BC$ (ähnlich wie 12.)

d) In den folgenden Aufgaben fälle man KA' und $K'B' \perp AB$, und beachte diese Senkrechten, sowie PA' und PB'.

Fig. 8. Gegeben K, K' und P; durch P eine Linie AB so zu ziehen, daß, wenn man darauf zwei Lote CA und DB fällt, welche zugleich K in C und K' in D berühren,

20. $AC = BD$
21. $AC + BD = s$
22. $AC - BD = d$
23. $AP + BP = s$
24. $AP - BP = d$
25. $AP = BP$
26. $AC = BP$

e) In den folgenden Aufgaben ziehe man durch K eine Parallele zu AB, und fälle darauf die Senkrechten $K'A'$ und $K''B'$. Außerdem beachte man KA' und KB'.

Fig. 9. Gegeben K, K' K''; man soll an K eine Tangente AB, welche K in C berührt, so legen, daß, wenn man darauf zwei Lote DA und EB fällt, von denen das eine K' in D, das andere K'' in E berührt,

27. $AD = BE$
28. $AD + BE = s$
29. $AD - BE = d$
30. $AC + BC = s$
31. $AC - BC = d$
32. $AC = BC$.

§. 87.

Einen Kreis zu zeichnen, wenn der Radius = r gegeben.

Damit ein bestimmter Kreis gezeichnet werden kann, müssen noch zwei Bedingungen erfüllt werden. Man kann nun durch jede der beiden Bedingungen einen Ort für den Mittelpunkt des Kreises finden; der Durchschnittspunkt beider Örter ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Im folgenden sind zwölf Bedingungen gegeben, unter denen ein Ort für den Mittelpunkt zu suchen ist; indem man jede Bedingung mit sich selber und allen anderen kombiniert, erhält man $\frac{12 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 78$ verschiedene Aufgaben.

Den Ort für den Mittelpunkt eines mit dem Radius r geschlagenen Kreises zu bestimmen, wenn derselbe

1. durch P geht.
2. L berührt.
3. K von außen berührt.
4. K von innen, rep. einschließend berührt.
5. L unter der Sehne a schneidet.
6. L unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel α schneidet, oder L unter dem Winkel α schneidet, d. h. daß die im Durchschnittspunkt an den Kreis gelegte Tangente mit L den Winkel α bildet.

7. K unter dem Durchmesser schneidet,
8. K unter der Sehne a schneidet.
9. K unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel α schneidet.
10. von K unter dem Durchmesser geschnitten wird.
11. K rechtwinklig schneidet.
12. K unter dem Winkel α schneidet, d. h. daß die im Durchschnittspunkt an beide Kreise gelegten Tangenten den Winkel α bilden.

§. 88.

Einen Kreis zu zeichnen, wenn der Radius nicht gegeben.

a) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch zwei Punkte geht, auf dem Lote liegt, welches auf der Verbindungslinie jener Punkte in ihrer Mitte errichtet ist; und daß der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Linien berührt, auf der Halbierungslinie des Winkels liegt, welchen jene Linien bilden.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P und P′ geht, und dessen Mittelpunkt

1. auf L liegt. 2. auf K liegt.

Einen Kreis zu zeichnen, der L′ und L″ berührt und dessen Mittelpunkt

3. auf L liegt. 4. auf K liegt.

Einen Kreis zu zeichnen, der L′ berührt, von L″ die Entfernung a hat, und dessen Mittelpnnkt

5. auf L liegt. 6. auf K liegt.

Einen Kreis zu zeichnen, der von L′ die Entfernung a′ von L″ die Entfernung a″ hat, und dessen Mittelpunkt

7. auf L liegt. 8. auf K liegt.

9. Einen Kreis zu zeichnen, der die Linien L und L′ berührt und in welchem die Berührungssehne = a ist.

10. Einen Kreis zu zeichnen, der durch P und P′ geht, und der eine durch P″ auf PP′ in gegebener Richtung gezogene Linie so schneidet, daß sie in P″ halbiert wird.

11. Gegeben $\triangle$ ABC und auf AB Punkt P; man soll um P einen Kreis, welcher AC in X und BC in Y schneidet, so schlagen, daß $XY \parallel AB$. Anal. Errichte auf AB in P ein Lot.

b) In den folgenden $3 \cdot 14 = 42$ Aufgaben, in denen ein Kreis gesucht wird, dienen die unter α, β und γ aufgestellten Bedingungen zur Bestimmung des Radius des gesuchten Kreises und einer Geraden als Ort für den Mittelpunkt; zur vollständigen Bestimmung seiner Lage dienen noch die in §. 87 unter 1 bis 12, und die weiter unten unter 13 und 14 aufgestellten Bedingungen.

Einen Kreis zu zeichnen, der

α) die Parallelen L′ und L″ berührt,

β) L′ unter der Sehne a schneidet und die ihr parallele L″ berührt,

γ) die Parallelen L′ und L″ bezüglich unter den Sehnen a und a′ schneidet,

und außerdem

1 bis 12 siehe §. 87.

13. dessen Mittelpunkt auf L liegt.

14. dessen Mittelpunkt auf K liegt.

§. 89.

a) Von Punkten, Geraden und Kreisen in einer Ebene sind je drei Stücke gegeben, so daß jedesmal wenigstens ein Punkt gegeben, welcher auf einer Geraden oder im Umfange eines Kreises liegen soll; einen Kreis zu zeichnen, welcher die gegebenen Stücke berührt.

Hiernach sind folgende 6 Aufgaben zu bilden:

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

1. durch P geht und L in P′ berührt.

2. durch P geht und K in P′ berührt.

3. L und L′ berührt und zwar L in P.

Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Spitze der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist; und zwar ist von demselben die Basis und ein Winkel an der Grundlinie bekannt; auf den Schenkeln entstehen zwei untere Abschnitte, welche gleich dem Radius des gegebenen Kreises sind.

4. L und K, und zwar L in P berührt.

5. L und K, und zwar K in P berührt. 2. Anal. Lege an K in P eine Tangente.

6. K und K′, und zwar K in P berührt.

b) 7. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt M auf L liegt, der durch P auf L geht und L′ berührt. Anal. L′ berühre den Kreis in A; zieht man PB senkrecht L′, so halbiert PA den Winkel BPM.

8. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt M auf L liegt, der durch P auf L geht und K (Radius r) berührt. Anal. Der Berührungspunkt sei B; trägt man auf der Verlängerung von MP von P aus $r = PA$ ab, so ist $MK = MA$.

9. Einen Kreis zu zeichnen, der K in P berührt und L unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel α schneidet. Anal. Ein Ort für M ist KP; L schneide Kreis M in A und B; dann ist durch $\angle \alpha$ und den Winkel, welchen PK mit L bildet, die Gestalt des Dreiecks AMP und seine Lage gegen L, also auch PA bestimmt.

10. Es sind drei gleiche Kreise gegeben, deren Mittelpunkte in gleichen Abständen von einander auf einer geraden Linie liegen; einen Kreis zu konstruieren, welcher den mittelsten einschließend, die beiden anderen Kreise von außen berührt.

§. 90.

Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig oder unter dem Durchmesser schneiden, oder von ihm unter dem Durchmesser geschnitten werden.

a) Die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch P gehen und K rechtwinklig schneiden, liegen auf einer geraden Linie, die man auf folgende Weise konstruieren kann: Wenn M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, welcher K in A schneidet, und wenn der Radius dieses Kreises $MA = MP = x$ gesetzt wird, so ist $MK^2 = r^2 + x^2$; $MP^2 = x^2$; mithin $MK^2 - MP^2 = r^2$. Folglich ist nach §. 47 der Ort für die Spitze eines Dreiecks zu suchen, dessen Grundlinie $= PK$, und in welchem die Differenz der Quadrate der Seiten $= r^2$ ist. Da nun $MP < MK$ sein muß, so ist auf PK in P ein Lot $= r$ zu errichten.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

1. durch P und P′ geht und K rechtwinklig schneidet.
2. L in P berührt und K rechtwinklig schneidet.
3. K′ in P berührt und K rechtwinklig schneidet.
4. durch P geht und K und K′ rechtwinklig schneidet.

b) Die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch P gehen und K unter dem Durchmesser schneiden, liegen auf einer geraden Linie.

Wenn M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, AB der Durchmesser, unter welchem K von dem gesuchten Kreise geschnitten wird, und wenn man $MA = MB = MP = x$ setzt, so ist $MK^2 = x^2 - r^2$; $MP^2 = x^2$; mithin $MP^2 - MK^2 = r^2$. Folglich ist nach §. 47 ein Ort für die Spitze eines Dreiecks zu konstruieren. Da $MP > MK$, so ist auf PK in K ein Lot $= r$ zu errichten.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

5. durch P und P′ geht und K unter dem Durchmesser schneidet.
6. L in P berührt und K unter dem Durchmesser schneidet.
7. K′ in P berührt und K unter dem Durchmesser schneidet.
8. durch P geht, und K und K′ unter dem Durchmesser schneidet.

c) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch P gehen und von K unter dem Durchmesser geschnitten werden, findet man nach §. 48, wenn man beachtet (M sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, $AB = 2x$ der Durchmesser, unter welchem er von K geschnitten wird), daß $MK^2 = r^2 - x^2$, $MP^2 = x^2$, also $MK^2 + MP^2 = r^2$.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

9. Durch P und P' geht und von K unter dem Durchmesser geschnitten wird.

10. L in P berührt und von K unter dem Durchmesser geschnitten wird.

11. K' in P berührt und von K unter dem Durchmesser geschnitten wird.

12. durch P geht und von K und K' unter Durchmessern geschnitten wird.

d) In den folgenden Aufgaben wird der Mittelpunkt des Kreises durch den Durchschnitt je zweier der unter a, b, c gefundenen Örter bestimmt.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht und

13. K rechtwinklig und K' unter dem Durchmesser schneidet.

14. K rechtwinklig schneidet und von K' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

15. K unter dem Durchmesser schneidet und von K' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

e) In den folgenden Aufgaben suche man, wenn M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, die Differenz oder Summe von MK^2 und MK'^2 durch die Differenz oder Summe von r^2 und r'^2 auszudrücken. Man hat dann den Ort für die Spitze eines Dreiecks zu suchen, in welchem die Grundlinie = KK', und in welchem die Differenz oder Summe der Quadrate der Seiten bekannt ist. Zu bemerken ist noch, daß wenn zwei gegebene Kreise den gesuchten Kreis unter dem Durchmesser schneiden, jene beiden sich schneiden müssen.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

16. K, K' und K'' rechtwinklig schneidet.

17. K und K' rechtwinklig und K'' unter dem Durchmesser schneidet.

18. K rechtwinklig, K' und K'' unter dem Durchmesser schneidet.

19. K, K', K'' unter dem Durchmesser schneidet.

20. K und K' rechtwinklig schneidet, von K'' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

21. K und K' unter dem Durchmesser schneidet, von K'' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

22. K rechtwinklig, K' unter dem Durchmesser schneidet und von K'' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

23. K rechtwinklig schneidet und von K' und K'' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

24. K unter dem Durchmesser schneidet und von K' und K'' unter dem Durchmesser geschnitten wird.

25. von K, K′, K″ unter dem Durchmesser geschnitten wird. (Alle drei Kreise müssen sich gegenseitig schneiden; die drei gemeinschaftlichen Sehnen schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des gesuchten Kreises.)

Anmerkung. Für einige dieser Örter erhält man eine sehr einfache und elegante Konstruktion mit Hülfe der Kreispotenzsätze (Vergleiche §. 100.)

B. Aufgaben, welche mit Benutzung der Sätze von den Verhältnissen zu lösen sind.

§. 91.

Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt zu bestimmen.

1. Auf dem zur Sehne AB gehörenden Bogen eines Kreises einen Punkt X so zu bestimmen, daß $AX : BX = m : n$. (§. 59.)

2. Auf dem zur Sehne AB gehörenden Bogen eines Kreises einen Punkt X so zu bestimmen, daß $AX \cdot BX = q^2$. Anal. Ziehe Durchmesser DX, verbinde A mit D, $CX \perp AB$ und bestimme CX.

3. Auf der Sehne AB eines Kreises K ein Lot XY (X liegt auf AB) so zu errichten, daß $AB : AY = AY : XY$. Anal. $AC \perp AY$ bis zum Durchschnitt mit XY. Es verhält sich $CY : AY = AY : XY$, daher $CY = AB$. Ferner D die Mitte von CY. Zieht man $DL \parallel YK$ und $KL \parallel YD$, so ist L bestimmt, $LD = r$, $AD = \frac{1}{2}AB$.

4. Gegeben K, L und L′; auf K einen Punkt X so zu bestimmen, daß die von X auf L und L′ gefällten Lote sich $= m : n$ verhalten.

§. 92.

In Kreisen Sehnen zu ziehen.

a) Gegeben ein Kreis.

1. Gegeben Kreis K und innerhalb desselben Punkt P; durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß $PX : PY = m : n$. 1. Anal. Ziehe $ZY \parallel KX$ bis zum Durchschnitt mit KP, so ist $KP : PZ = m : n$ und ZY zu bestimmen aus $r : ZY = m : n$. 2. Anal. 3. Anh. 27.

2. Gegeben Kreis K, die Sehne AB und auf der Peripherie Punkt P; man soll von P eine Sehne PX, welche AB in Y schneidet, so ziehen, daß $PY : XY = m : n$. Anal. Ziehe $CX \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit PK.

3. Gegeben ein Kreis, die Sehne AB und auf derselben Punkt P; durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß $AX : BY = m : n$.

4. Gegeben ein Kreis und auf der Peripherie die Punkte P und P'; man soll eine Sehne = a so in den Kreis legen, daß, wenn darauf die Lote PX und P'Y gefällt werden, sich PX : P'Y = m : n verhält. Anal. PP' und XY oder ihre Verlängerungen mögen sich in Z schneiden; dann wird PP' durch Z im Verhältnis m : n geteilt.

Gegeben Kreis K und auf einem Durchmesser desselben zwei Punkte P und P', jedoch zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes; man soll durch P und P' zwei gleiche Sehnen so ziehen, daß sie sich

5. auf der Peripherie in X schneiden. Anal. $\angle KXP = KXP'$ (§. 59),

6. auf einem zweiten gegebenen Durchmesser in X schneiden. Anal. ähnlich wie bei 5.

7. Gegeben Kreis K und auf der Peripherie P; von P sind zwei Sehnen PX und PY so zu ziehen, daß PX : PY = m : n und XY Durchmesser wird. Anal. Errichte auf PK in K ein Lot, bis es PX trifft, so ergeben sich zwei ähnliche Dreiecke.

8. Gegeben ein Kreis und innerhalb desselben Punkt P; von P nach der Peripherie zwei Linien PX und PY so zu ziehen, daß PX : PY = m : n und XY Durchmesser wird (§. 59, b.)

9. Gegeben Kreis K und in demselben die Sehne AB; man soll eine Sehne XY, welche AB in Z schneidet, so ziehen, daß XZ : YZ = m : n und $\angle XZA = \alpha$. Anal. KU $\perp$ XY. Dann ist UZ : UX bekannt (nämlich = n − m : n + m oder m − n : m + n). Daraus ergiebt sich ein Ort für X.

10. Gegeben ein Kreis und in demselben die Sehne AB; auf AB den Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn nach der Peripherie die Linie XY gezogen wird, $\angle AXY = \alpha$ und $XY^2 : AX \cdot BX = m:n$. Anal. Verlängere XY bis zur Peripherie, so ist sie auf 9 zurückgeführt.

11. Gegeben ein Kreis und in demselben die Sehne AB; in den Kreis eine Sehne XY = a, welche AB in Z schneidet, so einzutragen, daß XZ : YZ = m : n.

12. Gegeben ein Kreis und in demselben die Sehne AB; man soll in dem Kreise eine Sehne XY = a, welche AB in Z schneidet, so ziehen, daß $XZ \cdot YZ = q^2$. (§. 114, 3.)

13. Gegeben ein Kreis und in demselben die Sehne AB; man soll auf AB einen Punkt X so bestimmen, daß, wenn man nach der Peripherie die Linie XY zieht, XY = a und $XY^2 : AX \cdot BX = m:n$ (10.)

14. Gegeben Kreis K und in demselben die Sehne AB; man soll in demselben eine zweite Sehne XY so ziehen, daß sie durch die Radien KA und KB in drei gleiche Teile geteilt wird.

15. Gegeben Kreis K und in demselben die Sehne AB; man soll zwischen den Verlängerungen der Radien KA und KB eine Linie so ziehen, daß sie durch den Kreis in drei gleiche Teile geteilt wird.

16. Gegeben Kreis K und in demſelben die Sehne AB; man ſoll eine zweite Sehne XY ‖ AB, welche KA in Z, und KB in V trifft, ſo ziehen, daß XZ : ZV = m : n.

b) Gegeben zwei Kreiſe.

α) In den ſich in P ſchneidenden Kreiſen K und K′ zwei Sehnen, welche eine gerade Linie bilden, ſo zu ziehen, daß

17. die Sehnen ſich = m : n verhalten. 1. Anal. Errichtet man auf der geſuchten Linie in P eine Senkrechte, ſo teilt dieſe KK′ im Verhältnis m : n. Da es nach §. 114, 1 zwei Teilpunkte giebt, ſo ſind auch hier zwei Linien vorhanden. 2. Anal. 3. Anh. 27.

18. das Rechteck aus beiden Sehnen = q^2 iſt (§. 75, 4). 2. Anal. 3. Anh. 29.

β) In den ſich in P ſchneidenden Kreiſen K und K′ zwei Sehnen, welche ſich unter dem Winkel α ſchneiden, ſo zu ziehen, daß

19. die Sehnen ſich = m : n verhalten. (Durch §. 83, b zurückzuführen auf 17). 2. Anal. 3. Anh. 33.

20. das Rechteck aus beiden Sehnen = q^2 iſt. (Durch §. 83, b zurückzuführen auf 18). 3. Anal. 3. Anh. 35.

Anmerk. Ähnliche Aufgaben finden ſich in §. 83.

c) Gegeben zwei Kreiſe K und K′; eine gerade Linie ſchneide dieſelben unter gleichen Sehnen AB und CD; der Mittelpunkt E von BC liegt auf der Potenzlinie (dem geometriſchen Ort der Mittelpunkte der Kreiſe, welche beide rechtwinklig ſchneiden); ein auf BC in E errichtetes Lot trifft die Mitte H von KK′.

Eine Linie zu konſtruieren, welche K und K′ unter gleichen Sehnen ſchneidet, ſo daß ſie

21. durch einen gegebenen Punkt der Potenzlinie geht.

22. parallel L iſt.

23. durch P geht.

d) Soll durch zwei Kreiſe K und K′ eine gerade Linie ſo gezogen werden, daß ſich die Sehnen in beiden Kreiſen = m : n verhalten, ſo tritt an die Stelle der Potenzlinie in den Aufgaben unter c) der §. 96, a konſtruierte Kreis als geometriſcher Ort.

Eine gerade Linie zu konſtruieren, welche K und K′ unter Sehnen ſchneidet, die ſich = m : n verhalten, ſo daß ſie

24. parallel L iſt.

25. durch P geht.

Anmerkung. Liegt P auf dem eben erwähnten Ort, ſo wird die Aufgabe ähnlich wie 21.

e) Gegeben K und K′, und P und P′; durch P und P′ zwei parallele Linien zu ziehen, welche K und K′

26. unter gleichen Sehnen schneiden. Anal. Ziehe durch P eine Linie PK″ gleich und parallel P′K′, schlage um K″ einen K′ gleichen Kreis, so ist die Aufgabe auf 23 zurückgeführt.

27. unter Sehnen schneiden, welche sich = m:n verhalten. Anal. Ähnlich wie 26 zurückzuführen auf 25.

f) Sind zwei Kreise K und K′ gegeben, und soll man in ihnen zwei gleiche Sehnen AB und CD ziehen, die sich, nötigenfalls verlängert, unter $\angle \alpha$ in E schneiden, so verlängere AE über E hinaus um ED bis D′, lege an ED′ in E $\angle$ K′ED an und mache den freien Schenkel EK″ = EK′; schlage dann um K″ mit r′ einen Kreis, welcher durch D′ geht und ED′ in C′ trifft; dann ist $\angle$ K′EK″ = DED′ = $2R - \alpha$; also ist Punkt und Kreis K″ zu finden; daher die Aufgaben auf 21 bis 23 zurückzuführen sind.

Zwei gerade Linien zu konstruieren, welche K und K′ unter gleichen Sehnen und sich selber unter $\angle \alpha$ schneiden, so daß ihr Durchschnittspunkt

28. ein gegebener Punkt der Potenzlinie ist.

29. ein beliebiger Punkt P ist.

30. Zwei gerade Linien zu konstruieren, welche K und K′ unter Sehnen im Verhältnis m:n und sich selber unter $\angle \alpha$ schneiden, dessen Scheitelpunkt gegeben ist. Anal. Ähnlich wie 28 und 29 zurückzuführen auf 25.

31. Gegeben K, K′ und P; um P einen Kreis zu beschreiben, welcher K und K′ unter gleichen Sehnen AB und CD schneidet. Anal. E sei der Durchschnittspunkt von AB und CD, KF $\perp$ AB und K′G $\perp$ CD; dann ist $FK^2 = r^2 - AF^2$ und $K'G^2 = r'^2 - CG^2$, folglich $KF^2 - K'G^2 = r^2 - r'^2$; und da PF = PG, so ist KF − K′G = KP − K′P, also sind KF und K′G zu konstruieren nach §. 16, 9.

§. 93.

Sekanten und Tangenten an einen Kreis.

a) Sekanten an einen Kreis.

1. Gegeben ein Kreis und außerhalb desselben P; von P ist eine Sekante PAB gezogen, man soll eine zweite Sekante PXY so ziehen, daß AY:BX = m:n.

2. Gegeben K, L und P; man soll von P nach L eine Linie so ziehen, daß sie durch den einen Durchschnittspunkt mit K im Verhältnis m:n geteilt wird.

3. Gegeben ein Kreis und außerhalb desselben P; von P nach K eine Sekante PXY so zu ziehen, daß PX:XY = XY:PY. Anal. Lege von P an den Kreis eine Tangente.

4. Gegeben ein Kreis und außerhalb desselben P; man soll von P eine Sekante PXY so ziehen, daß PY:PX = PX:XY. Anal.

Lege von P eine Tangente PA an den Kreis; ziehe $BX \parallel AY$, so ist PA in B stetig geteilt; ferner folgt aus $\triangle PAX \sim PBX$, daß $PX^2 = PA \cdot PB$.

5. Gegeben K und in demselben der Durchmesser AB; man soll auf der an K in A gelegten Tangente einen Punkt X so bestimmen, daß, wenn man B mit X verbindet, welche Linie den Kreis noch in Y trifft, $XY = a$ wird. Anal. $BX - BY = a$ und $BX \cdot BY = AB^2$.

b) Tangenten an einen Kreis.

6. Gegeben K und in demselben die Radien KA und KB; man soll zwischen ihren Verlängerungen eine Linie XY, welche den Kreis in Z berührt, so ziehen, daß $XZ : YZ = m : n$. 1. Anal. Ziehe $AC \parallel XY$ bis zum Durchschnitt mit KZ, verlängere AC bis es KY trifft und $CD \parallel KB$ bis zum Durchschnitt mit AK, so verhält sich $AD : DK = m : n$. 2. Anal. Zeichne $\triangle XKY$ zunächst der Gestalt nach (§. 54, h, 2).

Gegeben K und $L \parallel L'$; man soll an K eine Tangente bis zum Durchschnitt mit L und L' so legen, daß sie

7. im Berührungspunkt im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

8. durch L im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

9. Zwischen zwei sich schneidenden Tangenten eines Kreises eine dritte so an den Kreis zu legen, daß sie im Berührungspunkt im Verhältnis $m : n$ geteilt wird. Anal. Fig. 4. $\triangle Am'''B$ bestimmt aus $\angle Am'''B$, $m'''F$ und $AF''' : F'''B = m : n$ (§. 54, h, 2.)

10. Zwischen zwei sich schneidenden Tangenten eines Kreises eine dritte so an den Kreis zu legen, daß das Rechteck aus ihren Segmenten $= q^2$. Anal. Fig. 4. $\triangle AmF \sim Am'''F'''$; daher $AF : m'''F''' = mF : AF'''$ oder $BF''' : m'''F''' = mF : AF'''$ oder $m'''F''' \cdot mF = q^2$; hiernach mF zu bestimmen.

§. 94.

Gegeben ein Kreis und außerhalb desselben zwei Punkte; man soll unter gewissen Bedingungen eine Linie ziehen oder einen Punkt bestimmen.

a) Fig. 5. Gegeben K, P und P'; man soll an K eine Tangente AB, welche K in C berührt, so legen, daß, wenn man darauf von P und P' bezüglich die Lote PA und P'B fällt,

1. $PA : P'B = m : n$
2. $CA : CB = m : n$.
3. $CA \cdot CB = q^2$. (§. 75, 4.)

b) Fig. 6. Gegeben K, P und P'; durch P eine Linie AB so zu ziehen, daß, wenn man darauf zwei Lote fällt, von denen das eine P'B durch P' geht, das andere AC Kreis K in C berührt,

4. $P'B : CA = m : n$
5. $PA : PB = m : n$
6. $PA : P'B = m : n$. (§. 75, 3.)
7. $AC : PB = m : n$. Anal. Fälle von K auf AB ein Lot. (§. 75, 3.)

§. 95.

Gegeben sind Kreise, Linien und Punkte; man soll eine Linie ziehen, die zu denselben in vorgeschriebenen Beziehungen steht.

a) In den folgenden Aufgaben kommen fünf geometrische Örter in Anwendung, nämlich 3. Anhang 23, 27, 28, 29, 31. Unter Teilung einer Strecke ist hier stets nicht nur die innere, sondern auch die äußere verstanden (§. 114, 1).

Gegeben L, K, P; durch P eine Linie, welche L in X und K in Y schneidet, so zu ziehen, daß

1. $PX : PY = m : n$ 2. $PX \cdot PY = q^2$

Gegeben K, K′ und P auf der Peripherie von K; durch P zwischen beiden Peripherieen eine Linie XY so zu ziehen, daß

3. $PX = PY$ 4. $PX : PY = m : n$. 5. $PX \cdot PY = q^2$.

Gegeben K, K′ und P auf keiner der beiden Peripherieen; durch P zwischen beiden Kreisen eine Linie so zu ziehen, daß

6. $PX = PY$ 7. $PX : PY = m : n$ 8. $PX \cdot PY = q^2$

Gegeben P, P′, K; die Linien PX und P′X, welche K resp. in Y und Y′ schneiden, so zu ziehen, daß

9. $PY = YX$ und $P'Y' = Y'X$.

10. $PX : PY = m : n$ und $P'X : P'Y' = m' : n'$.

11. $PX \cdot PY = q^2$ und $P'X \cdot P'Y' = q'^2$.

12. $PX \cdot PY = q^2$ und $P'X : P'Y' = m : n$.

b) Fig. 8. Gegeben K, K′ und P; man soll durch P eine Linie so ziehen, daß, wenn man darauf die Lote CA und DB fällt, welche K und K′ bezüglich in C und D berühren,

13. $CA : DB = m : n$. Anal. Fälle von K und K′ Lote auf AB. (§. 75, 2.)

14. $PA : PB = m : n$. 1. Anal. Verlängere DP bis es CA in E trifft, errichte auf CA in E ein Lot, welches K′P in F trifft und schlage mit FE um F einen Kreis, so verhält sich $FP : PK' = FE : K'D = m : n$. 2. Anal. Teile KK′ durch $G = m : n$, und CD durch $H = m : n$; GH trifft KD in I; dann ist $HI = \frac{nr}{m+n}$, $GI = \frac{mr'}{m+n}$; mithin $GH = \frac{nr - mr'}{m+n}$; $\angle PHG = R$.

c) Fig. 7. Gegeben P, K und K′; man soll an K eine Tangente, welche ihn in C berührt, so legen, daß, wenn darauf die Lote DA und PB gefällt werden, von denen DA den Kreis K′ in D berührt,

15. $DA : PB = m : n$. (§. 75, 2.)

16. $CA : CB = m : n$. Anal. Ziehe durch K eine Parallele zu AB und verbinde P mit K.

d) Fig. 9. Gegeben K, K′, K″; man soll an K eine Tangente,

welche K in C berührt, so legen, daß, wenn man darauf die Lote DA und EB fällt, welche K′ und K″ in D und E berühren,

17. $DA : EB = m : n$.

18. $CA : CB = m : n$. Anal. ähnlich wie bei 14.

§. 96.

Einen Punkt zu bestimmen, so daß die von ihm an gegebene Kreise gezogenen Tangenten in gegebenem Verhältnis stehen.

a) Bei den folgenden Aufgaben kommt es darauf an, einen Punkt derart zu bestimmen, daß die von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß der geometrische Ort für diesen Punkt eine konstruierbare Kreislinie ist. Der Beweis stützt sich auf einen Hülfssatz.

Hülfssatz. Zieht man von einem Punkte auf der Peripherie eines Kreises an einen anderen Kreis eine Tangente, so ist das Quadrat derselben gleich dem doppelten Produkt aus der Centrale und der Entfernung des Punktes von der Potenzlinie.

Beweis. Die Mittelpunkte der Kreise seien K und K′, ihre Radien resp. r und r′, O sei der Durchschnittspunkt von Centrale und Potenzlinie, P ein Punkt auf der Peripherie von K′, PQ senkrecht auf der Potenzlinie, PS senkrecht auf KK′, endlich PL eine Tangente von P an K. Nun ist $PL^2 = PK^2 - r^2$, aber nach dem verallgemeinerten Pythagoreischen Lehrsatze $PK^2 = OK^2 + OP^2 \mp 2OK \cdot OS$ (das obere oder untere Zeichen ist zu nehmen, je nachdem K und K′ auf verschiedenen oder derselben Seite der Potenzlinie liegen), folglich ist $PL^2 = OK^2 + OP^2 \mp 2OK \cdot OS - r^2$. Ferner ist nach der Grundeigenschaft der Potenzlinie $OK^2 - r^2 = OK'^2 - r'^2$, mithin $PL^2 = OK'^2 + OP^2 \mp 2OK \cdot OS - r'^2$. Da endlich nach dem verallgemeinerten Pythagoreischen Lehrsatze $OK'^2 + OP^2 - r'^2 = 2OK' \cdot OS$ ist, so ist $PL^2 = 2OK' \cdot OS \mp 2OK \cdot OS = 2OS \cdot (OK' \mp OK) = 2OS \cdot KK' = 2PQ \cdot KK'$.

Es seien nun K, K′, und M drei Kreise mit gemeinschaftlicher Potenzlinie, so daß also die drei Mittelpunkte in gerader Linie liegen müssen. P sei ein Punkt auf M, PQ senkrecht zur Potenzlinie gezogen, PL und PL′ Tangenten respektive an K und K′. Nun ist nach dem obigen Hülfssatze $PL^2 = 2PQ \cdot MK$ und $PL'^2 = 2PQ \cdot MK'$, also $PL^2 : PL'^2 = MK : MK'$ oder $PL : PL' = \sqrt{MK} : \sqrt{MK'}$. Sind demnach K und K′ gegeben, und soll ein Punkt P so bestimmt werden, daß die von ihm an diese Kreise gezogenen Tangenten sich wie $m:n$ verhalten, so liegt P auf der Peripherie eines Kreises, der mit K und K′ dieselbe Potenzlinie hat, und dessen Mittelpunkt M die Centrale KK′ äußerlich im Verhältnis $m^2 : n^2$ teilt, d. h. so, daß $MK : MK' = m^2 : n^2$ ist. Zunächst ist M nach §. 114, 13, b zu konstruieren. Schneiden sich K und K′, so geht der gesuchte Kreis durch ihre Durchschnittspunkte hindurch. Schneiden sich K und K′ nicht, so ziehe man von dem Durchschnittspunkte

O der Centrale und Potenzlinie die Tangente OT, schlage mit OT um O einen Kreis, der einen über OM errichteten Halbkreis in U treffe, schlage endlich um M mit MU einen Kreis, so ist dessen Peripherie der gesuchte Ort für P.

Anmerkung 1. Bei dem Hülfssatze kann auch P innerhalb K liegen. An die Stelle der Tangente tritt dann das Quadrat der halben kleinsten Sehne, welche man durch P in K ziehen kann. Man gelangt auf diese Weise zu dem allgemeineren Satze: Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Potenzen in bezug auf zwei gegebene Kreise in einem gegebenen Verhältnis $m^2 : n^2$ stehen, ist ein Kreis, der mit den gegebenen die Potenzlinie gemein hat. Sein Mittelpunkt teilt die Centrale in entsprechender Weise in demselben Verhältnis, und zwar äußerlich, wenn die Potenzen gleichartig, innerlich, wenn sie ungleichartig sind.

Anmerkung 2. Ist der Radius des einen Kreises = 0, so schrumpft der Kreis zu einem Punkt zusammen. Die Aufgabe heißt dann: einen Punkt zu finden von der Art, daß, wenn man ihn mit einem gegebenen Punkt verbindet und von ihm an einen gegebenen Kreis eine Tangente legt, sich diese Linien = m : n verhalten. Die Auflösung ist der vorigen ganz ähnlich.

Ist auch der Radius des zweiten Kreises = 0, so heißt die Aufgabe: einen Punkt von der Art zu finden, daß, wenn man ihn mit zwei gegebenen Punkten verbindet, sich diese Verbindungslinien = m : n verhalten. Dies ist dann der Apollonische Lehrsatz §. 59.

In den folgenden Aufgaben soll ein Punkt X gesucht werden; sind von X an gegebene Kreise K, K′, K″ Tangenten zu ziehen, so werden diese mit XA, XA′, XA″ bezeichnet.

1. Gegeben P, P′, K; auf K einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XP' = m : n$.

2. Gegeben P, L, K; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XA = m : n$.

3. Gegeben P, K, K′; auf K′ einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XA = m : n$.

4. Gegeben L, K, K′; auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XA : XA' = m : n$.

5. Gegeben K, K′, K″; auf K″ einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XA : XA' = m : n$.

6. Gegeben P, P′, P″; einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XP' : XP'' = m : n : p$.

7. Gegeben P, P′, K; einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XP' : XA = m : n : p$.

8. Gegeben P, K, K′; einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XP : XA : XA' = m : n : p$.

9. Gegeben K, K′, K″; einen Punkt X so zu bestimmen, daß $XA : XA' : XA'' = m : n : p$.

b) Bei Lösung der nächsten Aufgaben ist folgende Aufgabe zu beachten: Einen Punkt X zu finden, so daß, wenn man an den gegebenen Kreis K die Tangenten XA und XB legt und an den gegebenen Kreis K′ die Tangenten XA′ und XB′, $\angle AXB = A'XB'$ ist.

Da $\triangle AXK \sim A'XK'$, so ist $KX : K'X = r : r'$. Mithin ist der Ort für den Punkt X auch der Ort für die Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie KK′ und dessen Seiten sich $= r : r'$ verhalten. (§. 59.)

10. Gegeben K, K′, L; auf L einen Punkt X so zu bestimmen daß der Winkel, welchen die an K gezogenen Tangenten bilden, gleich dem Winkel ist, welchen die an K′ gezogenen Tangenten bilden.

11. Gegeben K, K′, K″; auf K″ einen Punkt X so zu bestimmen, daß der Winkel, welchen die an K gezogenen Tangenten bilden, gleich dem Winkel ist, welchen die an K′ gezogenen Tangenten bilden.

12. Gegeben K, K′, K″; einen Punkt X so zu bestimmen, daß der Winkel, welchen die an K gezogenen Tangenten bilden, gleich ist sowohl dem Winkel, welchen die an K′ gezogenen, als auch dem, welchen die an K″ gezogenen Tangenten bilden.

§. 97.

Einen Kreis zu zeichnen, wenn der Radius nicht gegeben.

a) In den folgenden Aufgaben sind ein oder zwei Punkte gegeben, durch welche der Kreis gehen soll; die anderen Punkte findet man mit Benutzung des Satzes, daß, wenn von einem Punkt außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente und eine Sekante gezogen, die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt ist.

1. Einen Kreis, der durch P und P′ geht, so zu zeichnen, daß die von P″ an ihn gelegte Tangente $= a$. (Schlägt man mit a um P″ einen Kreis, so ist die Aufgabe auch nach §. 90, 1 zu lösen.)

2. Einen Kreis, der durch P geht, so zu zeichnen, daß die von P′ und P″ an ihn gelegten Tangenten bezüglich $= a$ und b sind. (Schlägt man mit a und b um P′ und P″ Kreise, so ist die Aufgabe auch zu lösen nach §. 90, 4.)

3. Zwischen zwei koncentrischen Kreisen ist P gegeben; man soll um P einen Kreis, welcher die gegebenen Kreise in A und B schneidet, so schlagen, daß KAB eine gerade Linie ist.

4. Gegeben K und in demselben ein Durchmesser AB; man soll auf der Peripherie einen Punkt X so bestimmen, daß XB gleich ist der Entfernung des Punktes X von dem auf AB in A errichteten Lot. *Anal.* Fälle von X auf AB ein Lot, so ist AB in C stetig geteilt.

b) Gegeben P, P′, P″; um P einen Kreis zu konstruieren, an welchen von P′ und P″ die Tangenten P′A und P″B so gezogen werden, daß

5. $P'A + P''B = s$. Anal. Verlängere P'A über A um P''B bis E, so ist $PE = PP''$.

6. $P'A - P''B = d$. Anal. ähnlich wie 5.

7. $P'A : P''B = m : n$. Anal. wie 5, dann für A Ort 27 und der über PP' geschlagene Halbkreis.

8. sie sich unter $\angle \alpha$ schneiden. Anal. Schneiden sie sich in C, so ist der Kreis durch P', P'' und C bestimmt; ferner der Mittelpunkt von $\overset{\frown}{P'P''}$.

§. 98.

Bei der Lösung der nächsten Aufgaben ist folgendes zu beachten:

Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher L unter dem Winkel α schneidet und L' berührt, ist auf folgende Weise zu finden: L und L' schneiden sich in E; der gesuchte Kreis, dessen Mittelpunkt M, berühre L' in D, schneide L in A und B, und von M sei auf L das Lot MC gefällt. Da $\angle \alpha$ bekannt, so kennt man das Verhältnis der Linien MA : MC, also auch MD : MC, wodurch die Richtung der Linie EM gegeben.

Bei mehreren der folgenden Aufgaben ist die Linie, welche der gesuchte Kreis berührt, nicht unmittelbar gegeben; sie ist erst mittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe zu finden.

Gegeben L, L', L''; man soll einen Kreis zeichnen, welcher L unter dem Winkel α schneidet und

1. L' und L'' berührt.
2. L' berührt und dessen Mittelpunkt auf L'' liegt.
3. L' berührt und L'' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a'' schneidet.
4. L' berührt und dessen kleinster Abstand von $L'' = a''$.
5. L' und L'' unter Sehnen schneidet, deren Bogenhöhen bezüglich a' und a'' sind.
6. L' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet, und dessen Mittelpunkt auf L'' liegt.
7. L' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a' schneidet und dessen kleinster Abstand von $L'' = a''$ ist.
8. dessen kleinster Abstand von $L' = a'$ ist und dessen Mittelpunkt auf L'' liegt.
9. dessen kleinster Abstand von L' und L'' bezüglich $= a'$ und a'' ist.
10. L' unter dem Winkel α' schneidet und L'' berührt.
11. L' unter dem Winkel α' und L'' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a'' schneidet.
12. L' unter dem Winkel α' schneidet und dessen kleinster Abstand von $L'' = a''$ ist.

13. L' und L'' unter den Winkeln α' und α'' schneidet.
14. L' in P berührt.

§. 99.

Einen Kreis zu zeichnen, dessen Radius nicht gegeben.

a) In den folgenden Aufgaben, in welchen der gesuchte Kreis eine gegebene Linie unter der Sehne a schneiden soll, konstruiere man einen Hülfskreis mit dem Durchmesser a, welcher den anderen in der Aufgabe gestellten Bedingungen genügt, verbinde den Mittelpunkt desselben mit dem Durchschnittspunkt A der gegebenen Linien, und schlage mit den Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Linie und des Hülfskreises von A Kreisbogen, welche die erste gegebene Linie in zwei Punkten schneiden, durch welche der gesuchte Kreis geht.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

1. L unter der Sehne a schneidet und L' in P berührt.
2. L unter der Sehne a schneidet und K in P berührt,
3. L unter der Sehne a schneidet und durch P und P' geht.

α) $PP' < a$. β) $PP' > a$. Lege durch P und P' einen beliebigen Kreis, ziehe in demselben eine Sehne $= a$, konstruiere einen koncentrischen Kreis, welcher a berührt, lege von A an diesen eine Tangente, so entspricht diese Linie der von A durch den Mittelpunkt des Hülfskreises gezogenen Sekante.

4. L unter der Sehne a schneidet, durch P geht, und dessen Mittelpunkt auf L' liegt.
5. L und L' jede unter der Sehne a schneidet, und durch P geht.

b) In den folgenden Aufgaben (6—8) ist ein Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Linie L unter dem Winkel α schneidet, und außerdem durch zwei gegebene oder doch leicht zu findende Punkte geht. Bei der Auflösung ist folgendes zu beachten: Fig. 10. PP' und L schneiden sich in A; der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß auf dem Lot liegen, welches auf PP' in der Mitte B errichtet ist, dasselbe treffe L in C; auf BC nimm einen beliebigen Punkt D an, $DE \perp L$, $\angle FDE = \alpha$; mit FD um D einen Kreis; CP treffe denselben in G; ziehe $PM \parallel GD$, so ist M der Mittelpunkt, MP der Radius des gesuchten Kreises. **Beweis.** $CM : CD = MP : DG = MK : DF$, also $MK \parallel DF$ und $\angle IMK = EDF = \alpha$.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher L unter dem Winkel α schneidet und

6. durch P und P' geht.
7. durch P geht und dessen Mittelpunkt auf L' liegt.
8. der K berührt und dessen Mittelpunkt auf L' liegt. **Anal.** Ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, r der Radius von K, so konstruiere mit MK um M einen Kreis, derselbe geht durch K und den auf

der anderen Seite von L' entsprechend liegenden Punkt K'; eine L parallele Linie, deren Abstand von L man durch r und α findet, schneidet er unter dem Winkel α.

9. Einen Kreis zu zeichnen, welcher L und K berührt und dessen Berührungssehne zwischen L und K = a. Anal. Fig. 11. Der gesuchte Kreis M berühre K in B und L in A. AB treffe K in C, CK treffe L in D und K in E. Nun ist CD ⊥ L; ferner ist △ CBE ∽ CDA, daher CB · CA = CD·CE und außerdem CA—CB = a (§. 139, b, 6. Auflösung.)

§. 100.

Das Apollonische Berührungsproblem für den Kreis.

Wenn ein Kreis gezeichnet werden soll, der durch gegebene Punkte geht, gegebene Linien oder Kreise berührt, so ist die Anzahl der möglichen Aufgaben aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

Aufgaben	Punkte	Linien	Kreise	Anzahl der zu konstr. Kreise
1	3	—	—	1
2	2	1	—	2
3	2	—	1	2
4	1	2	—	2
5	1	1	1	4
6	1	—	2	4
7	—	3	—	4
8	—	2	1	4
9	—	1	2	8
10	—	—	3	8

Bei Lösung der Aufgaben finden folgende Lehrsätze Anwendung:

1. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte der Verlängerung der gemeinschaftlichen Sehne (Chordale) zweier sich schneidenden Kreise an diese Tangenten zieht, so sind sie gleich lang. Also ist der geometrische Ort für die Punkte, von denen aus an zwei sich schneidende Kreise gleiche Tangenten gezogen werden können, eine gerade Linie.

Auch wenn sich die Kreise nicht schneiden, ist dasselbe der Fall; man findet die gerade Linie, wenn man einen dritten Kreis konstruiert,

welcher beide schneidet, und von dem Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehnen auf die Centrale der gegebenen Kreise ein Lot fällt. Eine andere Konstruktion ergiebt sich nach §. 90, wenn man den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise konstruiert, welche die gegebenen Kreise rechtwinklig schneiden.

2. Lehrsatz. Verbindet man die Endpunkte zweier in zwei gegebenen Kreisen parallel gezogenen Radien durch eine gerade Linie, so schneidet diese die Centrale in einem Punkte, und zwar, wenn die Radien gleichgerichtet sind, im äußeren Ähnlichkeitspunkt, im entgegengesetzten Fall im inneren Ähnlichkeitspunkt. Dieselben teilen die Centrale äußerlich und innerlich im Verhältnis der Radien und haben ferner die Eigenschaft, daß, wenn man von ihnen durch beide Kreise eine Sekante zieht, a) die nach den entsprechenden Durchschnittspunkten gezogenen Radien paarweise parallel sind; b) die Verbindungslinien der entsprechenden Durchschnittspunkte zweier Sekanten parallel sind; c) die Produkte der Entfernungen des Ähnlichkeitspunktes von den beiden nicht entsprechenden Durchschnittspunkten der Sekante mit den Kreisen einander gleich und gleich dem Produkt der von dem Ähnlichkeitspunkt an die beiden Kreise gelegten Tangenten sind. Auch gehen die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise durch diese Punkte. Ist A ein Ähnlichkeitspunkt und zieht man von A zwei Sekanten, von denen die eine Kreis K zuerst in X und dann in Y, und Kreis K′ zuerst in X′ und dann in Y′ schneidet; die andere Kreis K zuerst in Z und dann in V, und Kreis K′ zuerst in Z′ und dann in V′ schneidet; so ist a) $KX \parallel K'X'$, $KY \parallel K'Y'$, $KZ \parallel K'Z'$, $KV \parallel K'V'$; b) $XZ \parallel X'Z'$, $YV \parallel Y'V'$; c) $AX \cdot AY' = AY \cdot AX' = AZ \cdot AV' = AV \cdot AZ'$.

3. Lehrsatz. Berührt ein Kreis die Kreise K und K′ gleichartig, d. h. beide von außen oder beide von innen, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt. Berührt dagegen ein Kreis die Kreise K und K′ ungleichartig, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch den inneren Ähnlichkeitspunkt.

1. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P, P′, P″ geht.

2. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P und P′ geht und L berührt. 1. Anal. Fig. 12. Eine auf PP′ in deren Mitte F errichtete Senkrechte treffe L in E. Um einen beliebigen Punkt m auf FE werde ein Kreis beschrieben, der L in G berühre und PE in C und D schneide. Da E ein Ähnlichkeitspunkt zu M und m ist, so ist $PM \parallel Cm$. Bei der Konstruktion ist neben C auch noch D zu berücksichtigen. 2. Anal. PP′ trifft L in Q. Wird durch PP′ ein beliebiger Kreis gelegt, so ist die von Q an ihn gezogene Tangente $= QA = QB$.

3. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P und P' geht und K berührt. Anal. Fig. 13. Die durch den Berührungspunkt A gelegte gemeinschaftliche Tangente beider Kreise treffe PP' in C. Durch C werde nach K die beliebige Sekante CDE gezogen. Dann ist $CP \cdot CP' = CA^2$ und $CD \cdot CE = CA^2$, also $CP \cdot CP' = CD \cdot CE$. Daher liegen P, P', E, D auf einem Kreise. Konstruktion. Man lege durch P und P' einen beliebigen Kreis, welcher K in D und E trifft; ED und PP' schneiden sich in C; eine von C an K gezogene Tangente trifft K im Berührungspunkt des gesuchten Kreises.

4. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht, und L und L' berührt. 1. Anal. Fig. 12. m sei ein beliebiger L und L' berührender Kreis. Dann liegen M und m auf der Halbierungslinie von $\angle(LL')$; EP treffe m in C und D. Da E ein Ähnlichkeitspunkt zu M und m ist, so ist $PM \parallel Cm$. In der Konstruktion ist auch D zu berücksichtigen. 2. Anal. Fig. 12. $PF \perp EM$, $FP' = PF$. Nun muß M auch durch P' gehen, daher wie 2, 2. Anal.

5. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht, L und K berührt. Anal. Fig. 14. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte treffe den Kreis K in E, und EK treffe den Kreis K in F und L in G. Dann ist $KG \perp L$. Ferner ist $\triangle EFB \sim EAG$, daher $EF : EB = EA : EG$ oder $EB \cdot EA = EF \cdot EG$. Schneidet EP den Kreis M in J, so ist $EB \cdot EA = EJ \cdot EP$, daher $EF \cdot EG = EJ \cdot EP$. Die Punkte F, G, P, J liegen daher auf einem Kreise. Konstr. Man fälle auf L die Senkrechte KG, welche Kreis K in E und F treffe. Dann lege man durch F, G, P einen Kreis, der EP in J treffe, und endlich konstruiere man nach 3) einen Kreis, der durch P und J geht und K berührt; dieser ist der verlangte. Beweis. Es ist noch zu zeigen, daß der gesuchte Kreis M auch L berührt; sein Berührungspunkt mit K sei B, und es mögen sich EB und L in A schneiden. Wie in der Analysis beweist man, daß $EF \cdot EG = EB \cdot EA$ ist. Ferner ist auch $EF \cdot EG = EJ \cdot EP$. Daraus folgt $EJ \cdot EP = EB \cdot EA$. Daher liegen B, J, P, A auf einem Kreise; und es muß der durch P, J, B gehende Kreis, der kein anderer als M sein kann, auch durch A gehen. Ferner ist $\angle BAM = ABM = KBE = KEB$, daher $AM \parallel KE$, also $AM \perp L$. Zusatz. Wie aus dem vorhergehenden zu ersehen, läßt sich leicht noch ein Kreis konstruieren, welcher durch J und P geht, L und K von außen berührt. Es giebt aber noch zwei andere Kreise, welche durch P gehen, L berühren, den Kreis K jedoch einschließend berühren. Der Hülfskreis ist dann durch E, P und G zu legen; der Durchschnittspunkt des Hülfskreises und der Linie EP ist dann noch der dem Punkt J entsprechende zweite Punkt, durch welchen der gesuchte Kreis gehen muß. Im ganzen genügen also vier Kreise der Aufgabe.

6. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht, K_1 und K_2 berührt. Anal. Fig. 15. Der Punkt L, in welchem sich AB und K_1K_2 schneiden, ist äußerer Ähnlichkeitspunkt zu K_1 und K_2. Daher ist $LF \cdot LE = LB \cdot LA$ (2. Lehrsatz, c). Schneidet ferner LP den Kreis M noch in O, so ist auch $LP \cdot LO = LB \cdot LA$. Daher ist $LF \cdot LE = LP \cdot LO$ und E, F, P, O liegen auf einem Kreise. Hiernach kann O konstruiert werden, und nach 3) hat man Kreis M so zu konstruieren, daß er durch P und O geht und K_1 berührt. Zum Beweise nimmt man zunächst B als Schnittpunkt von K_2 und LA an und zeigt, daß er auch auf M liegt. Ferner zeigt man, daß $\angle K_2BM = K_1AM = 2R$ ist. Zusatz. Außer den beiden Kreisen, welche die Kreise K_1 und K_2 gleichartig berühren, giebt es noch 2 Kreise, welche K_1 und K_2 ungleichartig berühren, d. h. den einen von außen, den anderen von innen. Der Hülfskreis ist dann durch P, F und G zu legen; ferner ist P mit dem inneren Ähnlichkeitspunkt zu verbinden.

7. Einen Kreis zu zeichnen, welcher L, L', L'' berührt. (§. 40 bis 46, §. 64.)

8. Einen Kreis zu zeichnen, welcher L, L' und K berührt. 1. Anal. Beschreibt man um M, den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, einen durch den Punkt K gehenden Hülfskreis, welcher die von M auf L und L' gefällten Senkrechten bezüglich in A und B treffe, errichtet man ferner auf MA und MB in A und B Senkrechte, so sind diese beiden Senkrechten bekannt, da sie parallel L und L' in bekannter Entfernung (dem Radius von K) gezogen sind. Der Hülfskreis M ist nun nach 4) zu konstruieren. 2. Anal. L und L' schneiden sich in C, M und K berühren sich in D; CD treffe die durch K zu CM gezogene Parallele in E. Die von E an K gezogenen Tangenten sind L und L' parallel. Zusatz. Der Aufgabe genügen je nach der Lage von L, L' und K 4 oder 8 Kreise.

9. Einen Kreis zu zeichnen, welcher L, K_1 und K_2 berührt. 1. Anal. Die Radien von K_1 und K_2 seien bezüglich r_1 und r_2, und zwar sei $r_1 > r_2$. Die drei Berührungspunkte seien bezüglich A, A_1, A_2. Ein um M durch den Punkt K_2 beschriebener Kreis treffe MA und MA_1 bezüglich in B und B_1. Auf MB werde in B eine Senkrechte L' errichtet, um K_1 durch den Punkt B_1 ein Hülfskreis beschrieben. L' ist parallel L in der Entfernung r_2 gezogen, also bekannt. Der Hülfskreis K_1 hat den Radius $r_1 - r_2$ oder $r_1 + r_2$, ist also auch bekannt. Der Hülfskreis M ist nun nach 5) zu konstruieren. Zusatz. Bei geeigneter Lage der gegebenen Stücke, z. B. wenn sie ganz getrennt liegen, giebt es 8 der Aufgabe genügende Kreise.

Bezeichnen wir ferner die andere in der Entfernung r_2 von L mit dieser parallel gezogene Linie mit L″ und die mit $r_1 - r_2$ resp. $r_1 + r_2$ um K_1 geschlagenen koncentrischen Hülfskreise mit $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$, so ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen, in welcher Weise der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise berührt, und wie der Kreis, dessen Mittelpunkt M mit dem des gesuchten Kreises zusammenfällt, der also durch K_2 geht, $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{k}$, und L′ oder L″ berührt, zu zeichnen ist.

Gesuchte Kreise	Berührung der gegeb. Kreise			Berührung der Hülfskreise und Hülfslinien			Radius des mit K_1 koncentrischen Hülfskreises	Der Radius des mit dem gesuchten koncentrischen Hülfskreises ist um r_2 zu verkürzen oder zu verlängern
	L	K_1	K_2	Hülfslinie L′ od. L″	Hülfskreis $\mathfrak{K}$	Hülfskreis $\mathfrak{k}$		
1	L	a	a	L′	—	a	$r_1 - r_2$	verkürzt
2	L	a	a	L′	→	a	$r_1 - r_2$	verkürzt
3	L	i	i	L″	—	i	$r_1 - r_2$	verlängert
4	L	i	i	L″	—	i	$r_1 - r_2$	verlängert
5	L	i	a	L′	i	—	$r_1 + r_2$	verkürzt
6	L	i	a	L′	i	—	$r_1 + r_2$	verkürzt
7	L	a	i	L″	a	—	$r_1 + r_2$	verlängert
8	L	a	i	L″	a	—	$r_1 + r_2$	verlängert

2. Anal. AA_1 treffe K_1 in C, $C\mathfrak{K}_1$ treffe K_1 in D und L in E. Wie in 5) beweist man, daß $CE \perp L$ und $CD \cdot CE = CA_1 \cdot CA$ ist. Zieht man von C an Kreis M die Tangente CF und an einen beliebigen durch D und E gelegten Kreis die Tangente CG, so ist $CF^2 = CA_1 \cdot CA$ und $CG^2 = CD \cdot CE$, daher $CF = CG$, und Kreis M muß den um C mit CG beschriebenen Kreis rechtwinklig schneiden. Verfährt man ebenso mit K_2, so ist Kreis M nach §. 101, 29 zu konstruieren.

10. Einen Kreis zu zeichnen, welcher K_1, K_2, und K_3 berührt. 1. Anal. Die Radien von K_1, K_2, K_3 seien bezüglich r_1, r_2, r_3 und zwar sei $r_1 > r_2 > r_3$. Ein um M, den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, durch Punkt K_3 beschriebener Hülfskreis treffe MK_1 in B_1, MK_2 in B_2. Beschreibt man um K_1 einen Hülfskreis durch B_1, so ist derselbe bekannt, da sein Radius $r_1 - r_3$ oder $r_1 + r_3$ ist. Desgleichen ist ein um K_2 durch B_2 beschriebener Hülfskreis bekannt. Daher ist der Hülfskreis M nach 6) zu konstruieren.

Zusatz. Bei geeigneter Lage von K_1, K_2, K_3, z. B. wenn sie ganz getrennt von einander und außerhalb einander liegen, giebt es 8

der Aufgabe genügende Kreise. Zwei derselben berühren die drei gegebenen Kreise gleichartig, d. h. alle drei äußerlich oder alle drei innerlich. Drei Kreise berühren je einen der gegebenen Kreise äußerlich und die beiden anderen innerlich. Drei Kreise berühren je einen der gegebenen innerlich und die beiden anderen äußerlich.

In welcher Weise die anderen der Aufgabe genügenden Kreise erhalten werden, und wie die mit dem gesuchten koncentrischen Hülfskreise, deren Radien dann um r_3 zu verkürzen oder zu verlängern sind, erhalten werden, ist aus folgender Tabelle zu ersehen. Hierbei sind die mit $r_1 + r_3$ und $r_2 + r_3$ um resp. K_1 und K_2 geschlagenen Hülfskreise mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$; die mit $r_1 - r_3$ und $r_2 - r_3$ um resp. K_1 und K_2 geschlagenen Hülfskreise mit $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ bezeichnet.

Gesuchte Kreise	Berührung der gegeb. Kreise			Berührung der Hülfskreise				Der Radius des mit dem gesuchten koncentrischen Hülfskreises ist um r_3 zu verkürzen oder zu verlängern
	K_1	K_2	K_3	$\mathfrak{K}_1$	$\mathfrak{K}_2$	$\mathfrak{k}_1$	$\mathfrak{k}_2$	
1	a	a	a	—	—	a	a	verkürzt
2	i	i	i	—	—	i	i	verlängert
3	i	a	i	—	a	i	—	verlängert
4	i	i	a	i	i	—	—	verkürzt
5	a	i	i	a	—	—	i	verlängert
6	i	a	a	i	—	—	a	verkürzt
7	a	i	a	—	i	a	—	verkürzt
8	a	a	i	a	a	—	—	verlängert

2. Anal. Die Berührungspunkte seien A_1, A_2, A_3. Der Punkt C, in welchem sich A_1A_2 und K_1K_2 schneiden, ist ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1 und K_2. Eine beliebige von C aus gezogene Sekante (wozu man auch die Centrale wählen könnte), schneide Kreis K_2 zuerst in D_2 und dann in E_2, ebenso Kreis K_1 erst in D_1 und dann in E_1. Nun ist nach 2. Lehrsatz c) $CE_2 \cdot CD_1 = CA_2 \cdot CA_1$. Zieht man von C an Kreis M die Tangente CF und an einen beliebigen durch D_1 und E_2 gelegten Kreis die Tangente CG, so ist $CF^2 = CA_2 \cdot CA_1$ und $CG^2 = CE_2 \cdot CD_1$, daher $CF = CG$. Der Kreis M muß also einen um C mit CG beschriebenen Kreis rechtwinklig schneiden. Führt man dasselbe an K_1 und K_3 oder K_2 und K_3 aus, so ist der Kreis M nach §. 101, 32 zu konstruieren. Auf §. 90, 16, wie es scheinen möchte, läßt sich die Aufgabe nicht zurückführen, da die drei Kreise, welche der gesuchte rechtwinklig schneiden müßte, eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

§. 101.

Aufgaben, welche auf das Apollonische Berührungsproblem zurückzuführen sind.

a) Aufgaben, welche durch eine einfache Konstruktion auf die von §. 100 zurückzuführen sind.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

1. durch P und P' geht, und L unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet.

2. durch P und P' geht, und dessen kleinster Abstand von L = a ist.

3. durch P und P' geht und mit K die gemeinschaftliche Sehne a hat. Aufl. Ähnlich wie in §. 100, 3 findet man den Durchschnittspunkt von PP' und der gemeinschaftlichen Sehne.

4. durch P geht, L berührt und dessen Mittelpunkt auf L' liegt.

5. durch P geht, L berührt und L' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet.

6. durch P geht, L berührt und dessen kleinster Abstand von L' = a ist.

7. durch P geht, K berührt, und dessen Mittelpunkt auf L liegt.

8. durch P geht, K berührt, und L unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet.

9. durch P geht, K berührt, und dessen kleinster Abstand von L = a ist.

10. L berührt, K berührt und dessen Mittelpunkt auf L' liegt.

11. L berührt, K berührt und L' unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet.

12. L berührt, K berührt und dessen kleinster Abstand von L' = a ist.

13. K und K' berührt und L unter einer Sehne mit der Bogenhöhe a schneidet.

14. K und K' berührt und dessen kleinster Abstand von L = a ist.

b) Wenn ein Kreis eine Linie L berühren und L' unter einer Sehne mit dem Centriwinkel 2α schneiden soll, so beachte §. 98.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

15. durch P geht, L berührt und L' unter dem Winkel α schneidet.

16. L berührt, L' unter dem Winkel α schneidet und K berührt.

c) Gegeben drei Linien L, L', L'', welche sich in einem Punkte schneiden; einen Kreis zu zeichnen, welcher

17. L und L' berührt, und L'' unter einer Sehne = s schneidet.

Anal. Schlage einen beliebigen Kreis, welcher L und L' berührt, so ist durch Vergleichung dieses Kreises mit dem gesuchten der Radius des letzteren als vierte Proportionale zu konstruieren.

18. L berührt, deſſen Mittelpunkt auf L' liegt, und der L'' unter einer Sehne = s ſchneidet.

d) Zur Löſung der folgenden Aufgaben ſind koncentriſche Hülfskreiſe zu zeichnen, entweder mit dem geſuchten oder den gegebenen Kreiſen.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

19. K und K' berührt und deſſen Mittelpunkt auf L liegt.

20. K und K' jeden unter der Sehne s ſchneidet, und deſſen Mittelpunkt auf L liegt.

21. K unter der Sehne s ſchneidet, L' unter der Sehne s ſchneidet, und deſſen Mittelpunkt auf L liegt.

22. L, L', L'' jede unter der Sehne s ſchneidet.

e) Die folgenden Aufgaben ſind dadurch zu löſen, daß man mit Benutzung der Sätze, daß die Produkte aus den Abſchnitten zweier ſich innerhalb eines Kreiſes ſchneidenden Sehnen einander gleich ſind; und daß man, wenn eine Tangente und eine Sekante ſich außerhalb des Kreiſes ſchneiden, die Tangente die mittlere Proportionale zwiſchen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abſchnitt iſt, leicht noch einen zweiten Punkt findet, durch welchen der geſuchte Kreis geht.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

23. durch P geht, L berührt und K unter dem Durchmeſſer ſchneidet.

24. durch P geht, L berührt und K rechtwinklig ſchneidet.

25. durch P geht, K berührt und K' unter dem Durchmeſſer ſchneidet.

26. durch P geht, K berührt und K' rechtwinklig ſchneidet.

f) Die folgenden Aufgaben ſind zu löſen mit Benutzung folgender Lehrſätze:

α) Die Peripherieen aller Kreiſe, welche zwei gegebene Kreiſe unter dem Durchmeſſer ſchneiden, gehen durch zwei feſte Punkte der Centrale beider Kreiſe. Konſtruktion. Konſtruiere nach §. 90, e den geometriſchen Ort der Mittelpunkte der Kreiſe, welche K und K' unter dem Durchmeſſer ſchneiden; oder konſtruiere einen Kreis durch die vier Endpunkte der beiden auf der Centrale KK' ſenkrechten Durchmeſſer; der Mittelpunkt ſei G; ſeine Durchſchnittspunkte mit der Centrale ſeien A und B, ſo daß A auf der Verlängerung über K, B auf der Verlängerung über K' liegt. Errichte auf KK' in G ein Lot, und ſchlage um einen beliebigen Punkt M desſelben mit MA einen Kreis, ſo iſt zu beweiſen, daß dieſer K und K' unter dem Durchmeſſer ſchneidet. Beweis. Es iſt $AK \cdot BK = r^2$. Bezeichnet man die auf MK in K ſenkrechte Sehne des Kreiſes M mit 2x, ſo iſt $AK \cdot BK = x^2$, alſo $r = x$.

β) Die Peripherieen aller Kreise, welche von zwei gegebenen Kreisen den einen unter dem Durchmesser, den anderen rechtwinklig schneiden, gehen durch zwei feste Punkte der Centrale. Beweis ähnlich wie α).

γ) Die Peripherieen aller Kreise, welche zwei gegebene sich nicht schneidende Kreise rechtwinklig schneiden, gehen durch zwei feste Punkte der Centrale. Beweis ähnlich wie α).

δ) Jeder Kreis, welcher zwei gegebene sich schneidende Kreise rechtwinklig schneidet, schneidet auch jeden anderen Kreis rechtwinklig, der durch die Durchschnittspunkte jener beiden Kreise gelegt ist. Beweis leicht.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

27. L berührt, und K und K′ unter Durchmessern schneidet.

28. L berührt, K unter dem Durchmesser und K′ rechtwinklig schneidet.

29. L berührt, K und K′ rechtwinklig schneidet. Anal. für sich schneidende K und K′. Beschreibe um den Durchschnittspunkt von L und der Centrale einen Kreis durch die Durchschnittspunkte von K und K′.

30. K berührt, K′ und K″ unter dem Durchmesser schneidet.

31. K berührt, K′ unter dem Durchmesser und K″ rechtwinklig schneidet.

32. K berührt, K′ und K″ rechtwinklig schneidet. Anal. für sich schneidende K′ und K″. Der gesuchte Kreis berühre K in C, eine gemeinschaftliche Tangente in C treffe die Centrale K′K″ in D. Ein um D durch die Schnittpunkte von K′ und K″ gelegter Kreis geht nach δ) durch C und schneidet somit K rechtwinklig. (§. 90, 1.)

33. K berührt, dessen Mittelpunkt auf L liegt, und der K′ unter dem Durchmesser schneidet. Anal. Konstruiere auf der anderen Seite von L einen K′ gleichen Kreis, welcher gegen L dieselbe Lage hat, so ist die Aufgabe auf 30 zurückgeführt.

34. K berührt, dessen Mittelpunkt auf L liegt und der K′ rechtwinklig schneidet. Anal. wie 33 und dadurch auf 32 zurückgeführt.

g) Zur Lösung der folgenden Aufgaben konstruiere einen dem gegebenen gleichen Kreis, welcher gegen die Halbierungslinie des Winkels, dessen Schenkel der gesuchte Kreis berühren muß, dieselbe Lage wie der gegebene hat und wende dann die unter f) angeführten Lehrsätze an.

Einen Kreis zu zeichnen, welcher

35. L und L′ berührt und K unter dem Durchmesser schneidet.

36. L und L′ berührt und K rechtwinklig schneidet.

37. L berührt, dessen Mittelpunkt auf L′ liegt, und der K unter dem Durchmesser schneidet.

38. L berührt, dessen Mittelpunkt auf L′ liegt, und der K rechtwinklig schneidet.

39. L berührt, L′ unter einer Sehne mit dem Centriwinkel 2α, und K unter dem Durchmesser schneidet.

40. L berührt, L′ unter einer Sehne mit dem Centriwinkel 2α, und K rechtwinklig schneidet.

h) Einen Kreis zu zeichnen, welcher

41. L und K berührt, K′ unter dem Durchmesser schneidet. Anal. Fig. 14. M sei der gesuchte Kreis, so ist (§. 100, 5) $EF \cdot EG = EB \cdot EA = EN^2$, so daß EN gefunden werden kann. Schlägt man daher mit EN um E einen Kreis, so muß der gesuchte Kreis diesen rechtwinklig schneiden, wodurch die Aufgabe auf 28 zurückgeführt ist.

42. L und K berührt und K′ rechtwinklig schneidet. Anal. Durch eine ähnliche Konstruktion wie bei 41. auf 29 zurückzuführen.

43. K und K′ berührt und K″ unter dem Durchmesser schneidet. Anal. Fig. 15. Der gesuchte Kreis sei M, er berührt K und K′ in A und B, L sei der äußere Ähnlichkeitspunkt von K und K′, so liegen L, B, A in gerader Linie (§. 100, 6 und §. 100 Lehrsatz 2); daher $LF \cdot LE = LB \cdot LA = LN^2$, so daß LN gefunden werden kann. Schlägt man nun mit LN um L einen Kreis, so wird dieser den gesuchten rechtwinklig schneiden, so daß die Aufgabe auf 31 zurückgeführt ist. Soll M die Kreise K und K′ ungleichartig berühren, so tritt an die Stelle von L der innere Ähnlichkeitspunkt.

44. K und K′ berührt und K″ rechtwinklig schneidet. Anal. Durch dieselbe Konstruktion wie bei 43 auf 32 zurückzuführen.

Anmerkung. Sind in den Aufgaben 43 und 44 die beiden Kreise K und K′ gleich, so ist die Konstruktion ähnlich wie bei 33.

§. 102.

Konstruktion von drei Kreisen, welche sich gegenseitig berühren (Malfattisches Problem).

Bei Lösung einiger Aufgaben finden folgende Lehrsätze Anwendung:

1. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkt, welcher auf der Verlängerung einer inneren Tangente zweier Kreise liegt, an diese Kreise Tangenten zieht, so ist die Differenz derselben gleich der gemeinschaftlichen inneren Tangente.

2. Lehrsatz. (Umkehrung des vorigen.) Wenn die Differenz der von einem Punkt A an zwei gegebene Kreise M und M′ gelegten Tangenten gleich der gemeinschaftlichen inneren Tangente beider Kreise ist, so liegt der Punkt A auf der Verlängerung einer der inneren Tangenten. Beweis. Die innere Tangente sei CD (C auf M, D auf M′);

von A sei an M' die Tangente AB, an M' die Tangente AE gelegt. Angenommen es wäre AB − AE = CD, ohne daß A auf einer inneren Tangente liegt; schlägt man nun um M einen Kreisbogen mit MA, welcher die Verlängerung von CD in F trifft, so müßte AB − AE = FC − FD sein; oder da AB = FC, auch AE = FD, mithin M'A = M'F, also △ MAM' ≅ MFM' sein, was nicht möglich, so lange nicht A auf einer inneren Tangente liegt.

3. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise M und M' innerhalb eines Winkels BAC die Schenkel desselben resp. in den Punkten B und C berühren, und die von C an M gelegte Tangente CD gleich der von B an M' gelegten Tangente BE ist, so ist ∠ BAM = CAM'. Bew. BC treffe Kreis M in F und M' in G; die von M, M' und A auf BC gefällten Lote seien resp. MH, M'J und AL. Dann ist $CD^2 = CF \cdot CB$; $BE^2 = BG \cdot BC$; mithin BG = CF oder BF = CG und BH = CJ. Nun ist △ ABL ∞ MBH, also AL:BH = AB:BM; ferner △ ACL ∞ M'CJ, also AL:CJ = AC:CM'; folglich AB:BM = AC:CM'; mithin △ ABM ∞ ACM'; also ∠ BAM = CAM'.

Zusatz. Aus 3 folgt, daß der Winkel, welchen die von A an M gelegten Tangenten bilden, gleich dem ist, welchen die von A an M' gelegten bilden.

A. In den folgenden Aufgaben sollen drei sich von außen berührende Kreise konstruiert werden, wenn Berührungspunkte oder gemeinschaftliche Tangenten oder Kreise gegeben sind, welche je 2 von ihnen gleichzeitig berühren. Die gesuchten 3 Kreise seien M, M' M''; M und M' berühren sich in P'', M und M'' in P', M' und M'' in P. Diejenige äußere Tangente an M und M', welche M'' nicht schneidet, sei L''; ebenso sei die an M und M'', welche M' nicht schneidet, L'; und die an M' und M'', welche M nicht schneidet, L. L' und L'' schneiden sich in A, L und L'' in B, L und L' in C; M' berühre AB und BC resp. in U und T. Die gemeinschaftliche innere Tangente von M' und M'' sei J, die von M und M'' sei J', und die von M und M' sei J''; natürlich gehen J, J', J'' resp. durch P, P', P''. J schneide L in D, und L'' in H; J' schneide L in E und L'' in G; J'' schneide L in F und L'' in Q.

a) Wie leicht zu sehen, sind P, P', P'' die Berührungspunkte des dem △ MM'M'' eingeschriebenen Kreises; daher müssen sich die auf den Seiten in den Berührungspunkten errichteten Lote J, J', J'' in einem Punkte O schneiden; und es wird OP = OP' = OP'' sein.

b) Da M'' äußerer Berührungskreis von △ DEO, so ist nach §. 45 PD − PO = EO − ED, und aus demselben Grunde PD − PO = FO − FD; folglich EO − ED = FO − FD oder EO − FO = ED − FD. Hieraus folgt nach §. 45, daß D derjenige Punkt

ist, in welchem L von einem in △ FOE beschriebenen Kreise berührt wird. Der Mittelpunkt desselben sei m, er berühre J′ in R und J″ in W.

Ebenso ist Q derjenige Punkt, in welchem L″ von einem in △ HOG beschriebenen Kreise berührt wird; der Mittelpunkt desselben sei m″, er berühre J in X, J′ in S.

c) Es ist $BQ - BD$ (wenn $BD > BQ$, so nehme man $BD - BQ$) $= UQ - TD$. Nun ist, da sowohl die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise, wie auch die inneren gleich sind, $UQ = PX = P'S$ und $TD = P''W = P'R$. Also $BQ - BD = P'S - P'R = RS$. Daher liegt nach Lehrsatz 2) B auf einer gemeinschaftlichen inneren Tangente von m und m″, während die andere J′ ist.

d) $QW = QP'' + P''W = QU + TD$; und $DX = DP + PX = DT + QU$; folglich $QW = DX$. Daher ist nach Lehrsatz 3) $\angle DBm = QBm''$; folglich wird nach Zusatz 3) die nach c) durch B gehende gemeinschaftliche innere Tangente der Kreise m und m″ mit L und L″ gleiche Winkel bilden oder $\angle ABC$ halbieren. Die Kreise m, m″ berühren also je eine Seite von △ ABC und die Halbierungslinien der ihr anliegenden Winkel.

Unter den oben angegebenen Bedingungen M, M′, M″ zu konstruieren, wenn gegeben

1. P, P′, P″ (O zu suchen).

2. P, P′, J″ (O nach a) zu finden).

3. P, P′, L″. Anal. L″ trifft die Verlängerung von P′P in dem äußeren Ähnlichkeitspunkt Y (§. 100, Lehrsatz 2. Zus.) von M und M′; und es ist $YP \cdot YP' = YP''^2$. Konstruiert man nun um Y mit YP″ einen Kreis, so wird M gefunden nach §. 100, 5.

4. P, P′, und ein Kreis, welcher M und M′ ungleichartig berührt. Anal. Der mit OP um O geschlagene Kreis schneidet den gegebenen rechtwinklig; daher ist die Aufgabe zurückgeführt auf §. 90, 1.

5. P, P′, und ein Kreis, welcher M und M′ gleichartig berührt. Anal. Der gegebene Kreis berühre M in Z, und M′ in Z′; ZZ′ und PP′ schneiden sich verlängert im äußeren Ähnlichkeitspunkt Y (§. 100, Lehrs. 2, Zus.) von M und M′. Eine beliebige durch Y gezogene Linie schneide den gegebenen Kreis in N und N′; dann ist $YN \cdot YN' = YZ \cdot YZ' = YP \cdot YP'$ (§. 100, Lehrs. 2). Folglich liegen P, P′, N, N′ auf einem Kreise; daher findet man den äußeren Ähnlichkeitspunkt Y ähnlich wie in §. 100, 6. Dann ist die Konstruktion ähnlich wie in 3.

6. P, J′, J″. (Leicht auf 1 zurückzuführen.)

7. J, J′ und ein Kreis, welcher M und M′ ungleichartig berührt. (Man findet zunächst P″, und dann P und P′.)

8. P, ein Kreis, welcher M und M′, und einer, welcher M und M″ ungleichartig berührt. (Ähnlich wie in 4 zurückzuführen auf §. 90, 4.)

9. ein Kreis, welcher M und M′; einer, welcher M und M″; und einer, welcher M′ und M″ ungleichartig berührt. (Ähnlich wie in 4 zurückzuführen auf §. 90, 16.)

10. L, J′, J″. (Man findet Kreis m und folglich J nach b).

11. L, L″, J′. (Man findet die Kreise m und m″ nach b), c) und d); mithin auch J und J″.)

12. L, L′, L″ (Malfattische Aufgabe.) Diese Aufgabe kann auch so ausgesprochen werden: In ein gegebenes Dreieck 3 Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt. (Man findet die Kreise m, m″ nach b) c) und d); mithin auch J, J′, J″). (Auflösung von Steiner.) (Andere Auflösungen siehe §. 141, 18.)

B. In den folgenden Aufgaben sollen 3 Kreise M, M′, M″ konstruiert werden und zwar so, daß sich M′ und M″ von außen berühren, M dagegen die beiden anderen einschließend berührt, wenn Berührungspunkte oder gemeinschaftliche Tangenten oder Kreise gegeben, welche je 2 von ihnen gleichzeitig berühren. M und M′ berühren sich in P″, M und M″ in P′, M′ und M″ in P; die gemeinschaftliche durch P′ gehende Tangente von M und M″ sei L′; die gemeinschaftliche durch P″ gehende Tangente von M und M′ sei L″; die gemeinschaftliche innere durch P gehende Tangente von M′ und M″ sei J; endlich sei L eine der beiden gemeinschaftlichen äußeren Tangenten an M′ und M″, und zwar diejenige, welche mit L′ und L″ ein die beiden Kreise M′ und M″ einschließendes Dreieck bildet. Hierbei ist noch darauf zu achten, daß sich L′, L″ und J in einem Punkte schneiden, da P, P′, P″ die Berührungspunkte eines äußeren Berührungskreises von △ MM′M″ sind.

Unter den angegebenen Bedingungen M, M′, M″ zu konstruieren, wenn gegeben

13. P, P′, P″.
14. P′, P″, J.
15. P, P″, L′.
16. P′, P″, L (vergl. 3).

17. P′, P″ und ein Kreis, welcher M′ und M″ ungleichartig berührt (vergl. 4).

18. P′, P″ und ein Kreis, welcher M′ und M″ gleichartig berührt (vergl. 5).

19. P, P′ und ein Kreis, welcher M und M′ gleichartig berührt (vergl. 4).

20. P, P′ und ein Kreis, welcher M und M′ ungleichartig berührt (vergl. 5).

21. P, L′, L″.
22. P′, J, L″.

23. L', L'' und ein Kreis, welcher M' und M'' gleichartig berührt (vergl. 7).

24. J, L' und ein Kreis, welcher M und M' gleichartig berührt (vergl. 7).

25. L, L', L''. (Bestimme den Durchschnittspunkt von J und L ähnlich wie in 10).

Vierter Abschnitt.

Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben. Konstruktionen von Figuren in und um Figuren.

---

§. 103.

Einfache Verwandlungs-Aufgaben über das Dreieck.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wenn c bleibt, und außerdem gegeben ist

1. a 2. α 3. h_a

4. c soll Grundlinie von einem gleichschenkl. Dreieck werden.
5. c soll Schenkel von einem gleichschenkl. Dreieck werden.

Ein Dreieck zu zeichnen, welches

6. gleich ist der Summe zweier gegebenen Dreiecke von gleicher Höhe.
7. gleich ist der Differenz zweier gegebenen Dreiecke von gleicher Höhe.
8. n mal so groß ist, als ein gegebenes Dreieck.

Ein Dreieck zu verwandeln

9. in ein Viereck, so daß eine festliegende Transversale des Dreiecks eine Diagonale des Vierecks wird und die andere Diagonale in eine der Lage nach gegebene Linie fällt.
10. in ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich zwei Seiten des Dreiecks sind.
11. in einen Rhombus, dessen eine Diagonale gleich einer Dreiecksseite ist.

§. 104.

Wenn ein Dreieck in ein anderes verwandelt werden soll, von welchem die Grundlinie = c gegeben, so trage, wenn $c < AB$ ist, $c = AD$ auf AB ab, ziehe $BE \parallel CD$, so ist $\triangle ABC$

= ADE. Ist $c > AB$, so ist die Konstruktion dieselbe; es fällt nur D auf die Verlängerung von AB. Zu beachten ist noch, daß, wenn c gegeben, auch h_c bekannt ist, und umgekehrt.

Eine einfachere Konstruktion, die jedoch in ihrer Verwendung beschränkt ist, ist folgende: Ein mit c um A geschlagener Kreis treffe BC in D. Ein mit BC um D geschlagener Kreis treffe BC oder deren Verlängerung in E. Nun ist $\triangle ADE = ABC$.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

1. c, α bleibt (vergl. §. 135, 2)
2. c, α
3. c, b
4. c, h_a
5. c, t_c
6. p, q
7. Gleichsch. $\triangle$ c
8. Gleichsch. $\triangle$ a
9. R $\triangle$ c

10. In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches gleich einem gegebenen Quadrat ist.

11. c, γ
12. r, γ
13. r, c
14. c, $a^2 - b^2$ (§. 48)
15. c, $a^2 + b^2$ (§. 48)
16. c, $\angle (at_c)$
17. c, $\angle (at_a)$
18. c, $\angle (ct_c)$
19. t_a, γ
20. c, $\alpha - \beta$ (§. 29)
21. c, a:b (§. 59)
22. c, t_a

Bei den folgenden Aufgaben, in denen eine nach der Mitte einer Seite gezogene Transversale (Mittellinie) gegeben, ist §. 19 zu beachten.

23. c, $\angle (bt_a)$
24. t_c, γ

§. 105.

Wenn ein Dreieck in ein anderes verwandelt werden soll, von welchem die Höhe auf die Grundlinie = h_c gegeben, so errichte, wenn h_c kleiner als das von C auf AB gefällte Lot ist, auf AB ein Lot $AD = h_c$, ziehe durch D eine Parallele zu AB, welche AC in E, und durch C eine Parallele zu EB, welche AB verlängert in F trifft, so ist $\triangle AEF = ABC$. Ist h_c größer als das von C auf AB gefällte Lot, so ist die Konstruktion ähnlich. Zu beachten ist, daß bei dieser Verwandlung durch h_c auch c und umgekehrt bestimmt ist.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

1. h_c, α bleibt (vergl. §. 135, 3)
2. h_c, α
3. h_c, t_c
4. h_c, h_a
5. h_c, $p - q$, $(\alpha < R)$
6. h_c, $\angle (ct_c)$
7. R $\triangle$ h_c
8. h_c, γ
9. h_c, r
10. h_c, a + c
11. h_c, a − c
12. Gleichschenkl. $\triangle$ h_c
13. Gleichschenkl. $\triangle$ h_a
14. h_c, t_a
15. h_c, $\angle (at_a)$
16. h_c, $\angle (at_c)$
17. h_c, $\angle (bt_a)$ (§. 104, 23)
18. h_c, $a^2 - b^2$ (§. 47)
19. h_c, $a^2 + b^2$ (§. 48)
20. h_c, $\alpha - \beta$ (§. 29)
21. w_c, $\alpha - \beta$ (§. 28 u. 29)
22. h_c, a:b (§. 59)

23. dessen Spitze in einen außerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt fällt.

24. dessen Spitze in einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt fällt.

§. 106.
Einfache Verwandlungs-Aufgaben für das Parallelogramm.

a) Da jede Diagonale das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke teilt, so sind die Verwandlungen des Parallelogramms auf die des Dreiecks zurückzuführen. Einige Aufgaben sind auch mit Benutzung des Satzes von den Ergänzungsparallelogrammen lösbar.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

1. b, a bleibt
2. α, a bleibt
3. a, α bleibt.
4. h_a, α bleibt.

5. Ein gegebenes Rechteck ab in ein anderes zu verwandeln, von welchem eine Seite c gegeben (§. 135, 1). 1. Anal. Rechteck ab und das gesuchte können Ergänzungsparallelogramme bilden. 2. Anal. Rechteck ab und das gesuchte können Parallelogramme bilden, so daß sie ein Diagonalenparallelogramm gemeinschaftlich haben und die anderen Stücke als Ergänzungsparallelogramme gleich sind. 3. Anal. a und b können Abschnitte einer Sehne sein, und c Abschnitt einer zweiten durch den Teilungspunkt gehenden Sehne. 4. Anal. Ähnlich wie 3. Anal., nur daß a und b Sekantenabschnitte sind. 5. Anal. Da $ab = cx$, so ist x zu konstruieren nach $c:a = b:x$.

Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches gleich ist

6. der Summe zweier gegebenen Parallelogramme von gleicher Höhe.
7. der Differenz zweier gegebenen Parallelogramme von gleicher Höhe.
8. der Summe zweier gegebenen Parallelogramme von gleicher Grundlinie.
9. der Differenz zweier gegebenen Parallelogramme von gleicher Grundlinie.
10. der Summe zweier beliebigen Parallelogramme.
11. der Differenz zweier beliebigen Parallelogramme.
12. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.
13. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.
14. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, wenn c gegeben.

Ein Parallelogramm in einen Rhombus zu verwandeln,

15. so daß eine Seite des Parallelogramms Diagonale des Rhombus wird.
16. wenn gegeben e. 17. wenn gegeben a. 18. wenn gegeben h.

b) Durch die Diagonalen wird das Parallelogramm in vier gleiche Dreiecke geteilt; daher ist in den folgenden Aufgaben zunächst immer der vierte Teil des Parallelogramms zu verwandeln.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

19. e, f 20. f, ∠ (ae) 21. a, ε 22. e, ε

§. 107.

Verwandlungen des Trapezes.

1. Ein Trapez in ein Dreieck zu verwandeln mit Beibehaltung von α und d.

2. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln mit Beibehaltung von α und d.

3. Ein Trapez in ein Dreieck zu verwandeln mit Beibehaltung von a und α.

4. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln mit Beibehaltung von a und α.

Bei Lösung der folgenden Aufgaben, in denen ein Trapez in ein anderes verwandelt werden soll, beachte, daß, wenn h gegeben, damit auch $a+c$ gegeben ist und umgekehrt. Ferner sind d, h und α von einander abhängige Stücke. Endlich ist jedes Trapez gleich einem Dreieck, welches dieselbe Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich der Summe der parallelen Seiten ist, z. B. dem Hülfsdreieck AFC in §. 8, c.

Ein gegebenes Trapez in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

5. h, b, f. (Die Anal. dieser Aufgabe wird vollständig gegeben, da die der folgenden ähnlich sind.) Anal. Verwandle Trapez ABCD in ein Dreieck AFK, dessen Höhe aus K gleich h sei (§. 107, 1 und §. 105). Zeichnet man das gesuchte Trapez EFGH so, daß E auf AB liegt, so liegen K, H, G in einer zu AB gezogenen Parallele; G und H sind leicht zu konstruieren; ferner $AF = EF + HG$, daher $AE = HG$.

6. h, a, f
7. h, a, b
8. h, a, α
9. h, b, α
10. h, α, β
11. d, α, β
12. b, d, α
13. a, d, α
14. $a+b+c+d$, h, α
15. a, c, f
16. a, b, c
17. a, c, α

§. 108.

Verwandlungen des Vierecks und Fünfecks.

1. Ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

2. Ein Viereck in ein gleichschenkliges Dreieck mit gegebener Grundlinie zu verwandeln.

3. Ein Viereck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

4. Ein Dreieck so in ein Viereck zu verwandeln, daß eine zwischen zwei Seiten des Dreiecks festliegende Gerade die eine Diagonale des Vierecks wird und die andere Diagonale in gegebener Richtung von der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks ausläuft.

Ein Viereck in ein anderes zu verwandeln, wenn gegeben

5. a, b, e, c. (Die Auflösung dieser Aufgabe wird vollständig gegeben, da die der folgenden 6—12 ähnlich sind.) Aufl. Fig. 16. Gegeben Viereck ABCD. Zeichne ein Dreieck EBF, dessen Seiten a, b und e sind. Verwandle Viereck ABCD in ein Dreieck ABH, dieses in ein anderes ABI, in welchem eine Seite in die Richtung von BF fällt, dieses wieder in ein anderes KBF, in welchem eine Seite BF und ein Winkel EBF ist; durch K ziehe eine Parallele zu EF und schlage mit c von F einen Kreisbogen, welcher dieselbe in G trifft, so ist Viereck EBFG = ABCD.

6. a, b, β, c 8. a, b, α, β 10. a, b, f, β 12. a, b, β, δ
7. a, b, e, α 9. a, b, e, f 11. a, b, e, δ

13. Ein Viereck mit Beibehaltung von e, f, ε so umzuformen, daß es durch eine Diagonale in zwei gleiche Dreiecke geteilt wird. Anal. Ziehe durch die Mitte von f eine Parallele zu e und durch die Endpunkte von e Parallelen zu f.

14. Ein Viereck mit Beibehaltung von e, f, ε in ein Parallelogramm zu verwandeln.

15. Ein Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Grundlinie in eine Seite des Fünfecks fällt.

16. Ein Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in einen gegebenen Punkt des Umfanges zu liegen kommt und dessen Grundlinie in eine Seite des Fünfecks fällt.

17. Innerhalb eines Fünfecks ist ein Punkt P gegeben und mit einem Punkt Q des Umfanges verbunden; das Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in P und dessen Grundlinie in die Fünfecksseite fällt, auf der Q liegt.

18. Ein Fünfeck ABCDE in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Grundlinie in eine Fünfecksseite AB fällt, und dessen Spitze in einen innerhalb des Fünfecks gegebenen Punkt P fällt, wenn außerdem die Seite PF des Dreiecks durch F auf AB gegeben ist. 1. Aufl. Verwandle zunächst nach 17 das Fünfeck in ein Dreieck, dessen Spitze in P und dessen Grundlinie auf AB liegt. 2. Aufl. Ziehe FG ∥ PB bis BC, GH ∥ PC bis CD, HI ∥ PD bis DE, IK ∥ PE bis AE, KL ∥ PA bis AB, so ist LFP das gesuchte Dreieck. Zum Beweise ziehe noch PG, PH, PI, PK.

19. Ein Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Grundlinie in eine Seite des Fünfecks fällt und dessen Spitze in einen beliebig in der Ebene des Fünfecks, aber mit diesem über derselben Seite der Grundlinie gegebenen Punkt P zu liegen kommt, wenn außerdem eine Seite PF des Dreiecks durch den beliebig auf AB angenommenen Punkt F gegeben ist. Auflösungen ähnlich wie bei 18.

§. 109.

Verwandlungen von Figuren in Quadrate.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich ist

1. der Summe zweier gegebenen Quadrate.
2. dem nfachen eines gegebenen Quadrats.
3. der Differenz zweier gegebenen Quadrate.
4. der Hälfte eines gegebenen Quadrats.

In den folgenden Aufgaben ist die betreffende Figur zunächst in ein Rechteck zu verwandeln und dieses auf die bekannte Weise in ein Quadrat. Auch die vorhergehenden Aufgaben können auf diese Weise gelöst werden.

5. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.
6. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich ist dem n ten Teil eines gegebenen Quadrats.
7. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich ist dem $\frac{m}{n}$fachen eines gegebenen Quadrats.

In ein Quadrat zu verwandeln ein gegebenes

8. Dreieck.
9. Parallelogramm.
10. Trapez.
11. Viereck.
12. Fünfeck.

§. 110.

Teilung des Dreiecks.

1. Ein Dreieck in n gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien von einer Ecke ausgehen.
2. In einem gegebenen Dreieck einen Punkt so zu bestimmen, daß das Dreieck durch die Linien, welche ihn mit den Ecken verbinden, in drei gleiche Teile geteilt wird. (Halbiere die drei Seiten.)
3. Ein Dreieck durch eine gebrochene Linie, welche von C nach c, und dann abwechselnd von c nach a, und von a nach c geht, in fünf gleiche Teile zu teilen.
4. Ein Dreieck von einem auf einer Seite gegebenen Punkt aus zu halbieren.
5. Ein Dreieck von einem auf einer Seite gegebenen Punkt aus in n gleiche Teile zu teilen.
6. Von einem gegebenen Dreieck ein Stück abzuschneiden, welches gleich einem anderen gegebenen Dreieck ist, so daß die Teilungslinie von einem auf AC gegebenen Punkt D ausgeht. Aufl. Verwandle das gegebene Dreieck in ein anderes, in welchem eine Seite = CD und der anliegende Winkel = C ist.

7. Ein Dreieck von einem innerhalb desselben gegebenen Punkt aus in fünf gleiche Teile zu teilen.

8. Ein Dreieck von einem innerhalb desselben gegebenen Punkt aus in fünf gleiche Teile zu teilen, wenn eine Teilungslinie der Lage nach gegeben ist.

9. Von einem gegebenen Dreieck ein Stück abzuschneiden, welches einem anderen gegebenen Dreieck gleich ist, durch zwei Teilungslinien, welche von einem innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt P ausgehen, und von denen die eine PD der Lage nach gegeben ist. (Mehrfache Verwandlungen.)

10. Im $\triangle$ ABC ist DE $\parallel$ AB gezogen; man soll von C nach AB die Linie CF, welche DE in G trifft, so ziehen, daß $\triangle$ CGE = Viereck AFGD wird.

§. 111.

Teilung der Parallelogramme und Trapeze.

a) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist §. 113, 1 zu benutzen.

1. Ein Parallelogramm in n gleiche Parallelogramme zu teilen.

2. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus α) in eine gerade Anzahl gleicher Teile, β) in eine ungerade Anzahl gleicher Teile zu teilen.

3. Ein Trapez in n gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden.

b) Zur Lösung der folgenden Aufgaben teile die Mittellinie des Trapezes in die verlangte Anzahl gleicher Teile.

4. Ein Trapez in n gleiche Teile so zu teilen, daß alle Teilungslinien durch den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten gehen.

5. Ein Trapez in n gleiche Teile zu teilen durch eine gebrochene Linie, welche in einer der Ecken anfängt und abwechselnd von einer der parallelen Seiten zur anderen geht.

6. Ein Trapez in eine ungerade Anzahl gleicher Teile zu teilen, welche sämtlich gleichen Umfang haben. Anal. Die Teilungslinien teilen die Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, in dieselbe Anzahl gleicher Teile und sind abwechselnd diesen Seiten parallel.

7. Ein Trapez in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen, so daß alle mit Ausnahme des letzten einen gegebenen Umfang haben.

c) In den folgenden Aufgaben verbinde den Punkt, von dem die Teilungslinien ausgehen sollen, mit den Teilpunkten der Mittellinie und bringe den ersten Teil, welcher zum Teil außerhalb des Trapezes fällt, in dasselbe hinein.

Ein Trapez in n gleiche Teile zu teilen

8. von einer Ecke aus.

9. von einem Punkt einer parallelen Seite aus.

§. 112.

Teilung des Vierecks.

In den folgenden Aufgaben ist das Viereck zunächst in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in der Regel in denjenigen Punkt fällt, von welchem die Teilungslinien ausgehen.

1. Ein gegebenes Viereck von einer Ecke aus in n gleiche Teile zu teilen. (§. 110, 5 und 7.)

2. Ein Viereck von einem auf einer Seite gegebenen Punkt in n gleiche Teile zu teilen.

3. Ein Viereck von einem innerhalb desselben gegebenen Punkt aus in n gleiche Teile zu teilen, wenn die erste Teilungslinie gegeben ist.

4. Ein Viereck durch eine gebrochene Linie, welche von der Ecke A ausgeht und abwechselnd die Seiten b und d trifft, in n gleiche Teile zu teilen.

5. Von einem gegebenen Vieleck ein Stück abzuschneiden, welches gleich einem gegebenen Dreieck ist.

6. Ein Vieleck ist durch eine gebrochene Linie in zwei Teile geteilt; man soll von dem einen Endpunkt derselben aus eine gerade Linie ziehen, welche das Vieleck in derselben Weise teilt.

§. 113.

Teilung der geraden Linie.

1. Eine gerade Linie a in n gleiche Teile zu teilen.

a) Zur Lösung der folgenden Aufgaben sind mit Benutzung von §. 1 und §. 15, a und b rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren.

2. Von a ein solches Stück abzuschneiden, daß der Unterschied zwischen dem Quadrat von a und dem des abgeschnittenen Stückes $= b^2$ wird.

3. a um ein solches Stück zu verlängern, daß die Summe aus den Quadraten von a und ihrer Verlängerung $= b^2$ wird.

4. a so zu teilen, daß die Summe der Quadrate beider Teile $= b^2$.

5. a so zu teilen, daß die Differenz der Quadrate beider Teile $= b^2$.

b) In den folgenden Aufgaben ist zunächst das gegebene Rechteck noch in ein Quadrat zu verwandeln, und dann das unter a) Gesagte zu beachten.

Die größere Seite eines gegebenen Rechtecks soll so geteilt werden, daß

6. die Summe der Quadrate beider Teile gleich dem gegebenen Rechteck wird.

7. die Differenz der Quadrate beider Teile gleich dem gegebenen Rechteck wird.

c) 8. a so zu teilen, daß das Quadrat des einen Teils doppelt so groß wird, als das Quadrat des anderen. (§. 15, 3.)

9. a so zu verlängern, daß die Summe aus den Quadraten der verlängerten Linie und der Verlängerung $= b^2$ wird. (§. 16, 1.)

10. a so zu verlängern, daß die Differenz zwischen den Quadraten der verlängerten Linie und der Verlängerung $= b^2$ wird. (§. 16, 9.)

§. 114.

Teilung der geraden Linie.

1. AB in dem Verhältnis m:n zu teilen. 1. Aufl. Trage an AB unter einem beliebigen Winkel AE = m an; ziehe durch B zu AE nach beiden Seiten Parallelen und mache beide = n = BF = BG; EF trifft AB in C, und EG die Verlängerung von AB in D; so hat man AC:BC = AD:BD = m:n. 2. Aufl. Trage an AB in A einen beliebigen Winkel an, schneide auf dem freien Schenkel desselben m = AE und n = EF ab, und ziehe EC ∥ FB. Ferner trage n auf EA von E aus ab = EG und ziehe ED ∥ GB, so hat man AC:BC = AD:BD = m:n.

1a. AB durch C und D so zu teilen, daß AC:AD = BC:BD = m:n. 1. Anal. AC:CD = m:n − m und CD:BC = n + m:m; beide zusammengesetzt: AC:BC = n + m:n − m; also auch AD:BD = n + m:n − m; d. h. AB ist in C und D harmonisch zu teilen = n + m:n − m (1). 2. Anal. Macht man CX = CB, so ist nach der 1. Anal. AC + BC:AC − BC = n:m, d. h. AB:AX = n:m, also X und daher C zu finden. Macht man ferner DY = BD, so ist AD + BD:AD − BD = n:m oder AY:AB = n:m, also Y und somit D bestimmt. 3. Aufl. Ziehe durch B eine beliebige Linie, trage auf derselben auf der einen Seite von B, m = BE, auf der anderen n = BF ab, ziehe durch E eine Parallele zu AB, welche AF in G trifft; trage AG auf AF ab = AH; HE und eine durch F zu HE gezogene Parallele treffen AB in C und D.

a) Bei Lösung der folgenden Aufgaben sind die beiden Auflösungen der nächstfolgenden Aufgabe zu benutzen.

2. Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere Proportionale zu suchen. Oder ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. (§. 109, 5.)

3. a so zu teilen, daß das Rechteck aus beiden Abschnitten $= b^2$ wird. Oder ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang = 2a. (Vergl. §. 139, a.)

4. a so zu teilen, daß das Rechteck aus a und einem Teil $= b^2$ wird. Oder ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von welchem eine Seite = a ist.

5. a um ein Stück so zu verlängern, daß das Rechteck aus a und der Verlängerung $= b^2$ wird. Oder wie 4.

6. a um ein Stück so zu verlängern, daß das Rechteck aus a und der ganzen verlängerten Linie $= b^2$ wird.

7. a so zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen verlängerten Linie $= b^2$ wird. Anal. $AB = a$, X der Endpunkt der Verlängerung. Wird durch A und B ein beliebiger Kreis gelegt, so ist die von X an ihn gezogene Tangente $= b$. Anh. III, 12.

Zwei gerade Linien x und y so zu konstruieren, daß

8. $x^2 + y^2 = a^2$ und $x : y = m : n$.

9. $x^2 - y^2 = a^2$ und $x : y = m : n$.

10. $xy = a^2$ und $x : y = m : n$.

11. $x^2 + y^2 = a^2$ und $xy = b^2$ (§. 104, 9.)

b) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß sich in einem rechtwinkligen Dreieck die Quadrate der Katheten wie die Segmente der Hypotenuse verhalten; ferner daß in einem Kreise die Quadrate zweier von demselben Endpunkte eines Durchmessers ausgehenden Sehnen sich verhalten, wie die Projektionen der Sehnen auf den Durchmesser. Mit Hülfe dieser Sätze kann man stets zwei Linien konstruieren, die sich wie zwei gegebene Quadrate verhalten.

12. a so zu teilen, daß sich die Quadrate ihrer Teile $= m : n$ verhalten.

13. AB so zu teilen, daß sich die Teile $= m^2 : n^2$ verhalten. a) Innere Teilung. 2. Aufl. Man schneide $AC = m$, $BD = n$ auf AB ab, errichte die Senkrechten $CE = n$ und $DF = m$; fälle vom Durchschnittspunkte G der Linien AE und BF eine Senkrechte auf AB. 3. Aufl. Man konstruiere über AB ein gleichschenkliges Dreieck ABC, so daß $AC = BC = m + n$, bestimme auf AC und BC die Punkte E und D so, daß $AE = CD = m$, mithin $CE = BD = n$ wird, verbinde C mit dem Durchschnittspunkt F von DA und EB, verlängere diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitt X mit AB, so ist X der verlangte Teilpunkt. Beweis: Nach dem Satze des Ceva ist $AX \cdot BD \cdot CE = BX \cdot AE \cdot CD$, also $AX : BX = m^2 : n^2$. b) Äußere Teilung. Der gesuchte Teilpunkt X liege auf der Verlängerung von AB über B hinaus. Man schlage um X einen Kreis, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen AX und BX ist. Er treffe AB in C und die Verlängerung von AB in C'. Es ist nun $AX : CX = CX : BX$. Setzt man diese Proportion mit der identischen $CX : BX = CX : BX$ zusammen, so entsteht $AX : BX = CX^2 : BX^2$, mithin, da $AX : BX = m^2 : n^2$ ist, $CX : BX = m : n$ (1) und demnach auch $AX : CX = m : n$ (2). Aus $AX : CX = CX : BX$ folgt ferner $AX - CX : CX =$

$CX - BX : BX$, also $AC : CX = BC : BX$, oder $AC : BC = CX : BX = m : n$ (3). Da $CX = C'X$, so muß auch $C'X : BX = m : n$ (4), $AX : C'X = m : n$ (5) sein. Aus $AX : C'X = C'X : BX$ folgt $AX + C'X : C'X = C'X + BX : BX$, also $AC' : C'X = BC' : BX$ oder $AC' : BC' = C'X : BX = m : n$ (6). 2. Aufl. Man bestimme C aus (3) und X aus (1) oder (2). 3. Aufl. Man bestimme C' aus (6) und X aus (3) oder (4). 4. Aufl. Man bestimme C aus (3); C' aus (6) und halbiere CC'. 5. Aufl. ähnlich wie a) 2. Aufl., nur daß entweder $BD = n$ auf der Verlängerung von AB abgetragen wird, oder CE und DF auf verschiedenen Seiten von AB errichtet werden. 6. Aufl. Wie a) 3. Aufl. nur daß X der Durchschnittspunkt von ED mit AB wird. Beweis. Nach dem Satz des Menelaus ist $AX \cdot CE \cdot BD = BX \cdot AE \cdot CD$, also $AX : BX = AE \cdot CD : CE \cdot BD = m^2 : n^2$.

14. AB im Verhältnis zweier gegebenen Rechtecke zu teilen. 1. Aufl. ähnlich wie 13, a) 3. Aufl. und 13, b, 6. Aufl. nach den Sätzen des Ceva und Menelaus. 2. Aufl. wie 13, a) 2. Aufl. und 13, b) 5. Aufl.

15. Eine gerade Linie zu zeichnen, deren Quadrat sich zu $a^2 = m : n$ verhält.

16. Eine gerade Linie zu zeichnen, die sich zu $a = m^2 : n^2$ verhält.

c) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist der unter b) angeführte Satz zu beachten und außerdem, daß in einem Dreieck die Halbierungslinie eines Winkels die Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten teilt.

Auf AB ist der Punkt C gegeben; man soll den Punkt X so bestimmen, daß

17. $AX^2 : BX^2 = AC : BC$. Anal. Es ist $AX^2 : BX^2 = AC \cdot AB : BC \cdot AB$. Konstruiert man über AB ein rechtwinkliges Dreieck ADB, in welchem C Fußpunkt der Höhe, so ist $AX : BX = AD : BD$; daher wird $\angle ADB$ durch DX halbiert.

18. $AX : BX = AC^2 : BC^2$.

§. 115.

Teilung der geraden Linie.

Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist der Satz zu beachten: Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante und eine Tangente, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.

1. a um ein Stück so zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen verlängerten Linie $= b^2$ wird. Oder ein

Quadrat b^2 in ein Rechteck zu verwandeln, in welchem die Differenz der Seiten = a ist. (Vergl. §. 139, b.)

2. a stetig zu teilen. (§. 139, 1.) Anal. AB = a, BX der größere Abschnitt. Macht man die Verlängerungen BC = AD = BX, so ist AC in B, ebenso DB in A stetig geteilt. Zieht man BE = BA und $\perp$ BA, so ist $\angle$ DEC = R, und, wenn M die Mitte von AB, ME = MC.

3. a um ein Stück so zu verlängern, daß a der größere Abschnitt einer stetig geteilten Linie wird. (§. 139, 2.) Anal. ähnlich wie 2.

4. a um ein Stück so zu verlängern, daß a der kleinere Abschnitt einer stetig geteilten Linie wird. (§. 139, 3.) Anal. Verlängert man AB = a über A hinaus bis D, so daß BD gleich dem gesuchten größeren Abschnitt wird, so ist auch BD in A stetig geteilt, also 3.

5. a so zu teilen, daß das Quadrat des einen Teils gleich dem Rechteck aus dem anderen Teil und b ist. Anal. Ist AB = a und AX : BX = BX : b, so folgt AX + BX : BX = b + BX : b. Verlängert man daher AB über B hinaus um b bis C, so ist AB : BX = CX : BC oder BX · CX = AB · BC. Konstruiert man BE $\perp$ AC und als mittlere Proportionale zu AB und BC, zieht man ferner von X an einen über BC beschriebenen Halbkreis die Tangente XF, so ist $XF^2 = BX \cdot CX$ und $BE^2 = AB \cdot BC$, folglich XF = BE und DX = DE.

§. 116.

Teilung der geraden Linie.

Bei der Analysis der folgenden Aufgaben beachte, daß sich aus den gegebenen Proportionen durch Bildung der Summen oder Differenzen neue Proportionen herstellen lassen, welche sich zur Konstruktion eines unbekannten Punktes verwenden lassen.

Auf AB sind die Punkte C, D in der Reihenfolge A, C, D, B gegeben. Man soll einen Punkt X bestimmen, der

1. AB und CD innerlich in gleichem Verhältnis teilt, also AX : BX = CX : DX. 1. Anal. Aus AX : CX = BX : DX folgt AX − CX : CX = BX − DX : DX oder AC : BD = CX : DX, also §. 114, 1. 2. Anal. Konstruiert man nach derselben Seite von AB die beiden beliebigen ähnlichen Dreiecke ABE und CDF, so ist EFX eine gerade Linie. 3. Anal. Es ist AX · DX = BX · CX. Errichtet man daher XY $\perp$ AB, so daß XY mittlere Proportionale zu AX und DX ist, so ist sie es auch zu BX und CX, daher $\angle$ AYD = BYC = R.

2. AB und CD innerlich in umgekehrtem Verhältnis teilt, also AX : BX = DX : CX. 1. Anal. Aus AX : DX = BX : CX folgt,

$AX : AX + DX = BX : BX + CX$ oder $AX : BX = AD : BC$, also §. 114, 1. 2. Anal. Konstruiert man nach verschiedenen Seiten von AB die beliebigen ähnlichen Dreiecke ABE und DCF, so ist EXF eine Gerade. 3. Anal. Es ist $AX \cdot CX = BX \cdot DX$. Legt man daher durch die Punkte A und C, sowie durch B und D zwei beliebige Kreise, so liegt X auf der Potenzlinie derselben.

3. AC und BD äußerlich in gleichem Verhältnis teilt, also $AX : CX = DX : BX$, wobei X auf einer der Verlängerungen von AB liegen muß. Drei Analysen, wie 1 und 2.

4. AB innerlich und CD äußerlich in gleichem Verhältnis teilt, also $AX : BX = CX : DX$. 1. Anal. $BX + AX : BX - AX = DX + CX : DX - CX$. Ist E die Mitte von AB, F die Mitte von CD, so ist $BX - AX = 2EX$ und $DX + CX = 2FX$, daher $AB : 2EX = 2FX : CD$ oder $EX \cdot FX = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}CD$ und $FX - EX = EF$ (§. 114, 2 und 7 oder §. 139, b). 2. Anal. Es ist $AX \cdot DX = BX \cdot CX$. Man lege durch A und D, ebenso durch B und C zwei beliebige Kreise mit den Mittelpunkten K und K' und wähle die beliebig angenommenen Radien so, daß sich die Kreise in zwei Punkten E und F schneiden. XE schneide K in G, K' in H. Nun ist $AX \cdot DX = GX \cdot EX$ und $BX \cdot CX = EX \cdot HX$, folglich $GX \cdot EX = EX \cdot HX$, also $GX = HX$. Daher ein Ort für X Anhang III, 43.

5. AB innerlich und CD äußerlich in umgekehrtem Verhältnis teilt, also $AX : BX = DX : CX$. Anal. wie 4.

6. AC innerlich und BD äußerlich in demselben Verhältnis teilt, also $AX : CX = DX : BX$. Anal. wie 4.

7. a und b gegeben; man soll auf beiden ein gleiches Stück so abschneiden oder an beide ein gleiches Stück so ansetzen, daß sich im ersteren Falle die Reste, im letzteren die ganzen Linien $= m : n$ verhalten. (Ob ein Stück abzuschneiden oder anzusetzen ist, richtet sich nach der Größe von m und n im Vergleich zu der von a und b. Anal. Trägt man b auf a ab, so daß $AB = a$ und $CB = b$ ist, und ist BX das gesuchte abzuschneidende Stück, so ist X nach §. 114, 1 zu konstruieren.

8. a und b gegeben; x so zu bestimmen, daß $a + x : b - x = m : n$. Anal. Zeichne $a + b$, dann §. 114, 1.

9. a und b so zu teilen, daß sich zwei Teile derselben $= m : n$, die Reste $= p : q$ verhalten. 1. Anal. (Fig. 17.) Es sei $\angle B$ beliebig, $AB = a$, $BC = b$, D und E ihre Teilpunkte. Zieht man $AF \parallel DE$, so ist $BF : a = n : m$, also F bestimmt. Zieht man noch $EG \parallel DA$, so ist $EC : DA = q : p$, also auch $EC : EG = q : p$, und wenn CG

verlängert BA in H trifft, $b:BH = q:p$; daher H bestimmt. 2. Anal. Zeichne $AB = a$ und $CD = b$ beliebig in paralleler Lage; die Teilpunkte seien bezüglich X und Y; AC und XY schneiden sich verlängert in E, BD und XY in F. Dann sind E und F nach §. 114, 1 zu bestimmen.

Auf AB ist C gegeben; man soll X so bestimmen, daß

10. $AX:CX = CX:BX$. α) X liege auf der Verlängerung von AB. 1. Anal. Aus $AX:CX = CX:BX$ folgt $AX:AX - CX = CX:CX - BX$ oder $AX:AC = CX:CB$, daher $AX:CX = AC:CB$ (§. 114, 1). 2. Anal. Konstruiert man über AC und CB ähnliche Dreiecke nach derselben Seite, so ist X deren Ähnlichkeitspunkt. 3. Anal. Es ist $AX \cdot BX = CX^2$. Ein beliebig durch A und B gelegter und ein um X mit XC beschriebener Kreis schneiden sich rechtwinklig. Dann wird der Durchmesser von Kreis X durch AB harmonisch geteilt. β) X liege auf AB. Anal. Konstruiert man $XD = CX$ und $\perp AB$, so ist $\angle ADB = R$ und $\angle BCD = \frac{1}{2} R$.

11. $AB:AX = BX:CX$. α) X liege auf AC. 1. Anal. $AB:AB - AX = BX:BX - CX$, also $AB:BX = BX:BC$ (§. 114, 2). 2. Anal. $AB:BX = AX:CX$, daher $AB:AB + BX = AX:AX + CX$, oder wenn man AB über B hinaus um sich selbst bis D verlängert, $AB:DX = AX:AC$. Daher ist $DX \cdot AX = AB \cdot AC$ (§. 114, 2 und 3 oder §. 139, a). 3. Anal. Konstruiert man über AB und BX nach derselben Seite die beliebigen ähnlichen Dreiecke ABD und XBF, so daß also F auf BD liegt, so ist $DX \parallel FC$, folglich $\triangle XBF = CBD$ (§. 128, 1). β) X liege auf CB. 1. Anal. $AB:AB + AX = BX:BX + CX$. Verlängert man BA über A hinaus um sich selbst bis D, so ist $AB:DX = BX:CB$, daher $DX \cdot BX = AB \cdot CB$ und $DX + BX = DB$ (§. 114, 2 und 3 oder §. 139, a). 2. Anal. $AB:BX = AX:CX$, daher $AB:AB - BX = AX:AX - CX$ oder $AB:AX = AX:AC$ (§. 114, 2). Es sind noch zwei Fälle möglich, die ebenso zu behandeln sind.

12. $AB:AX = AX:CX$. α) X liege auf BC. Anal. $AB:AB - AX = AX:AX - CX$ oder $AB:BX = AX:AC$, daher $AX \cdot BX = AB \cdot AC$ (§. 114, 2 und 3 oder §. 139, a). β) X liege auf AC. Anal. $AB:AB + AX = AX:AX + CX$. Verlängert man AB über A hinaus um sich selbst bis D, so ist $AB:DX = AX:AC$, daher $DX \cdot AX = AB \cdot AC$ (§. 114, 2 und 7 oder §. 139, b). γ) X liege auf der Verlängerung über A hinaus. Anal. $AB:AX - AB = AX:CX - AX$. Trägt man daher $AD = AB$ auf AX ab, so ist $AB:DX = AX:AC$, also $DX \cdot AX = AB \cdot AC$ (§. 114, 2 und 7 oder §. 139, b).

§. 117.

Figuren in und um Figuren.

a) Einfache Aufgaben.

1. In ein gegebenes Dreieck einen Rhombus so zu zeichnen, daß eine Seite desselben in die Seite AB und eine der anderen Ecken in einen auf BC gegebenen Punkt D fällt.

In ein gegebenes Dreieck ABC ein gleichschenkliges so zu zeichnen, daß

2. die Grundlinie ∥ AB und die Höhe = h.

3. die Grundlinie ∥ AB und = g.

4. In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so zu zeichnen, daß eine Ecke des letzteren in eine des ersteren und die beiden übrigen auf zwei Seiten des Quadrats fallen.

5. Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein Quadrat so zu zeichnen, daß eine Ecke beider Figuren zusammenfällt und die derselben gegenüberliegenden Seiten des Quadrats durch die beiden anderen Ecken des Dreiecks gehen.

6. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes zu zeichnen, dessen Seiten einzeln auf denen des anderen senkrecht stehen.

7. Um ein gegebenes Dreieck DEF ein anderes ABC, von welchem α, β und die Richtung von AB gegeben, so zu zeichnen, daß BC durch D, AC durch E, und AB durch F geht.

8. In ein gegebenes Dreieck ein anderes zu zeichnen, von welchem a, c und die Richtung von c gegeben.

9. In ein gegebenes Dreieck ein anderes zu zeichnen, von welchem c, h_c und die Richtung von c gegeben.

b) Bei der Lösung der folgenden Aufgaben beachte, daß die gesuchte und die gegebene Figur denselben Mittelpunkt haben; hat man daher zuerst die gesuchte in anderer Lage gezeichnet, so kann man sie leicht mittelst der so gefundenen Stücke mit der ersten in Verbindung bringen. Eine Nebenfigur läßt sich vermeiden. (§. 32 und 44.)

10. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges mit gegebener Seite a zu zeichnen.

11. Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges mit gegebener Seite a zu zeichnen.

12. In ein gegebenes Quadrat ein anderes mit gegebener Seite a zu zeichnen.

13. Um ein gegebenes Quadrat ein anderes mit gegebener Seite a zu zeichnen.

c) Kreise in Figuren und Figuren in Kreise.

14. In ein gegebenes Dreieck einen Halbkreis zu zeichnen, welcher zwei Seiten berührt und dessen Durchmesser auf der dritten Seite liegt.

15. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck drei gleiche Kreise so zu beschreiben, daß jeder die beiden übrigen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

16. In einen gegebenen Kreis 4 gleiche gleichseitige Dreiecke so zu zeichnen, daß das mittlere mit jedem äußeren eine Ecke gemein hat. 1. Anal. mit Benutzung von §. 92, 14. 2. Anal. Verbinde zwei benachbarte auf dem Kreise liegende Ecken zweier Dreiecke mit den beiden auf dem Kreise liegenden Ecken des dritten Dreiecks, und verlängere diese Linien bis zum Durchschnitt, so sind die außerhalb und innerhalb des Kreises liegenden Abschnitte sämtlich unter einander gleich.

17. In einen gegebenen Kreis 5 gleiche Quadrate so zu zeichnen, daß das mittlere mit jedem äußeren eine Seite gemein hat. Aufl. Zeichne über einen Durchmesser ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten im Verhältnis 1 : 3 stehen.

§. 118.

Parallelogramme in Dreiecke.

a) In ein gegebenes Dreieck ABC ein Parallelogramm ADEF so zu zeichnen, daß beide den Winkel A gemein haben (D auf AB, E auf BC, F auf AC), und daß

1. das Parallelogramm ein Rhombus ist. Anal. Die (von A ausgehende) Diagonale halbiert $\angle A$.

2. die Seiten sich $= m : n$ verhalten. Anal. Konstruiert man man in entsprechender Weise aus den Seiten m und n ein Parallelogramm AD'E'F', so ist AE'E eine Gerade.

3. die von A ausgehende Diagonale $= e$ ist.

4. der Umfang $= 2s$ ist. Anal. Trägt man FE auf FC bis G und DE auf DB bis H ab, so ist $AG = AH = s$ und GEH eine Gerade.

5. die Differenz der Seiten $= d$ ist. Anal. Man trage dieselben Stücke wie in 4, aber nach der entgegengesetzten Richtung ab.

6. das Produkt der beiden Seiten $= p \cdot q$ ist. Anal. Auf AB trage $p = AG$ und auf AC $q = AM$ ab, ziehe durch G und M Parallelen resp. zu AC und AB, die sich in H treffen, und durch H LK ∥ BC (L auf AC), so ist $MH : ML = FE : FC$; setzt man diese Proportion mit $AM : AM = AF : AF$ zusammen, so ergiebt sich $MA \cdot ML = AF \cdot FC$, so daß von AF und FC Summe und Produkt bekannt ist. (§. 139, a, 3. Aufl.)

b) In den folgenden Aufgaben soll in $\triangle ABC$ ein Rechteck DEFG so gezeichnet werden, daß eine Seite DE auf AB zu liegen kommt, die beiden anderen Ecken aber G auf AC und F auf BC fallen. Diese Aufgaben sind auf die unter a) gelösten zurückzuführen durch folgenden Satz:

Haben die Dreiecke ABC und ABH gleiche Höhe zu AB, so daß also $CH \parallel AB$ ist, und zieht man eine beliebige Parallele zu AB, welche AH, BH, AC, BC bezüglich in K, L, G, F schneidet, so ist $KL = GF$. Fällt man von den vier Durchschnittspunkten Senkrechte auf AB, so sind die auf diese Weise in die beiden Dreiecke gezeichneten Rechtecke kongruent. Beweis. $KL : AB = KH : AH = GC : AC = GF : AB$, also $KL = GF$.

Für die vorliegenden Aufgaben macht man $\triangle ABH$ bei A rechtwinklig.

Unter den oben angegebenen Bedingungen ein Rechteck in ein Dreieck so zu zeichnen, daß

7. dasselbe ein Quadrat wird. (Diese Aufgabe läßt noch 3 andere Auflösungen zu.) Ziehe durch C eine Parallele zu $AB = h_c$, und verbinde ihren Endpunkt mit A resp. B; oder errichte auf AB in A ein Lot $= AB$, entweder nach unten oder nach oben, verbinde im ersten Fall den Endpunkt mit C, im zweiten mit dem Fußpunkt von h_c; in allen 3 Fällen schneidet die Verbindungslinie eine Dreiecksseite in einer Ecke des Quadrats.

8. die Seiten desselben sich $= m : n$ verhalten.

9. in welchem eine Diagonale $\parallel AC$.

10. dessen Diagonale $= e$. 11. dessen Umfang $= 2s$.

12. in welchem die Differenz der Seiten $= d$. 2. Anal. Trage DG auf GF von G bis H ab, ziehe durch H eine Parallele zu BC, welche AB in B′ und AC in C′ trifft, und fälle von H auf AB das Lot HL, so ist DLHG ein Quadrat (7).

13. dessen Inhalt $= q^2$. (§. 139, 45.)

14. daß sein Inhalt ein Maximum ist. (Die Mitte von AC ist Ecke des Rechtecks.)

c) Soll in das Dreieck ABC nicht ein Rechteck, sondern ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel α' gezeichnet werden, so ist der bei b) angeführte Satz anzuwenden, indem man $\angle BAH = \alpha'$ macht.

Unter den angegebenen Bedingungen in ein Dreieck ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Winkel $= \alpha'$ und

15. welches ein Rhombus ist.

16. dessen Seiten sich $= m : n$ verhalten.

17. dessen Diagonale $= e$. 18. dessen Umfang $= 2s$.

19. in welchem die Differenz der Seiten $= d$.

d) 20. In $\triangle$ ABC einen Rhombus zu zeichnen, dessen eine Diagonale $\parallel$ AC ist. Anal. Ziehe durch A und C Parallelen zu den Seiten des Rhombus.

21. In $\triangle$ ABC ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Winkel $= \alpha'$ und dessen eine Diagonale $\parallel$ AC ist. Anal. wie 20.

22. Auf der Seite AC des Dreiecks ABC ist P gegeben; man soll über dieser Seite in das Dreieck einen Rhombus so zeichnen, daß eine Ecke in P liegt. Anal. Man konstruiere außerhalb des Dreiecks den Rhombus ABKL dem gesuchten ähnlich, so ist CPL eine Gerade und L leicht zu bestimmen.

23. Auf der Seite AB des Dreiecks ABC ist P gegeben; man soll über dieser Seite in das Dreieck ABC ein Parallelogramm zeichnen, dessen eine Ecke in B liegt, und dessen Seiten sich $= m : n$ verhalten. Anal. ähnlich wie 22.

24. In das $\triangle$ ABC ein Parallelogramm mit dem Winkel α' zu zeichnen, dessen Inhalt ein Maximum ist.

§. 119.

Parallelogramme in Kreissegmenten.

In den folgenden Aufgaben ist ein Kreis K und in ihm die Sehne AB gegeben, deren Mittelpunkt G. Die Verlängerung von KG trifft K in H. Ein Parallelogramm CDEF soll so konstruiert werden, daß C und D auf der Sehne AB, E und F auf dem Bogen liegen.

a) Das Parallelogramm ist ein Rechteck von gegebener Gestalt. Man errichte über AB als Seite ein dem gesuchten ähnliches Rechteck oder beachte, daß $\angle$ BGE bekannt ist.

Unter den gegebenen Bedingungen in ein Kreissegment zu zeichnen

1. ein Quadrat.

2. ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnis $m : n$ stehen.

3. ein Rechteck, dessen auf der Sehne liegende Seite doppelt so groß wird als die andere.

b) In ein Kreissegment ein Rechteck zu zeichnen, von welchem

4. die Summe zweier anstoßenden Seiten $= s$ gegeben ist. Anal. Man trage $DL = \frac{1}{2} DE$ von D aus auf DB ab. LE und KH schneiden sich verlängert in M. Dann ist GL bekannt, und $GM = 2\,GL$, daher auch GM bekannt.

5. die Differenz zweier anstoßenden Seiten gegeben ist. Anal. wie 4, nur daß $\frac{1}{2} DE$ von D aus auf DG abgeschnitten wird.

6. die Summe der nicht auf der Sehne liegenden Seiten gegeben ist. Anal. ähnlich wie 4.

7. die Diagonale = e gegeben ist. Anal. Verbindet man G mit der Mitte von DE und verlängert diese Linie bis zum Durchschnitt M mit FE, so ist GM = e. Ein mit e um G geschlagener Kreis treffe EF noch in N, dann ist MN = 2EF und die Potenzen des Mittelpunktes O von EF für die beiden Kreise verhalten sich wie 4:1; daher liegt O auf einem konstruierbaren Kreise (§. 96, Anmerkung 1). Schneiden sich die Kreise K und G nicht, so wird die Konstruktion der Potenzlinie umständlich und folgendes Verfahren führt einfacher zum Ziele: Man schlage mit r + e um G einen Kreis, der eine in K auf KG errichtete Senkrechte in K' trifft, und schlage mit r um K' einen Kreis, der MN in E' und F' trifft. Die Kreise G und K' berühren sich, so daß ihre Potenzlinie leicht konstruierbar ist, und es ist F'E' = FE, also auch MN = 2F'E', daher diese beiden Sehnen nach §. 92, 24 zu konstruieren.

c) Das Parallelogramm ist schiefwinklig und von gegebener Gestalt. Man ziehe HL ∥ ED bis zum Durchschnitt mit AB und HM ∥ AB bis zum Durchschnitt mit GE. Dann ist das Verhältniß HL : HM, daher auch HM bekannt.

Unter den gegebenen Bedingungen in ein Kreissegment zu zeichnen

8. einen Rhombus mit gegebenem Winkel.

9. ein Parallelogramm, welches einem gegebenen ähnlich ist.

d) In ein Kreissegment ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel zu zeichnen, von welchem außerdem

10. die Summe zweier anstoßenden Seiten = s gegeben ist. Anal. Man trage DL = $\frac{1}{2}$DE auf DB ab und ziehe durch H zu ED eine Parallele, die AB in O und LE in M trifft. Eine durch M zu AB gezogene Parallele treffe GH in N, NE treffe AB in P. Endlich sei PQ ∥ DE gezogen bis zum Durchschnitt mit NM. Dann ist DE = 2DL, MO = 2OL, und da OL = GP = $\frac{1}{2}$s, so ist auch PQ = $\frac{1}{2}$s.

11. die Differenz zweier anstoßenden Seiten = d gegeben. Anal. $\frac{1}{2}$DE wird von D auf DG abgetragen, sonst wie 10.

12. die Summe der nicht auf AB liegenden Seiten gegeben. Anal. ähnlich wie 10.

e) In das gemeinschaftliche Segment von zwei gleichen sich schneidenden Kreisen Rechtecke zu zeichnen. Die zu beiden Seiten von AB liegenden Rechtecke sind nach a) und b) zu konstruieren.

In das gemeinschaftliche Segment von zwei gleichen sich schneidenden Kreisen zu zeichnen

13. ein Quadrat

14. ein Rechteck, dessen Seiten sich wie m : n verhalten.

15. ein Rechteck, dessen Umfang gegeben.

16. ein Rechteck, von welchem die Differenz der Seiten gegeben. Anal. ähnlich wie 5.

f) In das gemeinschaftliche Segment von zwei gleichen Kreisen Parallelogramme mit bekanntem Diagonalenwinkel zu zeichnen. Der Mittelpunkt des Parallelogramms ist die Mitte der gemeinschaftlichen Sehne AB. Bei gegebener Gestalt des Parallelogramms kommt 3. Anh. 33, bei gegebenem Inhalt 3. Anh. 36 in Anwendung

In das gemeinschaftliche Segment von zwei gleichen sich schneidenden Kreisen zu zeichnen

17. einen Rhombus, dessen Winkel gegeben.

18. ein Parallelogramm, welches einem gegebenen ähnlich ist.

19. einen Rhombus, dessen Inhalt gegeben.

20. ein Parallelogramm, dessen Inhalt und Diagonalenwinkel gegeben.

§. 120.

Kreise und Rechtecke in Kreissektoren.

1. In einen gegebenen Kreisquadranten AMB einen Kreis zu zeichnen, der sowohl die beiden Radien, als den Bogen berührt. C sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher $\overset{\frown}{AB}$ in D und AM in F berührt; eine an den Kreis in D gelegte Tangente treffe die Verlängerungen von MA und MB resp. in E und G. 1. Anal. $\angle MDF = \frac{1}{2} MCF = \frac{1}{4} R$. 2. Anal. $AD = DF$. 3. Anal. $ED = EF$ oder auch $EA = MF$. 4. Anal. Der gesuchte Kreis ist gleichzeitig der in $\triangle EMG$ beschriebene. 5. Anal. Fällt man $DH \perp AM$, so ist HCB eine gerade Linie, denn $CF:FH = CD:FH = MD:MH = MB:MH$. 6. Anal. Vervollständigt man den Quadranten AMB zum Halbkreise, so daß BAL ein Halbkreis ist, dann ist LFD eine gerade Linie, denn $CD:CF = MD:ML$ und $CF \parallel ML$.

2. In einen gegebenen Kreis vier gleiche Kreise zu zeichnen, von denen jeder zwei von den anderen und den gegebenen Kreis berührt.

3. In einen beliebigen Kreissektor einen Kreis zu zeichnen, der sowohl die Radien als auch den Bogen berührt. Anal. ähnlich wie 1.

4. Drei sich gegenseitig von außen berührende gleiche Kreise so in einen gegebenen Kreis zu zeichnen, daß letzterer durch jeden der ersteren von innen berührt wird.

a) In einen Kreissektor AMB ein Rechteck CDEF (C auf MA, D auf MB, E und F auf $\overset{\frown}{AB}$) so zu zeichnen, daß zwei Ecken desselben auf dem Bogen liegen, wenn außerdem

5. dasselbe ein Quadrat ist. Anal. Errichte auf AB in A ein Lot $AL = AB$, so geht ML durch F.

6. die Seiten = m:n. (Ähnlich wie 5.)

7. ein Rechteck, dessen Inhalt = q^2. Anal. Verbinde den Mittelpunkt des Kreises mit einer gegenüberliegenden Ecke des Rechtecks, so erhält man ein Dreieck, in welchem eine Seite = r, der gegenüberliegende Winkel = $2R - \frac{1}{2}AMB$ und der Inhalt = $\frac{1}{4}q^2$ ist. Daher zurückgeführt auf §. 104, 11.

8. der Umfang = 2s (§. 142, 52) Anal. Verlängere FC nach G, so daß CG = CD, also FG = s ist, so liegt G auf einem konstruierbaren Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie von ∠ AMB, und zwar von M aus gerechnet in der Entfernung s; trifft MG ein auf AB in A errichtetes Lot in H, so ist AH = AB.

9. die Differenz zweier Seiten = d (§. 142, 53). Anal. Trage CD von C aus auf CF ab bis L, also FL = d, so liegt L auf einem konstruierbaren Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie von ∠ AMB, und zwar von M aus gerechnet in der Entfernung d; trifft ML ein auf AB in A errichtetes Lot in K, so ist AK = AB.

10. die Diagonale = e (§. 142, 54). 1. Anal. Ziehe den Durchmesser FMF', so kennt man von △ FDF': FF', FD, ∠ MDF' = $\frac{1}{2}AMB$, also nach §. 11, 8 zu konstruieren. Konstr. Ziehe den Durchmesser AMA', lege durch B, M, A' einen Kreis, schlage mit e um A einen Kreis, welcher den eben konstruierten in G trifft, so geht MG durch E; Bew. △ MA'G ≅ MF'D (∠ MA'G = HME [HM Tangente] = MF'D), also MG = MD, mithin △ AMG ≅ FMD. 2. Anal. C' beliebig auf MA, C'D' ∥ CD bis zum Durchschnitt mit MB, C'D'E'F' ∞ CDEF gezeichnet; dann ist MEE' eine Gerade, C'E' ∥ CE; daher ME': C'E' = ME: CE = r: e (§. 59).

b) In einen Kreissektor AMB (∠ AMB < R) ein Rechteck CDEF (D auf MB, E auf $\overset{\frown}{AB}$, C und F auf MA) so zu zeichnen, daß zwei Ecken desselben auf einem Radius liegen, wenn außerdem

11. dasselbe ein Quadrat ist. Anal. BG ⊥ MA, BH ∥ DE bis zum Durchschnitt mit ME, so ist BG = BH.

12. die Seiten = m:n. (Ähnlich wie 11.)

13. der Umfang = 2s (§. 142, 49). Anal. Verlängere ED über D um DC, dann ähnlich wie 8.

14. die Differenz zweier Seiten = d (§. 142, 50). (Ähnlich wie 13 und 9.)

15. die Diagonale = e (§. 142, 51). 1. Anal. Vom Trapez MFED kennt man ∠ DMF, ∠ MFE und die Diagonalen ME und FD, daher nach §. 60, 11. 2. Anal. Vom Trapez MCED kennt man die Gestalt des Dreiecks MCD, die Diagonale ME und die nicht parallele Seite CE. Ist nun MC'E'D' ∞ MCED, so ist △ MC'D' ∞ MCD; ein Ort für E' ist bestimmt durch ME': C'E'; ein zweiter ist D'E'; ME' giebt dann den Punkt E.

§. 121.

Dreiecke um Rechtecke.

Um das Rechteck DEFG soll ein Dreieck ABC so gezeichnet werden, daß die eine Seite DE des Rechtecks auf AB zu liegen kommt, während die Ecken F und G auf den Seiten BC und AC liegen.

a) Ohne Ähnlichkeit.

Unter den angegebenen Bedingungen ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben

1. a, h_a 2. h_a, α 3. h_a, γ

b) Mit Ähnlichkeit.

Ist c gegeben, so beachte man folgendes: Eine Parallele durch C zu AB treffe DG in H und HF treffe AB in J. Dann ist, wie mit Hülfe von Proportionen leicht zu zeigen, $DJ = AB = c$. Bei einigen Aufgaben ist außerdem noch zu beachten, daß, wenn man den Halbierungspunkt von GF mit C verbindet diese Linie auch AB halbiert.

Unter den oben angegebenen Bedingungen ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben

4. a, c 6. c, γ 8. h_a, t_a
5. c, α 7. c, t_a 9. c, $t_a \parallel L$.

§. 122.

Dreiecke um und in Dreiecke.

a) Ohne Ähnlichkeit.

1. Um ein gegebenes Dreieck ein anderes ABC zu zeichnen, von welchem die Winkel α und β gegeben sind, und in welchem h_a durch den gegebenen Punkt P geht. *Anal.* Verbinde P mit den auf AC und BC liegenden Ecken und beachte $\angle$ ACP und BCP.

2. Um ein gegebenes Dreieck ein anderes zu zeichnen, von welchem die drei Seiten a, b, c gegeben. *Anal.* Durch die drei Seiten a, b, c sind auch die Winkel α, β, γ gegeben. Dann schlage über den Seiten des gegebenen Dreiecks Kreise, welche bezüglich die Winkel α, β, γ als Peripheriewinkel fassen. Nun kommt es darauf an, durch D eine Linie $= a$ zu ziehen, deren Endpunkte auf den Peripherieen der über DE und DF geschlagenen Kreise liegen. (Vergl. §. 83, 2)

Anmerkung. Statt a, b, c könnten auch drei andere Stücke, durch welche das Dreieck vollständig bestimmt, gegeben sein, z. B. a, b, γ. Allgemeiner würde die Aufgabe so heißen: Ein gegebenes Dreieck in eine solche Lage zu bringen, daß seine drei Seiten einzeln durch drei gegebene Punkte gehen. Die Lösung gilt auch für den Fall, daß die drei Punkte in gerader Linie liegen.

3. Um ein gegebenes Dreieck ein anderes zu zeichnen, von welchem a und β gegeben sind, und in welchem h_a durch P geht. (1 und 2.)

Mit Ähnlichkeit.

b) In den folgenden Aufgaben ist in das △ ABC ein △ DEF zu zeichnen (D auf BC, E auf AC, F auf AB). Soll nun DE ∥ AB sein, so zeichne über AB nach unten ein Dreieck, welches dem gesuchten ähnlich ist, verbinde die Spitze G desselben mit C, so trifft diese Linie AB im Punkte F. Soll dagegen DE einer gegebenen Linie parallel sein, so ziehe von A eine Parallele zu derselben, welche BC oder deren Verlängerung in H trifft, zeichne über AH ein dem gesuchten ähnliches Dreieck und verfahre dann wie vorher.

In das gegebene △ ABC ein △ DEF zu zeichnen, dessen Ecken auf den drei Seiten liegen, und

4. dessen Seiten denen des Dreiecks parallel sind.

5. in welchem DF ∥ AC, EF ∥ BC und DE ∥ L ist.

6. zwar F in einem auf AB gegebenen Punkt, und von dem ferner ∠ F gegeben, und DE ∥ AB ist.

c) In den folgenden Aufgaben soll in △ ABC ein ihm ähnliches Dreieck A'B'C' gezeichnet werden, so daß A' auf BC, B' auf AC, C' auf AB liegt. Beschreibt man um AB'C' und BA'C' Kreise, welche sich in O treffen, so sind AC'OB', BA'OC' und CB'OA' Sehnenvierecke, mithin $\angle AOB = AOC' + BOC' = AB'C' + BA'C' = B'CA' + B'C'A' = 2\gamma$; ebenso $\angle AOC = 2\beta$, $\angle COB = 2\alpha$; daher O Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises.

In △ ABC ein ihm ähnliches A'B'C' so zu zeichnen, daß A' auf BC, B' auf CA, C' auf AB liegt und

7. A'B' ∥ L. Anal. ∠ COA' bekannt, da er = CB'A' ist.

8. A'B' gegeben. Oder in ein gegebenes Dreieck ein anderes gegebenes, welches ihm ähnlich ist, so zu zeichnen, daß die Ecken desselben auf den Gegenseiten der entsprechenden Ecken liegen. Anal. Schneidet man A'B' von C aus auf CO ab bis D, und zieht durch D zu AC eine Parallele, die BC in E trifft, so ist △ CED ≅ B'OA'.

9. A' auf BC gegeben.

10. A'B' durch P geht. Anal. $\angle PA'O = ACO$, daher A' nach §. 11 zu konstruieren.

d) In den folgenden Aufgaben soll in △ ABC ein ihm ähnliches A'B'C' so gezeichnet werden, daß A' auf AB, B' auf BC, C' auf CA liegt. Beschreibt man um AA'C' und BA'B' Kreise, die sich in O treffen, so sind AA'OC', BB'OA', CC'OB' Sehnenvierecke, mithin $\angle AOB = AOA' + BOA' = AC'A' + BB'A' = C'CB' + C'A'B' = \gamma + \alpha = 2R - \beta$; ebenso $\angle BOC = 2R - \gamma$, $\angle COA = 2R - \alpha$, daher O nach §. 11 zu finden.

In $\triangle ABC$ ein ihm ähnliches $A'B'C'$ so zu zeichnen, daß A' auf AB, B' auf BC, C' auf CA liegt und

11. $A'B' \parallel L$. Oder: In ein gegebenes Dreieck ein ihm ähnliches zu beschreiben, dessen Seiten mit den homologen des ersteren gegebene Winkel bilden. Anal. $\angle BOB'$ bekannt, da er $= BA'B'$ ist.

12. $A'B'$ gegeben. Oder: In ein gegebenes Dreieck ein anderes gegebenes, welches ihm ähnlich ist, so zu zeichnen, daß seine Ecken nicht in den Gegenseiten der entsprechenden Ecken liegen. Anal. ähnlich wie 8.

13. A' auf AB gegeben.

14. $A'B'$ durch P geht. Anal. $\angle PA'O = OBC$, daher A' nach §. 11 zu finden.

c) In den folgenden Aufgaben ist $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gegeben. Es soll $\triangle A''B''C''$ so in $\triangle ABC$ gezeichnet werden, daß es $\sim A'B'C'$ wird und A'' auf BC, B'' auf CA, C'' auf AB liegt. Die Winkel von $A'B'C'$ seien α', β', γ'. Beschreibt man um $AB''C''$ und $BA''C''$ Kreise, die sich in O treffen, so sind $AC''OB''$, $BA''OC''$ und $CB''OA''$ Sehnenvierecke, mithin $\angle AOB = AOC'' + BOC'' = AB''C'' + BA''C'' = B''CA'' + B''C''A'' = \gamma + \gamma'$; ebenso $BOC = \alpha + \alpha'$, $COA = \beta + \beta'$, daher O stets nach §. 11 zu finden.

15. In $\triangle ABC$ ein anderes $A''B''C''$ so zu zeichnen, daß es $\cong A'B'C'$ wird. Oder: In ein gegebenes Dreieck ein anderes mit gegebenen Seiten zu zeichnen. 1. Anal. ähnlich wie 8. 2. Anal. auf 2 zurückzuführen.

In $\triangle ABC$ ein anderes $A''B''C''$ so zu zeichnen, daß es dem gegebenen $A'B'C'$ ähnlich ist und

16. $A''B'' \parallel AB$

17. $A''B'' \parallel L$. Anal. $\angle COA''$ bekannt, da er $= CB''A''$.

18. A'' auf BC gegeben.

19. $A''B''$ und $A''C''$ mit BC gleiche Winkel bilden.

20. $A''B''$ durch P geht. Anal. $\angle PA''O = OCA$, daher A'' nach §. 11 zu finden.

In das gegebene $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen,

21. dessen Seite gegeben (15).

22. von welchem eine Ecke der Lage nach gegeben (18).

23. dessen eine Seite $\parallel L$ (17).

24. dessen eine Seite durch P geht (20).

25. In $\triangle ABC$ ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten drei gegebenen Linien parallel sind (17).

26. Um $\triangle ABC$ ein Dreieck $\sim A'B'C'$ so zu zeichnen, daß die $B'C'$ entsprechende Seite im Punkte A nach dem Verhältnis $m:n$ geteilt wird.(§. 92, 17.)

§. 123.

Vierecke und Parallelogramme in und um andere Figuren.

a) 1. Um ein gegebenes Parallelogramm ein Rechteck mit gegebener Seite a zu zeichnen. (§. 70, 8.)

2. Um $\triangle ABC$ ein Quadrat so zu zeichnen, daß die eine Seite durch A im Verhältnis $m:n$ geteilt wird, und daß die anliegenden Seiten durch B und C gehen. (§. 75, 1.)

3. Um ein Quadrat ein anderes so zu zeichnen, daß jede Seite des neuen durch eine Ecke des ursprünglichen im Verhältnis $m:n$ geteilt wird. (§. 75, 1.)

4. In das Viereck DEFG ein $\triangle ABC \sim \alpha\beta\gamma$ so zu zeichnen, daß eine Ecke in den auf DE gegebenen Punkt A fällt, B und C auf die anstoßenden Seiten. Anal. 3. Anh. 32.

5. In das Quadrat ADEF ein $\triangle \sim \alpha\beta\gamma$ so zu zeichnen, daß eine Ecke des Dreiecks mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt, die beiden anderen Ecken aber auf die A gegenüberliegenden Quadratseiten zu liegen kommen. Anal. 3. Anh. 32.

6. In ein gegebenes Quadrat ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Rechteck ähnlich ist. Anal. Die Diagonale des Quadrats halbiert den bekannten Diagonalenwinkel des Rechtecks.

7. In $\triangle ABC$ ein Viereck, welches einem gegebenen ähnlich ist, so zu zeichnen, daß eine Seite auf AB fällt, während die beiden anderen Ecken auf die beiden Seiten fallen. Anal. Zeichne das Viereck der Gestalt nach so in das Dreieck, daß eine Seite auf AB und eine der beiden anderen Ecken auf AC fällt. A ist ein Ähnlichkeitspunkt beider Vierecke, liegt also mit entsprechenden Ecken derselben in einer Geraden.

8. In ein gegebenes Quadrat ein reguläres Fünfeck so zu zeichnen, daß vier Ecken desselben auf die vier Quadratseiten fallen, während die fünfte Ecke auf eine Diagonale fällt. Anal. ähnlich wie 7.

9. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel sind. Anal. Zeichne über einer Diagonale einen Rhombus, dessen andere Seite parallel der zweiten Diagonale, und beachte, daß derselbe sich mit dem gesuchten Rhombus in Ähnlichkeitslage befindet, daß also je zwei entsprechende Ecken mit einer Viereckecke in gerader Linie liegen.

10. In das Viereck ABCD ein Parallelogramm EFGH zu zeichnen, dessen Seiten den Linien L und L′ parallel sind. Anal. E auf AB, F auf BC u. s. w. Zieht man $BJ \parallel FG$ bis zum Durchschnitt mit CD, so ist J bestimmt. Treffen sich ferner JH und BE in M, so verhält sich $BJ : FG = CB : FB$ und $BJ : EH = MB : EB$, folglich, da $FG = EH$ ist, $CB : FB = MB : EB$. Daraus folgt $CM \parallel FE$, wodurch M bestimmt ist.

11. In das Sehnenviereck ABCD ein Tangentenviereck EFGH (E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf AD) so zu zeichnen, daß die Seiten des letzteren mit denen des gegebenen gleiche Winkel bilden. Anal. M der Mittelpunkt des Berührungskreises. Dann ist $ME \perp AB$, $MF \perp BC$ u. s. w., MEBF ein Sehnenviereck, $\angle BMF = BEF = AEH$, und $\angle DMG = DHG = AHE$; daher $\angle BMF + FMG + GMD = AEH + 2R - \gamma + AHE = 2R - \alpha + 2R - \gamma = 2R$. Punkt M liegt also auf der Diagonale BD, ebenso auch auf AC.

b) In den folgenden Aufgaben sind zwei Parallelen L und L′ gegeben und zwei Punkte P und P′; man soll durch P und P′ zwei Parallelen ziehen, welche mit L und L′ ein Parallelogramm bilden, das noch eine Bedingung erfüllt.

α) P liegt auf L, P′ auf keiner der beiden Linien. Bei allen Aufgaben mit Ausnahme der 12ten ist zu beachten, daß die eine Höhe des Parallelogramms, nämlich der Abstand der Parallelen L und L′, bekannt ist.

Unter den angegebenen Bedingungen ein Parallelogramm zu zeichnen,

12. dessen Diagonale = e.

13. das ein Rhombus ist. (Beide Höhen sind gleich.)

14. dessen Umfang = 2s. Anal. Parallelogramm ABCP, AB auf L′. Verlängert man PC über C um CB bis E, so ist PE = s. Fällt man $EF \perp BC$, so ist EF gleich der Höhe auf AB.

15. in welchem die Differenz der Seiten = d. Anal. ähnlich wie bei 14.

16. dessen Seiten sich = m : n verhalten. (Die zweite Höhe des Parallelogramms läßt sich aus einer Proportion finden.)

17. dessen Inhalt = q^2. (Die auf L liegende Seite des Parallelogramms ist aus einer Proportion zu finden.)

β) P und P′ liegen auf keiner der Linien L und L′. Zur Konstruktion ziehe durch P eine Parallele N zu L, und in dem Abstande der Linien L und L′ eine Parallele N′ zu N, so ist zunächst nach α) das gesuchte Parallelogramm zwischen den Parallelen N und N′ zu konstruieren.

Unter den angegebenen Bedingungen ein Parallelogramm zu zeichnen,

18. dessen Diagonale = e.

19. das ein Rhombus ist.

20. dessen Umfang = 2s.

21. in welchem die Differenz der Seiten = d.

22. dessen Seiten sich = m : n verhalten.

23. dessen Inhalt $= q^2$.

c) In ein Parallelogramm ABCD ein anderes EFGH (E auf AB, F auf BC, u. s. w.) von vorgeschriebener Gestalt zu zeichnen. Zur Analysis dieser Aufgaben ist um AEH ein Kreis zu schlagen, welcher HF in L trifft; dann sind AELH und EBFL Sehnenvierecke; mithin $\angle$ LAE = dem durch die Gestalt des gesuchten Parallelogramms gegebenen Winkel LHE; und ebenso $\angle$ LBE = dem bekannten Winkel LFE. Hierdurch ist L zu finden, und dadurch, daß man denselben mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt beider Parallelogramme verbindet, auch die Diagonale FH. Eine zweite Analysis ergiebt sich aus 3. Anh. 32, da vom gesuchten Parallelogramm der Mittelpunkt, ferner jedes zwischen den Diagonalen und einer Seite liegende Dreieck der Gestalt nach bestimmt ist.

In das Parallelogramm ABCD zu zeichnen

24. ein Quadrat (§. 142, 35).

25. einen Rhombus, dessen Winkel α.

26. einen Rhombus, dessen Diagonalen sich $= m:n$ verhalten. (§. 142, 36.)

27. ein Rechteck, dessen Seiten sich $= m:n$ verhalten. (§. 142, 37.)

28. ein Parallelogramm, das einem gegebenen ähnlich ist. (§. 142, 38.)

d) In ein Parallelogramm ABCD ein anderes von gegebener Größe zu zeichnen (Bezeichnungen wie bei c). Bei der Analysis ist 3. Anh. 34 zu benutzen.

In das Parallelogramm ABCD zu zeichnen

29. einen Rhombus von gegebenem Inhalt. (§. 142, 45.)

30. ein Parallelogramm, dessen Inhalt und Diagonalenwinkel gegeben. (§. 142, 46.)

§. 124.

Dreiecke, deren Ecken auf gegebenen Linien oder Kreisen liegen.

a) Bei Lösung der folgenden Aufgaben sind die Örter 3. Anhang 32 bis 36 zu benutzen.

Gegeben P, L, L'. Man soll $\triangle$ PXY (X auf L, Y auf L') so konstruieren, daß

1. es gleichseitig wird.

2. es einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.

3. $\angle$ XPY $= \gamma$ und $PX \cdot PY = q^2$.

4. $\angle$ XPY $= \gamma$ und der Inhalt gegeben.

Gegeben P, L, K. Man soll $\triangle$ PXY (X auf L, Y auf K) so konstruieren, daß

5. es gleichseitig wird.
6. es einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.
7. $\angle XPY = \gamma$ und $PX \cdot PY = q^2$.
8. $\angle XPY = \gamma$ und der Inhalt gegeben.

Gegeben K, K' und P auf der Peripherie von K. Man soll $\triangle PXY$ (X auf K, Y auf K') so konstruieren, daß

9. es gleichseitig wird.
10. es einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.
11. $\angle XPY = \gamma$ und $PX \cdot PY = q^2$.
12. $\angle XPY = \gamma$ und der Inhalt gegeben.

Gegeben K, K' und P auf keiner der Peripherieen. Man soll $\triangle PXY$ (X auf K, Y auf K') so konstruieren, daß

13. es gleichseitig wird.
14. es einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.
15. $\angle XPY = \gamma$ und $PX \cdot PY = q^2$.
16. $\angle XPY = \gamma$ und der Inhalt gegeben.

Gegeben P und L. Auf L sollen X und Y so bestimmt werden, daß $\angle XPY = \gamma$ und

17. $PX \cdot PY = q^2$.
18. der Inhalt von $\triangle PXY$ gegeben.

Gegeben P auf K. Auf K sollen X und Y so bestimmt werden, daß $\angle XPY = \gamma$ und

19. $PX \cdot PY = q^2$.
20. der Inhalt von $\triangle PXY$ gegeben.

Gegeben P und K. Auf K sollen X und Y so bestimmt werden, daß

21. $\triangle PXY$ gleichseitig wird.
22. $\triangle PXY$ einem gegebenen ähnlich wird.
23. $\angle XPY = \gamma$ und $PX \cdot PY = q^2$.
24. $\angle XPY = \gamma$ und der Inhalt von $\triangle PXY$ gegeben.

25. Ein Dreieck $\infty \alpha\beta\gamma$ so zu zeichnen, daß die Entfernungen seiner Ecken von einem Punkte P gleich drei gegebenen Linien sind. Anal. wie 14.

26. Ein Dreieck $\infty \alpha\beta\gamma$ so zu zeichnen, daß die Entfernungen seiner Seiten von einem gegebenen Punkt gleich drei gegebenen Linien sind.

b) 27. $\triangle ABC$, von welchem die drei Seiten a, b, c gegeben, so zu zeichnen, daß die Ecken desselben auf drei sich in P schneidende gerade Linien L, L', L'' zu liegen kommen. 1. Aufl. $\triangle ABC$ ist getrennt zu zeichnen und an diesem sind die drei Linien L, L', L'' zu konstruieren. 2. Anal. Schlage um ABC einen Kreis, der L'' in E trifft, ziehe, da $\triangle AEB$ der Gestalt nach bekannt ist, durch einen

beliebigen Punkt E' auf L'', E'A' ∥ EA, E'B' ∥ EB bis zu ihren Durchschnittspunkten mit L und L'.

28. Ein Dreieck ABC ∞ αβγ so zu zeichnen, daß seine Ecken auf drei sich in P schneidende Geraden L, L', L'' zu liegen kommen und AB durch P' geht. Anal. ähnlich wie 27.

29. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Spitze in einen gegebenen Punkt C fällt, dessen Grundlinie einer gegebenen Linie parallel und deren Endpunkte auf zwei gegebene sich schneidende Linien L und L' fallen. Anal. Verbinde die Mitte der Grundlinie mit der Spitze und dem Durchschnittspunkt von L und L'.

§. 125.

Dreiecke in Kreisen, so daß die Seiten durch gegebene Punkte gehen.

1. In einen gegebenen Kreis ein △ ABC so zu zeichnen, daß AB durch P geht, AC ∥ L und BC ∥ L' wird. Anal. Da ∠ ACB, mithin auch AB bekannt, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf §. 77, 5. oder 6.

2. In einen gegebenen Kreis ein △ ABC so zu zeichnen, daß die Seiten AC und BC durch die außerhalb des gegebenen Kreises liegenden Punkte P und P' gehen und AB ∥ PP' ist. 1. Anal. Lege in B eine Tangente an den Kreis, welche PP' in E trifft, dann ist PEBC ein Sehnenviereck; zieht man von P' noch eine beliebige Sekante P'B'C' durch den gegebenen Kreis, so liegen auch P, E, B', C' auf einem Kreise, wodurch E zu finden. 2. Anal. Lege von P und P' an den Kreis die Tangenten PF und P'G, so ist PC : P'C = PA : P'B; diese Proportion zusammengesetzt mit der identischen PC : P'C = PC : P'C liefert nach Ausziehung der Wurzeln PC : P'C = PF : P'G, woraus C nach §. 59 zu konstruieren. 3. Anal. AX sei Tangente an Kreis K; dann ist ∠ AXY = XZY = XP'P; daher XA auch Tangente an den durch X, P und P' gelegten Kreis; dieser muß also K in X berühren, daher §. 100, 3.

3. In einen gegebenen Kreis ein △ ABC so zu zeichnen, daß die Seiten BC und AC durch die innerhalb des gegebenen Kreises liegenden Punkt P und P' gehen und AB ∥ PP' ist. 1. Anal. ähnlich wie bei 2, nur daß Sehnen an die Stelle der Sekanten treten. 2. Anal. ähnlich wie die von 2, wenn man statt der Tangenten durch P und P' die kleinsten Sehnen legt.

4. In einen gegebenen Kreis ein △ ABC so zu zeichnen, daß die Seiten BC und AC durch zwei gegebene Punkte P und P' gehen und AB ∥ L ist. Anal. Ein um PBC geschlagener Kreis treffe PP' in E, und EB den gegebenen Kreis in F; zieht man durch P'

die beliebige Sehne B'C' in dem gegebenen Kreise, so liegen auch P, E, B', C' auf einem Kreise; also ist E bestimmt. Ferner ist $\angle AFB = ACB$, und da PCEB ein Sehnenviereck ist, folgt, daß $AF \parallel PP'$ ist, also FAB und $\overset{\frown}{FB}$ bekannt.

5. In einen gegebenen Kreis ein $\triangle ABC$ so zu zeichnen, daß die drei Seiten AB, AC und BC bezüglich durch die drei in gerader Linie liegenden Punkte P, P' P'' gehen. Anal. Zieht man $BD \parallel PP'$, bis es den Kreis trifft, und verlängert DA bis es PP' in E trifft, so ist EACP'' ein Sehnenviereck; legt man daher von P' an den gegebenen Kreis eine Tangente P'F, legt durch P'' und F einen Kreis, an welchem P'F Tangente ist, so schneidet dieser PP' in E; dann ist $\triangle ABD$ nach 2) zu zeichnen.

6. In einen gegebenen Kreis ein $\triangle ABC$ so zu zeichnen, daß AB, AC, BC bezüglich durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte P, P', P'' gehen. Anal. Ziehe $BD \parallel P'P''$ bis zum Kreise, AD treffe P'P'' in E, so ist EACP'' ein Sehnenviereck; zieht man von P' noch eine beliebige Sekante P'A'C' durch den gegebenen Kreis, so liegen E, A', C', P'' auf einem Kreise, wodurch E zu finden. Die Aufgabe ist dadurch auf 4 zurückgeführt.

§. 126.

Parallelogramme, deren Seiten durch drei gegebene Punkte gehen oder Parallelogramme um Dreiecke.

a) Fig. 18. Es sind drei Punkte E, D, F gegeben; man soll ein Rechteck so zeichnen, daß eine Ecke desselben in den Punkt D fällt, während die gegenüberliegenden Seiten AB und BC selber oder ihre Verlängerungen resp. durch die Punkte E und F gehen. Oder, wenn man die drei Punkte E, D, F zu einem Dreieck verbindet, kann die Aufgabe auch so ausgesprochen werden: Um das Dreieck EDF unter der oben angegebenen Bedingung ein Rechteck zu zeichnen.

Konstruiert man $\triangle F'JD$ kongruent und in entsprechender Lage mit FCD so, daß die zu CD homologe Seite JD in die Verlängerung von AD fällt, so ist $\angle FDF' = CDJ = R$ und F' bekannt. Konstruiert man $\triangle F''KD$ kongruent und in entsprechender Lage mit FCD so, daß die zu CD homologe Seite KD auf AD fällt, so ist $\angle F''DF = KDC = R$, also auch F'' bestimmt. Hiernach sind die Aufgaben 3 bis 7 zurückgeführt auf §. 70, b und §. 75.

Unter den gegebenen Bedingungen ein Rechteck so zu zeichnen, daß

1. eine Seite = a. 2. die Diagonale = e.

3. der Umfang = 2s. Anal. AJ zu konstruieren nach §. 70, 8.

4. die Differenz der Seiten = d. 1. Anal. AK zu konstruieren nach §. 70, 15.

5. die Seiten im Verhältnis m : n stehen. Anal. AJ oder AK zu konstruieren nach §. 75, 1.

6. die Seiten des Rechtecks gleich sind, die Figur also ein Quadrat ist.

7. der Inhalt = q^2. Anal. AJ oder AK zu konstruieren nach §. 75, 4.

b) Fig. 19. Gegeben 3 Punkte E, D, F; man soll ein Parallelogramm, dessen Winkel bei D = α ist, so zeichnen, daß eine Ecke desselben in den Punkt D fällt, während die gegenüberliegenden Seiten AB und BC oder ihre Verlängerungen resp. durch die Punkte E und F gehen. Oder um das Dreieck EDF ein Parallelogramm, dessen Winkel bei D = α, in der eben angegebenen Weise zu zeichnen.

Konstruiert man △ JDF′ kongruent und in entsprechender Lage mit CDF so, daß die zu CD homologe Seite JD in die Verlängerung von AD fällt, so ist ∠ FDF′ = CDJ = 2R − α, mithin F′ bekannt, und J liegt auf einem konstruierbaren Kreisbogen (§. 11). Konstruiert man ferner △ KDF″ kongruent und in entsprechender Lage mit CDF, so daß die zu CD homologe Seite KD auf AD fällt, so ist ∠ FDF″ = CDK = α, mithin auch F″ bestimmt und ein Kreisbogen für K. Endlich ist noch der um EDA beschriebene Kreis bekannt, und es kommt nun darauf an, durch D eine Gerade so zu ziehen, daß ihre Abschnitte DA und DJ oder DA und DK gewissen Bedingungen genügen. Sie sind dadurch auf die von §. 83, a und §. 92, b, α zurückgeführt.

Anmerkung. Konstruiert man um die Dreiecke EAD und DCF Kreise, so werden die Aufgaben leicht auf die von §. 83, b und §. 92, b, β zurückgeführt.

Unter den angegebenen Bedingungen ein Parallelogramm so zu zeichnen, daß

8. eine Seite = a. 9. eine Diagonale = e.

10. der Umfang = 2s. 2. Anal. Ein um D mit DC geschlagener Kreis treffe BF in L. Verlängert man nun AD über D um DC bis M, so ist AM = s. Konstruiert man ferner △ DMN ≅ DLF und in entsprechender Lage, so ist ∠ MDN = LDF, daher ∠ FDN = LDM = DLC = DCL = α, also N bekannt. Zieht man noch NG ∥ FB bis zum Durchschnitt mit AE, so ist NG = s und ∠ NGE = α oder 2R − α.

11. die Differenz der Seiten = d.

12. die Seiten sich = m : n verhalten. 2. Anal. Teile EN (Figur wie bei der 2. Anal. von 10) im Verhältnis m : n.

13. die Seiten gleich sind, die Figur also ein Rhombus ist.

14. der Inhalt = q^2. (Das Produkt der Seiten ist leicht zu finden.)

§. 127.

Parallelogramme, deren Seiten durch vier gegebene Punkte gehen oder Parallelogramme um Vierecke.

a) Fig. 18. Sind 4 Punkte, G, H, D, F, durch welche die Seiten eines Rechtecks A'B'C'D' (G auf A'B') oder ihre Verlängerungen gehen sollen, oder ist ein Viereck GDHF gegeben, um welches ein Rechteck so gezeichnet werden soll, daß je eine Ecke des Vierecks auf einer Seite des Rechtecks oder deren Verlängerung liegt, so ziehe durch D eine Linie DE, welche gleich und parallel mit GH ist (wobei zu beachten, daß, wenn ein Viereck gegeben, GH Diagonale desselben ist), und konstruiere nach §. 126, a ein Rechteck ABCD, dessen eine Ecke in D liegt, und dessen gegenüberliegende Seiten verlängert durch E und F gehen, und das den gegebenen Bedingungen genügt; zieht man dann durch G und H Parallelen zu AB, so erhält man das Rechteck A'B'C'D', welches dem Rechteck ABCD kongruent ist.

Bei der Ausführung der Konstruktion ist es nicht nötig, die Zeichnung des Rechtecks ABCD ganz auszuführen. Sobald nur die Richtung einer Seite dieses Rechtecks gefunden ist, wird auch A'B'C'D' leicht gefunden. Übrigens lassen sich diese Aufgaben auch ohne Zurückführung auf §. 126 lösen, indem man wie dort ein Dreieck kongruent CDF so konstruiert, daß die zu CD homologe Seite entweder in die Richtung HN (HN $\perp$ GB') oder in die entgegengesetzte Richtung fällt.

Unter den gegebenen Bedingungen ein Rechteck zu zeichnen, wenn außerdem gegeben

1. eine Seite = a.
2. die Diagonale = e.
3. der Umfang = 2s
4. die Differenz der Seiten = d.
5. das Verhältnis der Seiten = m : n (vergl. §. 142, 41).
6. das Rechteck soll ein Quadrat sein (vergl. §. 142, 40). 2. Anal. Das gesuchte Quadrat sei A'B'C'D'. Die vier Punkte, durch welche die Seiten desselben gehen sollen, seien G, F, H, D (G auf A'B' u. s. w.); ferner HN $\perp$ A'B' und DC $\perp$ B'C'. Nun bringe man $\triangle$ DCF in die Lage HNL, so ist HL $\perp$ DF. 3. Anal. Specieller Fall von 15.
7. der Inhalt = q^2 (vergl. §. 142, 47).

b) Es sind vier Punkte G, H, D, F, gegeben; man soll ein Parallelogramm, dessen Winkel = α, so zeichnen, daß die Seiten desselben oder ihre Verlängerungen durch die 4 Punkte gehen. Oder um das Viereck GDHF ein Parallelogramm mit dem Winkel α in der eben angegebenen Weise zu zeichnen.

Die folgenden Aufgaben sind durch eine ähnliche Konstruktion, wie die unter a) angeführte, auf die von §. 126, b zurückzuführen. Die dort gemachte Bemerkung gilt auch hier.

Unter den angegebenen Bedingungen ein Parallelogramm so zu zeichnen, daß

8. eine Seite = a. 9. eine Diagonale = e.

10. der Umfang = 2s.

11. die Differenz der Seiten = d.

12. das Verhältnis der Seiten = m : n (vergl. §. 142, 43 u. 44).

13. das Parallelogramm soll ein Rhombus sein (vergl. §. 142, 42).

14. der Inhalt = q^2 (vergl. §. 142, 48).

Die Aufgaben 5, 6, 12, 13 sind specielle Fälle folgender allgemeinen:

15. Um ein gegebenes Viereck ABCD ein anderes EFGH (A soll auf EH, B auf EF u. s. w. liegen) zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist. Anal. Schlage um DGC einen Kreis, welcher EG in K, und um AEB einen Kreis, welcher EG in L trifft, so ist ∠ CDK = CGK und ∠ DCK = DGK, daher K und auf ähnliche Weise auch L bestimmt.

§. 128.

Verwandlung von Dreiecken, die einem gegebenen Dreieck ähnlich sind, sowie auch von Trapezen und Vierecken, bei denen diese Verwandlung Anwendung findet.

Die Auflösungen sind ähnlich derjenigen der 1. Aufgabe.

1. △ ABC in ein anderes zu verwandeln, welches dem gegebenen △ αβγ ähnlich ist. Anal. AFG sei das gesuchte Dreieck und gleich ABC (F liege auf AB). Zieht man durch C eine Parallele zu AB, welche AG in D trifft, und zieht DE ∥ GF, so ist △ AED ∞ AFG, also AED : AFG = AE^2 : AF^2; und da AED und ABC gleiche Höhe haben, verhält sich AED : ABC = AE : AB. Da AFG = ABC, so folgt aus beiden Proportionen $AE^2 : AF^2 = AE : AB$, also $AF^2 = AE \cdot AB$; mithin AF mittlere Proportionale zwischen den bekannten Linien AE und AB.

2. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

3. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, dessen Winkel an der Spitze = γ.

4. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel unverändert bleibt und dessen Gegegenseite ∥ L ist.

5. △ ABC in ein Trapez ABEF so zu verwandeln, daß AB die eine parallele Seite, ein an derselben liegender Winkel = dem Dreieckswinkel α, der andere dagegen = φ wird. Anal. AC und BE schneiden sich in D. Dann ist △ DEF nach 1) zu konstruieren = DBC und ∞ DBA.

6. Viereck ABCD mit Beibehaltung der Seite AB und der Winkel bei A und B in ein Trapez ABFG zu verwandeln. Anal. AD und BC

schneiden sich in E; dann ist △ EFG nach 1) zu konstruieren = ECD und ∞ EBA.

7. Viereck ABCD in ein anderes AEFD zu verwandeln mit Beibehaltung von AD und ∠ A; dagegen sollen die Winkel bei E und D gleich zwei gegebenen Winkeln φ und ψ werden. Anal. Verlängere AE und DF bis sie sich in G schneiden, verwandle Viereck ABCD in ein anderes ABHD, in welchem H auf GD liegt, so ist durch eine Linie, welche mit AB ∠ φ bildet, ein △ GEF = GBH abzuschneiden.

§. 129.

Verwandlung von Vielecken, die einem gegebenen Vieleck ähnlich sind und Zeichnung von Kreisen.

a) In den folgenden Aufgaben ist zunächst eine Seite des gesuchten Vielecks zu berechnen; dann sind die Aufgaben auf die erste zurückgeführt.

1. Ein Vieleck, welches einem gegebenen ähnlich ist, zu zeichnen, wenn eine Seite gegeben.

2. Ein gegebenes Vieleck A in ein anderes X zu verwandeln, welches dem gegebenen Vieleck B ähnlich ist. Anal. Eine Seite des Vielecks B sei b, die homologe Seite von X werde mit x bezeichnet. Verwandle A und B in Quadrate, so daß $A = \alpha^2$ und $B = \beta^2$. Dann ist $B:X = b^2:x^2$ oder $B:A = b^2:x^2$ oder $\beta^2:\alpha^2 = b^2:x^2$ oder $\beta:\alpha = b:x$.

3. Ein Vieleck X zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebenen Vielecke A und B und einem dritten gegebenen Vieleck C ähnlich ist.

4. Ein Vieleck X zu zeichnen, welches gleich der Differenz zweier gegebenen Vielecke A und B, und einem dritten gegebenen Vieleck C ähnlich ist.

b) In den folgenden Aufgaben findet man leicht den Radius des gesuchten Kreises mit Benutzung der Sätze: Die Peripherieen zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien, und ihre Flächeninhalte wie die Quadrate der Radien.

Einen Kreis zu zeichnen,

5. dessen Peripherie nmal so groß ist wie die des gegebenen Kreises K.

6. dessen Peripherie gleich der Summe der Peripherieen der gegebenen Kreise K und K′ ist.

7. dessen Peripherie gleich der Differenz der Peripherieen der gegebenen Kreise K und K′ ist.

8. welcher nmal so groß ist, als der gegebene Kreis K.

9. welcher gleich ist der Summe der gegebenen Kreise K und K′.

10. welcher gleich ist der Differenz der gebenen Kreise K und K′.

§. 130.

Durch P eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie von einem gegebenen Parallelogramm oder Dreieck ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt abschneidet.

a) In den folgenden Aufgaben soll man durch P, welcher auf einer Seite AD oder deren Verlängerung eines Rechtecks oder Parallelogramms liegt, eine Linie, welche CD oder deren Verlängerung über D in E, und die Verlängerung von BC über B hinaus in F trifft, so ziehen, daß $\triangle ECF$ gleich dem Rechteck resp. Parallelogramm ABCD ist. In allen Aufgaben ist F zu bestimmen durch $BF^2 = AP^2 - PD^2$. Auch nach §. 73, 10 zu lösen.

Unter den angegebenen Bedingungen durch P eine Linie zu ziehen, wenn die Figur ist

1. ein Rechteck; P liegt auf der Verlängerung von AD über D hinaus.

2. ein Rechteck; P liegt auf AD.

3. ein Parallelogramm; P liegt auf der Verlängerung von AD über D hinaus.

4. ein Parallelogramm; P liegt auf AD.

b) Von einem gegebenen Dreieck ist ein anderes abzuschneiden durch eine Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

5. Durch den Punkt P, welcher innerhalb eines gegebenen Winkels liegt, eine Linie DE so zu ziehen, daß sie ein Dreieck von gegebener Größe abschneidet. Anal. Fig. 20. Verwandle das gegebene Dreieck in ein anderes ABC, welches den gegebenen Winkel als Winkel an der Grundlinie hat; ziehe $PF \parallel AB$, und verwandle $\triangle ABC$ in ein anderes AFG, dessen Spitze in F und dessen Grundlinie in die Richtung von AB fällt; $\triangle AFG$ in das Parallelogramm AHIF, welches mit $\triangle AFG$ Seite AF und Winkel A gemein hat. Da $\triangle ADE$ dem Parallelogramm gleich sein soll, so muß $\triangle PJK = PFE + DHK$ sein. Diese drei Dreiecke sind ferner ähnlich, PJ, PF, DH homologe Seiten. Daraus folgt aber, daß, wenn man das rechtwinklige Dreieck DHL aus den Katheten DH und $LH = PF$ konstruiert, die Hypotenuse $LD = PJ$, also bekannt ist. Hierdurch wird D leicht gefunden. 2. Anal. nach §. 73, 10.

6. Wie 5, nur liege P außerhalb $\angle BAC$.

7. Auf der Seite BC des Dreiecks ABC ist P gegeben; man soll durch P eine Linie, welche AC oder deren Verlängerung in D, und die Verlängerung von AB oder AB selber in E schneidet, so ziehen, daß $\triangle ADE = ABC$ ist.

8. Auf der Verlängerung der Seite AC über C hinaus des Dreiecks ABC ist P gegeben; man soll von P aus zwischen den beiden anderen

Seiten eine gerade Linie ziehen, welche ein Viereck von gegebenem Inhalt abschneidet. Anal. wie 6, wenn man bedenkt, daß durch den Inhalt des Vierecks auch der des vom △ ABC übrig bleibenden Dreiecks gegeben ist.

9. Durch P, welcher innerhalb ∠ A liegt, eine Linie so zu ziehen, daß dadurch ein Dreieck vom kleinsten Flächeninhalt abgeschnitten wird. Aufl. Ziehe durch P Parallele zu den Schenkeln, welche diese in D und E treffen, trage AD von D aus auf der Verlängerung bis B ab, BP trifft verlängert den anderen Schenkel in C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

§. 131.

Teilung des Dreiecks nach bestimmtem Verhältnis.

a) Die folgenden Aufgaben sind durch einfache Teilung lösbar; und zwar die meisten derselben ähnlich wie frühere, in denen verlangt wurde, die betreffenden Figuren in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen, daher auf jene Aufgaben verwiesen ist.

1. Ein Dreieck von einer Ecke im Verhältnis m : n zu teilen. §. 110, 1.

2. Ein Dreieck von einem Punkt auf einer Seite im Verhältnis m : n zu teilen. §. 110, 5.

3. Von einem auf einer Dreiecksseite gegebenen Punkt zwei Linien so zu ziehen, daß sie das Dreieck im Verhältnis m : n : p teilen.

4. Von zwei auf einer Dreiecksseite gegebenen Punkten zwei Linien zu ziehen, welche das Dreieck im Verhältnis m : n : p teilen.

5. Ein Dreieck von einem Punkt innerhalb durch zwei Linien im Verhältnis m : n zu teilen. §. 110, 7.

6. Ein Dreieck von einem Punkt innerhalb in drei Teile zu teilen, welche sich = m : n : p verhalten, wenn eine Teilungslinie der Lage nach gegeben ist. §. 110, 8.

7. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt P so zu bestimmen, daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken mit den Seiten drei Dreiecke bilden, welche sich = m : n : p verhalten. 1. Anal. Verwandle die Dreiecke APC und BPC in Dreiecke, in welchen die P gegenüberliegenden Seiten in die Verlängerung von AB fallen. 2. Anal. Ziehe durch P Parallelen zu zwei Seiten bis zu den auf die Seiten gefällten Höhen, so teilen sie die letzteren in gegebenem Verhältnis.

8. Im △ ABC ist P auf AC gegeben; man soll X auf BC so bestimmen, daß sich △ PCX : ABX = m : n verhält. Anal. Fälle von A auf BC das Lot AD, und von P auf BC das Lot PE, so ist CX · PE : BX · AD = m : n, oder CX : BX = mAD : nPE. Hiernach ist BC zu teilen.

b) Bei Lösung der folgenden Aufgaben ist die mittlere Proportionale zu suchen.

9. Ein Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite zu halbieren. Anal. $ABC : DEC = AC^2 : DC^2 = 2 : 1$, also $DC^2 = \frac{1}{2} AC^2$, daher DC mittlere Proportionale zwischen AC und $\frac{1}{2}$AC.

10. Ein Dreieck durch eine Parallele mit einer Seite im Verhältnis m : n zu teilen.

11. Ein Dreieck durch Linien, welche der nach der Mitte der Grundlinie gezogenen Transversale parallel sind, in n gleiche Teile zu teilen.

12. In einem Dreieck einen Punkt X so zu bestimmen, daß wenn man ihn mit der Spitze verbindet, und von ihm mit den Seiten Parallelen zieht, das Dreieck in drei gleiche Teile geteilt wird. Anal. CX treffe AB in F, so ist F die Mitte von AB und DE, mithin $DFX = \frac{1}{3} AFC$, und $EFX = \frac{1}{3} BFC$; also ähnlich wie §. 131, 9.

13. Ein Dreieck durch Linien von gegebener Richtung in drei gleiche Teile zu teilen. Anal. BEF (E auf AB, F auf BC) sei $= \frac{1}{3} ABC$, wo FE parallel der gegebenen Richtung. Ziehe CD ∥ EF, so ist $BEF : BDC = BE^2 : BD^2$; und da BDC und BAC gleiche Höhen haben, $BDC : BAC = BD : AB$. Beide Proportionen zusammengesetzt, giebt $BEF : ABC = BE^2 : BD \cdot AB$, und da $BEF = \frac{1}{3} ABC$, so ist $BE^2 = \frac{1}{3} AB \cdot BD$; daher BE mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{3}$AB und BD.

14. Ein Dreieck durch eine Linie von gegebener Richtung im Verhältnis m : n zu teilen.

15. Ein Dreieck durch zwei Linien, von denen jede eine gegebene Richtung hat, im Verhältnis m : n : p zu teilen.

16. Ein Dreieck so in drei gleiche Teile zu teilen, daß eine Teilungslinie der Grundlinie parallel ist, die andere aber verlängert durch die Spitze des Dreiecks geht.

17. Ein Dreieck so in drei gleiche Teile zu teilen, daß eine Teilungslinie der Grundlinie parallel ist, die andere, zwischen Parallele und Grundlinie liegend, auf diesen Linien senkrecht steht.

18. Ein Dreieck durch drei Linien so in vier gleiche Teile zu teilen, daß eine Teilungslinie parallel der Grundlinie ist, die beiden anderen aber zwischen der Parallele und der Grundlinie liegen und verlängert durch die Spitze gehen.

19. Im △ ABC ist von C aus die beliebige Transversale CD gezogen; man soll EF (schneidet CD in G) parallel AB so ziehen, daß △ CGF = Viereck ADGE wird. Anal. Es kommt darauf an, durch eine Linie ∥ AB ein Dreieck abzuschneiden, welches = △ ADC ist. (§. 128, 1.)

20. $\triangle ABC$ durch $DE \parallel AB$ ſtetig zu teilen, ſo daß CDE die mittlere Proportionale wird. Anal. $\triangle ABC : DEC = DEC : ABC - DEC$ oder $AC^2 : DC^2 = DC^2 : AC^2 - DC^2$. Zeichnet man nun über AC einen Halbkreis und in denſelben die Sehne $CF = CD$, ſo iſt $AC^2 - DC^2 = AF^2$, daher $AC^2 : CF^2 = CF^2 : AF^2$, oder wenn $FG \perp AC$, $AC^2 : AC \cdot GC = AC \cdot GC : AC \cdot AG$, mithin $AC : GC = GC : AG$. (§. 115, 2.)

21. $\triangle ABC$ durch $DE \parallel AB$ ſtetig zu teilen, ſo daß ABED die mittlere Proportionale wird. Anal. Ähnlich wie bei 20 ergiebt ſich $AC : AG = AG : GC$.

22. Ein Dreieck durch eine Linie aus einem Punkt innerhalb desſelben zu halbieren. 1. Anal. Mit Benutzung von §. 130, 5. 2. Anal. Iſt XYC das geſuchte Dreieck, und D die Mitte von AC, ſo iſt $CX \cdot CY = CD \cdot CB$ (§. 73, 10).

23. Ein Dreieck durch eine Linie zu halbieren aus einem Punkt außerhalb desſelben. 1. Anal. Mit Benutzung von §. 130, 6. 2. Anal. wie 22, 2. Anal.

24. Ein Dreieck durch eine Linie aus einem Punkt innerhalb desſelben im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

25. Ein Dreieck durch eine Linie aus einem Punkt außerhalb des Dreiecks im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

§. 132.

Teilung des Parallelogramms nach gegebenem Verhältnis.

Eine Gerade, welche zwei Gegenſeiten eines Parallelogramms ſelbſt (nicht ihre Verlängerungen) ſchneidet und dabei das Parallelogramm im Verhältnis $m : n$ teilt, teilt auch die Verbindungslinie der Mitten der beiden anderen Gegenſeiten (Mittellinie) in demſelben Verhältnis. Soll alſo ein Parallelogramm in gegebenem Verhältnis geteilt werden, ſo wird man zunächſt eine Mittellinie in demſelben Verhältnis teilen. Da zwei Mittellinien vorhanden ſind, ſo wird man von beiden diejenige wählen, welche je nach den Bedingungen der Aufgabe leichter (unter Umſtänden auch allein) zum Ziele führt. Iſt nun etwa noch ein Punkt P gegeben, durch welchen die geſuchte Gerade gehen ſoll, ſo verbindet man dieſen mit dem Teilpunkte. Hierbei ſind nun zwei Fälle zu unterſcheiden. 1) Schneidet dieſe Gerade die beiden zur Mittellinie parallelen Seiten, ſo iſt ſie die geſuchte Gerade. 2) Trifft dagegen (Fig. 21), wenn L der Teilpunkt iſt, PL die Verlängerung von CD, ſo verbinde man D mit L und verlängere DL bis zum Durchſchnitt N mit AB. Nun iſt $\triangle AND$ einem der beiden geſuchten Teile gleich, denn es verhält ſich $\triangle AND : NBCD = KL : LM = m : n$. Es kommt alſo darauf an, durch P eine Gerade zu ziehen, welche von $\angle DAB$ ein Dreieck von gegebener Größe

abschneidet (§. 130, 5 oder 6). Wenn die Verlängerung von DL nicht AB selbst, sondern die Verlängerung von AB trifft, so würde man nicht D, sondern B mit L verbinden und das durch die Verlängerung von BL abgeschnittene Dreieck benutzen.

Ein Parallelogramm im Verhältnis m:n zu teilen

1. durch eine Parallele zu einer Seite.
2. durch eine Gerade aus einer Ecke.
3. durch eine Gerade aus einem Punkt einer Seite.
4. durch eine Gerade aus einem Punkt innerhalb des Parallelogramms.
5. durch eine Gerade aus einem Punkt auf der Verlängerung einer Seite.
6. durch eine Gerade aus einem Punkt auf der Verlängerung einer Diagonale.
7. durch eine Gerade aus einem Punkt außerhalb des Parallelogramms.
8. durch eine Gerade in gegebener Richtung. Anal. Trifft die betreffende Linie die Verlängerung einer Seite, so ist §. 128, 1 zu benutzen.

§. 133.

Teilung des Trapezes nach gegebenem Verhältnis.

Soll das Trapez ABCD im Verhältnis m:n geteilt werden, so teilt man ebenfalls die Mittellinie KM (Verbindungslinie der Schenkelmitten) im Verhältnis m:n. Der Teilpunkt sei L. Nun sind drei Fälle zu unterscheiden. Die durch L nach einem gegebenen Punkte oder in gegebener Richtung gezogene Gerade schneidet 1) die beiden parallelen Seiten, 2) eine parallele Seite und die Verlängerung der anderen, 3) die beiden Schenkel. Die beiden ersten Fälle werden wie in § 132 erledigt. Für den dritten beachte man folgendes: DL treffe verlängert AB in N. Man verwandelt nun △ AND in ein anderes ABE, so daß E auf AD liegt. Schneiden sich AD und BC verlängert in F, so schneidet die gesuchte Gerade von ∠ AFB ein Dreieck ab, welches gleich EFB ist. Trifft DL nicht AB, sondern die Verlängerung von AB, so verbindet man nicht D, sondern B mit L. Diese Linie muß dann verlängert DC treffen. Das dadurch vom Trapez abgeschnittene Dreieck verwandelt man so, daß DC eine seiner Seiten wird. In Anwendung kommen §. 104, 1; §. 128, 1; §. 130, 5 und 6.

Ein Trapez im Verhältnis m:n zu teilen durch eine Gerade,

1. welche durch den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten geht.
2. welche parallel einer der nicht parallelen Seiten ist.

3. welche auf den beiden parallelen Seiten senkrecht steht.

4. aus einer Ecke.

5. aus einem Punkt in einer der Parallelen.

6. aus einem Punkt einer nicht parallelen Seite.

7. Im Trapez ABCD ist die Diagonale AC gezogen; man soll durch den gegebenen Punkt P eine Linie so ziehen, daß die entstandenen Trapeze gleich den Dreiecken ABC und ACD werden. (Nur dann möglich, wenn die verlangte Linie zwischen den parallelen Seiten liegt.) Aufl. Ziehe durch den Halbierungspunkt von AB eine Parallele zu BC, halbiere dieselbe und verbinde diesen Punkt mit P.

8. In einem Trapez ABCD einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Verbindungslinien mit den Ecken vier Dreiecke bilden, von denen die gegenüberliegenden gleich sind. Anal. AD und BC schneiden sich in F, FX treffe AB in G und DC in H. $\triangle AXD : AXF = AD : AF = BC : BF = \triangle BXC : BXF$, daher $\triangle AXF = BXF$. Ferner $\triangle AXF : AXG = FX : XG = \triangle BXF : BXG$, mithin $\triangle AXG = BXG$, $AG = GB$ und $DH = HC$. Da $\triangle ABX = CDX$, so verhalten sich ihre Grundlinien umgekehrt wie ihre Höhen, diese wiederum wie $HX : GX$, also $HX : GX = AB : CD$ (§. 114, 1). Zur eleganteren Ausführung dieser Teilung gelangt man, indem man AC zieht und die dadurch auf HG gebildeten Abschnitte beachtet.

9. von einem Punkt innerhalb des Trapezes.

10. von einem Punkt auf der Verlängerung einer parallelen Seite.

11. von einem Punkt auf der Verlängerung einer nicht parallelen Seite.

12. von einem Punkt auf der Verlängerung einer Diagonale.

13. von einem Punkt außerhalb des Trapezes.

14. durch eine Linie von gegebener Richtung.

15. Ein Trapez durch Parallelen mit den Grundlinien in 3 gleiche Teile zu teilen.

16. Ein Trapez durch eine Parallele zu den Grundlinien im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

17. Ein Trapez ist durch eine Paralle zu den beiden Grundseiten in zwei Trapeze geteilt. Eine Gerade zu ziehen, welche das eine $= m : n$, das andere $= m' : n'$ teilt.

§. 134.

Teilung des Vierecks und Vielecks.

a) Teilung des Vierecks durch eine Gerade. Zwei Fälle sind zu unterscheiden. 1) Die gesuchte Gerade schneidet vom Viereck ein Dreieck ab. Es wird sich dann aus den Bedingungen der Aufgabe stets ein Dreieck konstruieren lassen, welches jenem abzuschneidenden Dreieck gleich ist und mit ihm einen Winkel gemein hat. 2) Die gesuchte

Gerade teilt das Viereck in zwei Vierecke. Man verlängert dann die zu schneidenden Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt F. Mit Hülfe eines ähnlichen Verfahrens wie in §. 133, dritter Fall, läßt sich am ∠ F ein Dreieck herstellen, welches demjenigen, das die gesuchte Gerade von ∠ F abschneidet, gleich ist. Zur Anwendung kommen §. 112; §. 104, 1; §. 128, 1; §. 130, 5 und 6.

Ein Viereck im Verhältnis m : n zu teilen durch eine Gerade

1. aus einer Ecke.
2. aus einem Punkt einer Seite.
3. aus dem Durchschnittspunkt der Diagonalen.
4. aus dem Durchschnittspunkt zweier verlängerten Gegenseiten.
5. aus einem beliebigen Punkte.
6. die einer Seite parallel ist.
7. die einer Diagonale parallel ist.
8. die L parallel ist.

Ein Viereck zu halbieren durch eine Gerade

9. aus dem Durchschnittspunkt der Diagonalen.
10. aus dem Durchschnittspunkt zweier verlängerten Gegenseiten.
11. aus einem beliebigen Punkte.
12. die einer Seite parallel ist.
13. die einer Diagonale parallel ist.
14. die L parallel ist.

b) Anderweitige Teilung des Vierecks.

15. Innerhalb eines Vierecks einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken des Vierecks vier Dreiecke bilden, von denen die gegenüberliegenden gleich sind. Anal. XY ⊥ AD, XZ ⊥ BC. Da △ ADX = BCX, verhält sich XY : XZ = BC : AD, daher ein Ort für X nach Anhang III, 26. Ein anderer Ort ergiebt sich aus den Dreiecken ABX und CDX.

16. Innerhalb eines Vierecks einen Punkt so zu bestimmen, daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken vier Dreiecke bilden, von denen drei einander gleich sind. Anal. ähnlich wie 15, mit Hülfe von Anhang III, 26.

c) Teilung des Vielecks.

Ein Vieleck im Verhältnis m:n zu teilen

17. durch eine Gerade von einer Ecke aus.
18. durch eine Gerade von einem auf einer Seite gegebenen Punkte aus.
19. so, daß ein Teil dem ganzen Vieleck ähnlich wird. (§. 131, 10.)

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben, welche durch algebraische Analysis zu lösen sind.

§. 135.

Aufgaben, in denen ein Ausdruck von der Form $\frac{ab}{c}$ zu konstruieren ist.

Suche die vierte Proportionale zu c, a und b.

Ist ein Ausdruck, dessen Zähler und Nenner einfache Produkte sind, etwa $x = \frac{aa_1a_2a_3a_4}{b_1b_2b_3b_4}$ zu konstruieren, so zeichne einen beliebigen Winkel mit dem Scheitelpunkt O, schneide auf dem einen Schenkel $a = OA$, auf dem anderen a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, resp. $= OA_1$, OB_1, OA_2, OB_2, OA_3, OB_3, OA_4 OB_4, ab, ziehe $A_1X_1 \parallel B_1A$, $A_2X_2 \parallel B_2X_1$, $A_3X_3 \parallel B_3X_2$, $A_4X_4 \parallel B_4X_3$, so ist $OX_4 = x$.

1. Ein Rechteck in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln. (§. 106, 5).

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Grundlinie bleibt, wenn gegeben

2. die Grundlinie. (§. 104, 1.)

3. die Höhe. (§. 105, 1.)

4. durch P auf der Peripherie von K eine Sekante von gegebener Länge so zu ziehen, daß die von ihrem Endpunkt an K gelegte Tangente $= b$ ist.

5. Gegeben eine Linie AB und ein Punkt C auf derselben. Man soll auf der Verlängerung der Linie den Punkt X so bestimmen, daß $CX^2 = AX \cdot BX$. (§. 139, 17.)

Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

6. a, b, c, d. (§. 60, 9; §. 138, 1; §. 141, 1.) Anal. Verlängere AD und BC bis zum Durchschnittspunkt X, und bezeichne XD und XC resp. mit x und y. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke XDC und XAB folgt dann $x : c = y + b : a$ und $y : c = x + d : a$, woraus die Gleichungen $ax - cy = bc$ und $-cx + ay = cd$; und hieraus wieder $x + y = \frac{c(b+d)}{a-c}$; $x - y = \frac{c(b-d)}{a+c}$. Man kann demnach $x + y$ und $x - y$, folglich auch x und y, und mithin $\triangle$ DXC konstruieren.

7. a, c, e, f. (§. 60, 10; §. 138, 2; §. 141, 2.) Anal. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt von AC und BD mit Y, ferner YD mit

x, YC mit y, so läßt sich mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke YCD und YBA ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie in 6.

8. Trapez b, d, e, f. Anal. Verlängere AD und BC, bis sie sich in F schneiden: bezeichne FD = x und FC = y, so ist $\frac{e^2-y^2-(d+x)^2}{2y\ (d+x)}$ $= \frac{f^2-x^2-(b+y)^2}{2x\ (b+y)}$. Da beide Nenner gleich sind, so ergiebt sich $e^2 - 2dx - d^2 = f^2 - 2by - b^2$. Hierin setze für y den aus der Proportion $x:y = d:b$ sich ergebenden Werth, so ist $x = \frac{d\,(f^2-e^2)}{2\,(b^2-d^2)} - \frac{d}{2}$ und $2x + d = \frac{d\,(f+e)\,(f-e)}{(b+d)\,(b-d)}$.

§. 136.

Aufgaben, in denen Ausdrücke von der Form $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ u. s. w. zu konstruieren sind.

$\sqrt{a^2+b^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b; $\sqrt{a^2-b^2}$ ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete b, dessen Hypotenuse a ist.

Von P nach K eine Sekante so zu ziehen, daß

1. das Rechteck aus der Sehne und Sekante $= q^2$ wird. Anal. Bezeichnet man die Sehne mit x, den äußeren Abschnitt mit y, und die von P an K gelegte Tangente mit a, so ergiebt sich zur Konstruktion die Formel $(x+y)^2 = a^2 + q^2$.

2. das Rechteck aus ihren Abschnitten $= q^2$ wird.

3. Durch P innerhalb K die Sehne XY so zu ziehen, daß $XY \cdot PX = q^2$ wird.

Im Dreieck ABC soll man mit der Seite AB die Parallele XY so ziehen, daß

4. $AX^2 + BY^2 = q^2$. Anal. $BX = \frac{q\ b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. $BY^2 - AX^2 = q^2$.

6. $XY^2 = AX^2 + BY^2$. 1. Anal. $XY = \frac{c\ \sqrt{a^2+b^2}}{c + \sqrt{a^2+b^2}}$.

2. Anal. Ziehe CD ∥ AB bis zum Durchschnitt D mit AY; dann findet man $CD = \sqrt{a^2+b^2}$.

7. R△ · p − q, h. Anal. $c = \sqrt{d^2+4h^2}$. (§. 139, 31.)

§. 137.

Aufgaben, in denen Ausdrücke von der Form $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{abc}{d}}$ u. dergl. zu konstruieren sind.

$\sqrt{ab}$ ist die mittlere Proportionale zu a und b. (§. 114, 2.) Konstruiert man $x = \frac{ab}{d}$ nach §. 135, so ist $\sqrt{\frac{abc}{d}} = \sqrt{cx}$ die mittlere Proportionale zu c und x.

Von P nach K eine Sekante so zu ziehen, daß

1. der innere Abschnitt doppelt so groß als der äußere wird. Anal. Bezeichnet man die Tangente von P an K mit a, den äußeren Abschnitt der Sekante mit x, so findet man $a^2 = x \cdot 3x = 3x^2$; $x = \sqrt{a \cdot {}^1/_3 a}$.
2. der innere Abschnitt n mal so groß als der äußere wird.
3. der innere Abschnitt sich zum äußeren wie m : n verhält.

Durch P innerhalb K eine Sehne so zu ziehen, daß

4. der eine Abschnitt doppelt so groß als der andere wird.
5. der eine Abschnitt n mal so groß als der andere wird.
6. die Abschnitte sich wie m : n verhalten.

§. 138.

Aufgaben, in denen zusammengesetzte algebraische Ausdrücke zu konstruieren sind.

Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

1. a, b, c, d. (§. 60, 9; §. 135, 6; §. 141, 1.) Anal. Es ist $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}$; $\cos\delta = \frac{c^2+d^2-e^2}{2cd}$, und da $\beta+\delta = 2R$, mithin $\cos\beta + \cos\delta = 0$, so ist $\frac{a^2+b^2-e^2}{ab} + \frac{c^2+d^2-e^2}{cd} = 0$; und hieraus $e^2 = \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}$. Setzt man $ab = p^2$, $cd = q^2$, $p^2+q^2 = r^2$, $c^2+d^2 = s^2$, $a^2+b^2 = t^2$, so wird $c = \sqrt{\left(\frac{ps}{r}\right)^2 + \left(\frac{qt}{r}\right)^2}$. Zur Auflösung konstruiert man zunächst p und q nach §. 137; dann r, s, t nach §. 136; $\frac{ps}{r}$, $\frac{qt}{r}$ nach §. 135; e nach §. 136.

2. a, c, e, f. (§. 60, 10; §. 135, 7; §. 141, 2.) Anal. Es ist $\cos(ae) = \frac{a^2+e^2-b^2}{2ae}$; $\cos(cf) = \frac{c^2+f^2-b^2}{2cf}$; folglich $\frac{a^2+e^2-b^2}{ae} = \frac{c^2+f^2-b^2}{cf}$, woraus b zu entwickeln. Das übrige wie in 1.

Ein Dreieck zu konstruieren aus

3. c, h_c, $a+b=s$. (§. 64, 1 und §. 66, 1.) Wenn $a-b=x$, so erhält man $\sqrt{c^2-x^2}=\frac{2ch_c}{\sqrt{s^2-c^2}}$. Konstr. Setzt man $\sqrt{c^2-x^2}=y$, so ist $\sqrt{s^2-c^2}$ nach §. 136, y nach §. 135, $x=\sqrt{c^2-y^2}$ nach §. 136 zu konstruieren.

4. c, h_c, $a-b=d$. (§. 64, 2 und §. 66, 2.) Anal. Wenn $a+b=x$, so erhält man $\sqrt{x^2-c^2}=\frac{2ch_c}{\sqrt{c^2-d^2}}$, woraus sich x ähnlich wie in 3 bestimmen läßt.

5. $a+b$, $p-q$, h_c. (§. 64, 25 und §. 66, 3.) Anal. Mit Berücksichtigung von §. 14 ähnlich wie 3.

6. $a-b$, $p-q$, h_c. (§. 64, 15 und §. 66, 4.) Anal. Mit Berücksichtigung von §. 14 ähnlich wie 4.

7. Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei Seiten eines Dreiecks berührt und die dritte unter der Sehne s schneidet. Anal. Es sei $a>b$. Der Kreis berühre AC in E, BC in D, schneide AB in F und G (G näher an B); die Mitte von FG sei H. Zunächst sind drei Fälle zu unterscheiden. Der gesuchte Kreis kann innerhalb des Winkels γ oder innerhalb eines seiner beiden Nebenwinkel liegen.

a) Der Kreis liegt innerhalb γ. Auch hier sind wieder drei Unterabteilungen zu machen.

α) Der Kreis berührt BC und AC selber (nicht ihre Verlängerungen). Anal. Es ist $AE^2=AF\cdot AG=AH^2-\frac{1}{4}s^2$ (1); ebenso $BD^2=BH^2-\frac{1}{4}s^2$ (2). Subtrahiert man (1) und (2), so ergiebt sich $(BD+AE)(BD-AE)=(BH+AH)(BH-AH)$ oder $(a-b)(BD+AE)=c(BH-AH)$ (3). Indem man nun $BH-AH=x$ setzt, findet man aus (3) $BD+AE=\frac{cx}{a-b}$, und da $BD-AE=a-b$ ist, $BD=\frac{cx+(a-b)^2}{2(a-b)}$ (4). Ferner ist $BH+AH=c$, $BH-AH=x$, folglich $BH=\frac{1}{2}(c+x)$. Setzt man diese Werte für BD und BH in (2) ein, so ergiebt sich $\frac{[cx+(a-b)^2]^2}{(a-b)^2}=(c+x)^2-s^2$ und durch Auflösung $x^2=\frac{(a-b)^2[c^2-(a-b)^2-s^2]}{c^2-(a-b)^2}$ oder $x^2=(a-b)^2-\frac{(a-b)^2s^2}{c^2-(a-b)^2}$ (5).

β) Der gesuchte Kreis berühre die Verlängerungen von AC und BC über A und B hinaus. Anal. Die Rechnung ist dem vorigen

Falle analog. (1) und (2) bleiben. Mit Benutzung der Gleichung $AE - BD = a - b$, und indem man wiederum $BH - AH = x$ setzt, erhält man für x^2 denselben Wert, wie in Gleichung (5).

γ) Der gesuchte Kreis berühre BC und die Verlängerung von AC über A hinaus. Anal. Auch hier bleibt alles wie in α). Nur ist $AE + BD = a - b$. Setzt man wieder $BH - AH = x$, so ergiebt sich wieder die Gleichung (5).

In allen drei Fällen ergiebt sich dieselbe Gleichung (5), aus der für x die beiden Werte $x = \pm \sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2 s^2}{c^2 - (a-b)^2}}$ folgen. Jedem Werte entspricht ein Kreis, also existieren von den drei an sich denkbaren Fällen α, β, γ in Wirklichkeit stets nicht mehr als zwei. Für den einen der beiden Kreise ist $BH - AH = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2 s^2}{c^2 - (a-b)^2}}$. Um diese Formel zu konstruieren, setze man $c^2 - (a-b)^2 = p^2$, $\frac{(a-b)s}{p} = q$, so erhält man successive $BH - AH = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2 s^2}{p^2}} = \sqrt{(a-b)^2 - q^2}$. Um den Kreis zu finden, konstruiere man der Reihe nach p nach §. 136, q nach §. 135, $BH - AH$ nach §. 136. Konstruktion. Schlage um C mit b einen Kreis, welcher BC in I trifft, und um B einen Kreis mit dem Radius BI. Dann errichte über AB einen Halbkreis, der den Kreis um B in K trifft, schneide $AL = s$ von A auf AB ab, errichte in L eine Senkrechte, welche AK in M trifft, ziehe $MN \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit dem Kreise um B, ziehe NO senkrecht auf AB, so ist $OB = x$. Um den Kreis selbst zu finden, errichte im Mittelpunkt H von AO eine Senkrechte, welche die Halbierungslinie des Winkels ACB im Mittelpunkte des gesuchten Kreises trifft. Für den anderen Kreis ist $BH - AH = -\sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2 s^2}{c^2-(a-b)^2}}$ oder $AH - BH = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2 s^2}{c^2-(a-b)^2}}$. Zu seiner Konstruktion ist statt N der andere Durchschnittspunkt von MN mit dem Kreise B in derselben Weise zu benutzen.

b) Der gesuchte Kreis liege innerhalb desjenigen Nebenwinkels von ACB, welcher durch die Verlängerung von AC über C hinaus entsteht. Auch hier sind 2 Unterabteilungen notwendig.

α) Der Kreis berühre BC und die Verlängerung von AC. Anal. Wie in 3, a, α ergeben sich die Gleichungen (1) und (2). Indem man berücksichtigt, daß $AE + BD = a + b$ ist, erhält man, wenn $AH +$

$BH = x$ gesetzt wird, durch ein ähnliches Verfahren, wie in 3, a, α

$$x^2 = (a+b)^2 + \frac{s^2(a+b)^2}{(a+b)^2 - c^2} \quad (6).$$

β) Der gesuchte Kreis berühre die Verlängerung von AC und die Verlängerung von BC über B hinaus. Anal. Alles bleibt, wie im vorigen Fall, nur wird $AE - BD = a + b$. Für $x = AH - BH$ erhält man denselben Wert wie in (6). Da $AH - BH$ stets positiv ist, so hat man von den beiden Werten von x nur den positiven zu nehmen. Von den beiden Fällen in b) kann also nur einer stattfinden, so daß man nur einen Kreis erhält. Zur Konstruktion von x setze man $(a+b)^2 - c^2 = p^2$; $\frac{s(a+b)}{p} = q$; so ist successive $x = \sqrt{(a+b)^2 + \frac{s^2(a+b)^2}{p^2}} = \sqrt{(a+b)^2+q^2}$; man kann daher p nach §. 136, q nach §. 135, y nach §. 136 konstruieren. Konstruktion. Schlage um C mit CB einen Kreis, der die Verlängerung von AC in J trifft; dann um A mit AJ einen Kreis, welcher eine auf AB in B errichtete Senkrechte in K trifft. Dann schlage $s = AL$ von A aus auf AB ab und ziehe durch L die Linie LM parallel AK bis zu ihrem Durchschnitt M mit einer auf AK in K errichteten Senkrechten. Endlich schlage um A mit AM einen Kreis, welcher die Verlängerung von AB in O trifft, und errichte in der Mitte H von BO eine Senkrechte. Der Punkt, in welchem diese die Halbierungslinie des Nebenwinkels von ACB trifft, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Der Kreis, welcher in dem anderen Nebenwinkel von ACB liegt, wird auf dieselbe Weise gefunden. Es giebt somit 4 Kreise, welche AC und BC berühren und AB unter der Sehne s schneiden.

8. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei Seiten eines Dreiecks jede unter der gegebenen Sehne s schneidet und die dritte berührt. (Diese Aufgabe läßt sich ganz analog der vorigen behandeln.)

§. 139.

Aufgaben, in denen die Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu konstruieren sind.

Wir unterscheiden folgende 4 Fälle:

I. Das dritte Glied sei positiv, der Koefficient des zweiten negativ, also die Gleichung von der Form $x^2 - ax + bc = 0$, wo a, b, c positiv sind. Das Produkt beider Wurzeln dieser Gleichung ist bc, also positiv; dieselben haben daher gleiche Zeichen; ihre Summe ist a, daher sind beide positiv. Bezeichnet man sie mit x_1 und x_2, so ist also $x_1 + x_2 = a$,

$x_1 x_2 = bc$; und es sind also zwei Linien zu konstruieren, deren Summe und Produkt man kennt.

II. Das dritte Glied und der Koefficient des zweiten sind beide positiv, die Gleichung ist also von der Form $x^2 + ax + bc = 0$. Das Produkt beider Wurzeln ist bc, also positiv; daher haben sie gleiche Zeichen. Ihre Summe ist $= -a$, also negativ, daher sind beide negativ. Ihre absoluten Werte findet man wie in I.

III. Das dritte Glied und der Koefficient des zweiten sind beide negativ, also die Gleichung von der Form $x^2 - ax - bc = 0$. Das Produkt beider Wurzeln ist $-bc$, also negativ; daher ist die eine von ihnen positiv, die andere negativ. Bezeichnet man die erstere mit x_1, die letztere mit $-x_2$, so ist $x_1 - x_2 = a$, $-x_1 x_2 = -bc$ oder $x_1 - x_2 = a$, $x_1 x_2 = bc$. Man hat also zwei Linien zu konstruieren aus ihrer Differenz a und ihrem Produkt bc. Die größere von beiden ist die positive Wurzel der Gleichung, die kleinere ist der absolute Wert der negativen.

IV. Das dritte Glied negativ, der Koefficient des zweiten positiv, also die Gleichung von der Form $x^2 + ax - bc = 0$. Das Produkt der beiden Wurzeln ist $-bc$, also negativ. Daher ist eine von ihnen positiv, die andere negativ. Bezeichnet man sie resp. mit x_1 und $-x_2$, so ist $x_1 - x_2 = -a$, $-x_1 x_2 = -bc$, oder $x_2 - x_1 = a$, $x_1 x_2 = bc$. Man hat daher zwei Linien zu konstruieren, deren Differenz a, deren Produkt bc ist. Die kleinere von beiden ist die positive Wurzel der Gleichung, die größere der absolute Wert der negativen.

In I. und II. werden wir daher auf folgende Aufgabe geführt:

a) Zwei Linien zu konstruieren, wenn ihre Summe a und ihr Produkt bc bekannt ist. Oder: Ein Rechteck mit den Seiten b und c in ein anderes zu verwandeln, von welchem der Umfang $= 2a$ gegeben.

Wir teilen möglichst viele Auflösungen dieser Aufgabe mit, da in den Aufgaben dieses Paragraphen bald die eine, bald die andere Auflösungsmethode sich mehr empfiehlt.

1. Aufl. Trage in einen beliebigen Kreis K die Sehne $AB = b + c$ und $CD = a$ ein, schneide $c = AE$ von A aus auf AB ab, so daß $EB = b$. Dann konstruiere um K einen anderen Kreis, der CD berührt und ziehe von E an denselben eine Tangente, welche den äußeren Kreis in F und G trifft, so sind FE und EG die verlangten Linien.

2. Aufl. Trage in einen beliebigen Kreis K die Sehnen $AB = b + c$ und $CD = a$ ein, schneide $c = AE$ von A aus auf AB ab, so daß $EB = b$ wird, schlage dann um K mit KE einen Kreis, welcher CD in F trifft, so sind CF und FD die gesuchten Linien. Beweis. Sind EG und FH die halben kleinsten Sehnen in E und F, so ist $AE \cdot EB = EG^2 = FH^2 = CF \cdot FD$.

3. Aufl. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten AB = a und AC = b + c, schneide AD = b von A aus auf AC ab, so daß DC = c wird, schlage um die Mitte E von BC einen Kreis mit dem Radius ED, welcher AB in F trifft, so sind AF und FB die verlangten Linien. Bew. Der Kreis treffe AB noch in G; ferner sei EH ⊥ AB, so ist H die Mitte sowohl von AB, wie von FG, daher AG = BF.

4. Aufl. Konstruiere AB = a, errichte in A und B die Senkrechten AC = b und BD = c, schlage über CD einen Halbkreis, welcher AB in E trifft, so genügen AE und EB der Aufgabe.

5. Aufl. Konstruiere einen beliebigen Winkel, mache die Schenkel desselben AB = a, AC = b, und schneide von A aus AD = c auf AC ab. Dann errichte in den Mitten von AB und CD Senkrechte, die sich in E schneiden, schlage um E einen Kreis mit dem Radius ED, welcher AB in F trifft, so sind AF und FB die verlangten Linien. Beweis ähnlich wie in der 3. Auflösung.

In speciellen Fällen giebt es einfachere Konstruktionen.

6. Aufl. (Für den Fall b = c.) Zeichne AB = a, ziehe in der Entfernung b eine Parallele mit AB, welche einen über AB errichteten Halbkreis in C trifft und fälle auf AB das Lot CD, so genügen AD und DB der Aufgabe.

7. Aufl. (Für den Fall b = c.) Zeichne AB = a, errichte in der Mitte C die Senkrechte CD = b, schlage um D einen Kreisbogen mit $\frac{1}{2}$a, welcher AB in E trifft, so genügen AE und EB der Aufgabe.

8. Aufl. (Für den Fall a > b + c.) Lege b = AB und c = BC an einander, lege durch A und C einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$a. Die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit B trifft den Kreis in D und E, so genügen BD und BE der Aufgabe.

In den Fällen III und IV, wo das dritte Glied der quadratischen Gleichung negativ war, kommen wir auf die Aufgabe:

b) Zwei Linien zu finden, deren Differenz a und deren Produkt bc gegeben ist. Oder: Ein Rechteck mit den Seiten b und c in ein anderes zu verwandeln, in welchem die Differenz der Seiten = a ist.

Zunächst sei b > c.

1. Aufl. Zeichne einen beliebigen Kreis K und in denselben zwei Sehnen AB = a und CD = b − c, verlängere CD um DE = c, konstruiere einen mit dem ersten koncentrischen Kreis, welcher AB berührt und ziehe von E an denselben eine Tangente, welche den äußeren Kreis in F und G trifft, so genügen EF und EG der Aufgabe.

2. Aufl. Zeichne einen beliebigen Kreis K und in denselben zwei Sehnen AB = a und CD = b − c, verlängere CD um DE = c, und schlage um K mit KE einen Kreis, welcher die Verlängerung von AB

in F trifft, so genügen FA und FB der Aufgabe. Bew. Sind EG und FH die von E und F an K gezogenen Tangenten, so ist $EC \cdot ED = EG^2 = FH^2 = FA \cdot FB$.

3. Aufl. Zeichne einen rechten Winkel mit den Schenkeln $AB = a$, $AC = b - c$, verlängere AC über A um $AD = c$, und schlage um die Mitte E von BC einen Kreis mit dem Radius ED, welcher die Verlängerung von AB in F trifft, so sind FB und FA die verlangten Linien. Bew. Der Kreis treffe AB noch in G und CD in H, so ist $AG = BF$ und $CH = AD$.

4. Aufl. Zeichne $AB = a$, errichte auf AB in A und B nach entgegengesetzter Seite die Senkrechten $AC = b$ und $BD = c$, schlage über CD einen Halbkreis, welcher die Verlängerung von AB in E trifft, so sind EA und EB die verlangten Linien.

5. Aufl. Zeichne einen beliebigen Winkel mit den Schenkeln $AB = a$, $AC = b$, verlängere AC über A um $AD = c$, errichte in den Mitten von AB und CD Senkrechte, welche sich in E treffen; und schlage mit EC um E einen Kreis, welcher die Verlängerung von AB in F trifft, so genügen FA und FB der Aufgabe. Bew. ähnlich wie in der 3. Auflösung.

6. Aufl. (Nur für $b - c < a$ anwendbar.) Zeichne $AB = b$ und schneide darauf $AC = c$ ab, lege dann durch B und C einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}a$; die Verbindungslinie des Mittelpunktes dieses Kreises mit A trifft den Kreis in E und F, so genügen AE und AF der Aufgabe.

Es sei $b = c$.

7. Aufl. Zeichne $AB = b$, errichte in B die Senkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, schlage um C mit BC einen Kreis, der AC und deren Verlängerung in E und F trifft, so genügen AE und AF der Aufgabe.

8. Aufl. Zeichne $AB = a$, errichte in B die Senkrechte $BC = b$, schlage um die Mitte D von AB mit DC einen Kreis, der die Verlängerung von AB in E trifft, so genügen AE und EB der Aufgabe.

1. Eine Linie a stetig zu teilen. (§. 115, 2.) 1. Anal. Bezeichnet man den größeren Abschnitt mit x, so ist $x^2 = a(a - x)$, also $x^2 + ax - a^2 = 0$. Zur Konstruktion ist zu benutzen Fall IV, ferner b, Aufl. 7 oder 8, daher 2 Konstruktionen. 2. Anal. Bezeichnet man den kleineren Abschnitt mit x, so ist $(a - x)^2 = ax$, oder $x^2 - 3ax + a^2 = 0$. Zur Konstruktion benutze man Fall I, ferner a, Aufl. 6 oder 7; daher wieder 2 Konstruktionen.

Ein stetig geteilte Linie zu konstruieren, von welcher

2. der größere Abschnitt = a ist. (§. 115, 3.) 1. Anal. Bezeichnet man den kleineren Abschnitt mit x, so ist $x(x + a) = a^2$, also $x^2 + ax - a^2 = 0$; daher Konstruktion nach Fall IV., b, Aufl. 7 oder 8. 2. Anal.

Bezeichnet man die ganze Linie mit x, so ist $x(x-a)=a^2$, also $x^2-ax-a^2=0$, daher x zu konstruieren nach Fall III., b, Aufl. 7 oder 8.

3. der kleinere Abschnitt = a ist. (§. 115, 4.) 1. Anal. Bezeichnet man mit x den größeren Abschnitt, so ist $x^2=a(x+a)$ oder $x^2-ax-a^2=0$; daher x zu konstruieren nach Fall III., b, Aufl. 7 oder 8. 2. Anal. Bezeichnet man mit x die ganze Linie, so ist $ax=(x-a)^2$ oder $x^2-3ax+a^2=0$. Daher kann zur Konstruktion Fall I und a, Aufl. 6 oder 7 benutzt werden.

4. Gegeben a und b; man soll a so teilen, daß ein Teil die mittlere Proportionale zwischen dem anderen und b wird. 1. Anal. Bezeichnet man den Abschnitt, welcher mittlere Proportionale werden soll, mit x, so ist $x^2=b(a-x)$, also $x^2+bx-ab=0$; daher Fall IV., b, Aufl. 1–6. 2. Anal. Bezeichnet man mit x den Abschnitt von a, welcher nicht mittlere Proportionale werden soll, so ist $(a-x)^2=bx$, also $x^2-(2a+b)x+a^2=0$. Fall I, a, Aufl. 6 oder 7.

Im Dreieck ABC soll mit AB eine Parallele XY (X liegt auf AC, Y auf BC) so gezogen werden, daß

5. $XY:AX=AX:AB$. Anal. Setzt man $AX=x$, so ist $x^2+\frac{c^2}{b}x-c^2=0$; oder wenn man $p=\frac{c^2}{b}$ setzt, $x^2+px-c^2=0$. p wird nach §. 135 konstruiert und dann x mit Anwendung von IV., b. — Unter vielen anderen Konstruktionen können hier folgende gemacht werden: 1. Konstr. Errichte auf AB die Senkrechte $BD=b$, und auf AD in A eine Senkrechte, welche die Verlängerung von BD über B hinaus in E trifft, konstruiere über BE als Durchmesser einen Kreis, der die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit A in F trifft und schneide $AX=AF$ auf AC ab. 2. Konstr. Trage an AB in B $\angle\gamma$ an, dessen freier Schenkel AC oder deren Verlängerung über C hinaus in D trifft. Dann errichte auf AB in A und in der Mitte von AD Senkrechte, schlage um ihren Durchschnittspunkt E mit EB einen Kreis, welcher die Verlängerung von AC über A hinaus in F trifft, und schneide $AX=AF$ auf AC ab.

6. $XY:AX=BY:AB$. Anal. Setzt man $AX=x$, so ergiebt sich $x^2+\frac{c^2}{a}x-\frac{bc^2}{a}=0$; wird $\frac{c^2}{a}=p$ gesetzt, so ist $x^2+px-bp=0$, daher p zu konstruieren nach §. 135, und x nach IV., b.

7. $XY:AB=AX:CX$. Anal. AC ist in X stetig geteilt.

Anmerk. Ähnliche Aufgaben siehe §. 76, 12 bis 25.

Mit der Seite AB des Dreiecks ABC soll man die Parallele XY, welche die Verlängerungen von AC und BC über A und B hinaus schneidet, so ziehen, daß

8. $XY:AX = AX:AB$. Anal. Setzt man $AX = x$, so ist x aus $x^2 - \frac{c^2}{b}x - c^2 = 0$ zu konstruieren. Ähnlich wie 5.

9. $XY:AX = BY:AB$. Anal. Setzt man $AX = x$, so ist x zu konstruieren aus $x^2 - \frac{c^2}{a}x - \frac{bc^2}{a} = 0$. Ähnlich wie 6.

Mit der Seite AB des Dreiecks ABC soll man die Parallele XY, welche die Verlängerung von AC und BC über C hinaus resp. in X und Y schneidet, so ziehen, daß

10. $XY:AX = AX:AB$. Anal. Setzt man $AX = x$, so ist x zu konstruieren aus $x^2 - \frac{c^2}{b}x + c^2 = 0$. Fall I., a Aufl. 6 oder 7.

11. $XY:AX = BY:AB$. Anal. Setzt man $AX = x$, so ist x aus der Gleichung $x^2 - \frac{c^2}{a}x - \frac{bc^2}{a} = 0$ zu konstruieren nach I, a, 1 bis 5.

12. $XY:AB = AX:CX$. 1. Anal. Setzt man $AX = x$, so ist x zu konstruieren aus $x^2 - 3bx + b^2 = 0$ nach I, a, Aufl. 6 oder 7. 2. Anal. Setzt man $CX = y$, so ist y zu konstruieren aus $y^2 - by - b^2 = 0$ nach III, b, Aufl. 7 oder 8.

13. Auf dem Kreisdurchmesser AB ist eine Senkrechte CD (C auf AB) errichtet; man soll von A aus eine Sehne, welche den Kreis in X und CD in Y trifft, so ziehen, daß $XY = a$. 1. Fall. Die Sehne treffe die Verlängerung von CD über D hinaus (X zwischen A und Y). Anal. Setzt man $AX = x$, so findet man die Gleichung $x^2 + ax - AC \cdot AB = 0$ oder $x^2 + ax - AD^2 = 0$; daher x zu konstruieren nach IV., b, Aufl. 7 oder 8. 2. Fall. Die Sehne trifft CD selbst (Y zwischen X und A). Anal. $x^2 - ax - AD^2 = 0$; daher III., b, Aufl. 7 oder 8.

14. Durch P innerhalb K eine Sehne so zu ziehen, daß sie in P stetig geteilt wird. Anal. Ist XY die Sehne und zieht man $XA \parallel KY$ bis zum Durchschnitt mit KP, so ist AK in P stetig geteilt.

15. Im Kreise K sind die Sehnen AB und CD, und auf der ersteren P gegeben; man soll durch P eine dritte Sehne, welche AB und CD schneidet, so ziehen, daß die äußeren Abschnitte der dritten Sehne gleich groß sind. Anal. Schneidet die gesuchte Sehne CD in X, so ist $CX \cdot XD = AP \cdot PB$; daher a, Aufl. 2.

16. Auf der Peripherie eines Halbkreises mit dem Durchmesser AB ist P gegeben; man soll PX nach dem Durchmesser so ziehen, daß, wenn man die Senkrechte XY auf dem Durchmesser errichtet, $PX^2 - XY^2 = d^2$ wird. Anal. $PC \perp AB$. Bezeichnet man PC mit c, CA mit a, CB mit b, CX mit x, XY mit y, so ist $PX^2 = x^2 + c^2$ und $XY^2 =$

$AX \cdot BX = (a-x)(b+x)$, folglich $x^2 + c^2 - (a-x)(b+x) = d^2$, oder da $c^2 = ab$, $x^2 - \frac{1}{2}(a-b)\,x - \frac{1}{2}d^2 = 0$; daher ist x nach III., b zu konstruieren.

17. Auf AB ist C gegeben; man soll X zwischen A und B so bestimmen, daß $AX : CX = CX : BX$ (§. 135, 5). Anal. Bezeichnet man AC mit a, BC mit b, CX mit x, so ist $x^2 - \frac{1}{2}(a-b)\,x - \frac{1}{2}ab = 0$; also III., b, Aufl. 6.

In den folgenden Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck ist außer der durch die Aufgabe gegebenen Gleichung noch eine der Gleichungen $a^2 = cp = (p+q)\,p$, $b^2 = cq = (p+q)\,q$, $h^2 = pq$ zu benutzen. Da in allen Aufgaben zwei Unbekannte vorhanden sind, erhält man, je nachdem man die eine oder die andere zunächst berechnet und konstruiert, stets zwei verschiedene Konstruktionen. Der Koefficient des zweiten Gliedes und das dritte Glied der resultierenden quadratischen Gleichung sind zuweilen nach §. 135 bis 136 zu konstruieren.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus

18. b, p
19. b = p, c
20. c + b, q
21. c − b, q
22. a + p, c
23. a − p, c
24. p + h, c
25. p − h, c
26. p + h, q
27. p − h, q
28. a + q, p
29. a − q, p
30. p − q, a (berechne c)
31. p − q, h (§. 136, 7).

32. c, w_a. Anal. Die Halbierungslinie von $\angle CAB$ treffe CB in D, den umgeschriebenen Kreis (Mittelpunkt M) in E, ferner treffe EM den Kreis in G und BC in F. Es werde AE mit x, DE mit y bezeichnet. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und AEB folgt $w_a x = bc$. Da ADFG ein Sehnenviereck, ist $EA \cdot ED = EG \cdot EF$, also $xy = \frac{1}{2}c\,(c-b)$. Endlich ist $x - y = w_a$, also drei Gleichungen zur Bestimmung von b, x, y. Es wird $x^2 - \frac{1}{2}w_a x - \frac{1}{2}c^2 = 0$.

33. $c + a = s$, $c + b = s'$. (§. 62, 1.) Anal. $c^2 - 2(s+s')\,c + s^2 + s'^2 = 0$, I., a, Aufl. 6 oder 7.

34. c − a, c − b. (§. 62, 2.)

35. c + a, c − b. (§. 62, 3.)

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus

36. h_c, a + c, Anal. Berechne a.

37. h_c, c − a (c > a).

38. h_c, a − c (c < a).

39. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus a und $bc = q^2$. Anal. Aus $b : c = h : a$, $bc = q^2$, $c^2 - b^2 = a^2$ findet man $h^2 + \frac{a^3}{q^2}\,h - a^2 = 0$. Zur Auflösung konstruiere den Koefficient von h nach §. 135, und dann h nach IV., b, Aufl. 7 oder 8.

Gegeben ist ein Rechteck. Man soll innerhalb desselben parallel mit seinen Seiten und in gleicher Entfernung von denselben 4 Linien so ziehen, daß das von denselben gebildete Rechteck

40. die Hälfte des gegebenen ist. Anal. Sind x und y die Seiten des inneren Rechtecks, a und b die des äußeren, so ist $x-y=a-b$, $xy=\frac{1}{2}ab$. Daher eine Aufl. unter b.

41. sich zum gegebenen $= m:n$ verhält. Ähnlich wie 40 ist $x-y=a-b$ und $xy=\frac{mab}{n}$. Konstruiert man nach §. 135 $p=\frac{mb}{n}$, so ist $xy=ap$, und x und y zu finden nach b, Aufl. 6.

Gegeben ist ein Rechteck. Man soll außerhalb desselben parallel mit seinen Seiten und in gleicher Entfernung von denselben 4 Linien so ziehen, daß das von denselben gebildete Rechteck

42. doppelt so groß als das gegebene ist. Anal. wie 40.

43. sich zu dem gegebenen verhält $= m:n$. Anal. wie 41.

44. Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine Gerade so zu teilen, daß sowohl der Inhalt als auch der Umfang beider Teile einander gleich ist. Anal. Trifft die gesuchte Linie AC in X und BC in Y, so ist $CX+CY=\frac{1}{2}(a+b+c)$ und $CX\cdot CY=\frac{1}{2}ab$.

45. In ein Dreieck ABC ein Rechteck DEFG so zu zeichnen, daß eine Seite DE auf AB zu liegen kommt, die beiden anderen Ecken aber G auf AC und F auf BC fallen, und sein Inhalt $=q^2$ ist. (§. 118, 13.) Anal. Es sei $EF=x$, $DE=y$, so ist $c:y=b:CG$ und $h_c:x=b:AG$, also $CG=\frac{by}{c}$ und $AG=\frac{bx}{h_c}$; mithin $b=\frac{by}{c}+\frac{bx}{h_c}$ oder $ch_c=yh_c+cx$. Da ferner $cy=q^2$, so findet man, wenn y eliminiert wird: $x^2-h_cx+\frac{h_cq^2}{c}=0$. Setzt man $\frac{q^2}{c}=z$, so hat man zunächst z, dann x zu konstruieren aus $x^2-h_cx+h_cz=0$.

46. In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel und Inhalt zu zeichnen. Anal. wie 45.

47. Durch einen Punkt auf der Halbierungslinie eines rechten Winkels eine gerade Linie so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Stück $=c$. Anal. Der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels sei C, der auf seiner Halbierungslinie liegende Punkt D; die durch D zu ziehende Linie treffe die Schenkel in X und Y. Durch D seien Parallelen mit den Schenkeln gezogen, welche CX in F, CY in E treffen. Die gleichen Linien DE und DF werden mit a bezeichnet. Nun ist $FX^2=DX^2-a^2$, $EY^2=DY^2-a^2$ (1). Ferner $FX:FD=DE:EY$ oder $FX\cdot EY=a^2$ oder $FX^2\cdot EY^2=a^4$. Setzt man aus (1) die Werte für FX^2 und EY^2 ein, so ist $(DX^2-a^2)(DY^2-a^2)=a^4$, oder $DX^2\cdot DY^2=a^2(DX^2+DY^2)$. Setzt man nun $\sqrt{DX^2+DY^2}=x$ (2), so ist $DX\cdot DY=ax$ (3). Ferner erhält

man, wenn man $DX + DY = c$ quadriert und (2) und (3) benutzt: $x^2 + 2ax - c^2 = 0$. Hieraus kann man x konstruieren nach IV., b, Aufl. 8. Verlängert man dann DE um $DH = x$, so ist nach (3) $DX \cdot DY = HD \cdot DE$; daher liegen X, E, Y, H auf einem Kreise, mithin ist $\angle HXD = DEY = R$. Konstr. Verlängere FD um $DG = c$, schlage mit EG einen Kreis um E, der die Verlängerung von DE über D hinaus in H trifft, beschreibe über HD einen Halbkreis, welcher die Verlängerung von CF in X und X' trifft. Verlängert man nun XD und X'D bis zu ihren Durchschnittspunkten Y und Y' mit dem anderen Schenkel des gegebenen Winkels, so genügen XY und X'Y' der Aufgabe.

48. Durch einen gegebenen Punkt auf der Halbierungslinie eines rechten Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Nebenwinkels liegende Stück derselben $= c$ ist. Anal. und Konstr. läßt sich ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe durchführen. Bei der Konstr. kommt III., b, Aufl. 8 in Anwendung.

49. Durch einen Punkt D auf der Halbierungslinie eines beliebigen Winkels γ eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln liegende Stück derselben $= c$. (§. 53, 4 u. II, 127). Anal. Die gesuchte Gerade schneide die Schenkel des Winkels in X und Y. Die durch D mit den Schenkeln des Winkels parallel gezogenen Linien treffen CX in F, CY in E. Bezeichnet man noch $DF = DE$ mit a, so ist $DX^2 = FX^2 + a^2 - 2a\,FX\cos\gamma$; setzt man hierin $FX = \frac{aDX}{DY}$, so erhält man $DX^2 \cdot DY^2 = a^2 \cdot DX^2 + a^2 \cdot DY^2 - 2a^2 \cdot DX \cdot DY \cos\gamma$ oder $DX^2 \cdot DY^2 = a^2 (DX^2 + DY^2 - 2\,DX \cdot DY \cos\gamma)$ (1). Setzt man nun $\sqrt{DX^2 + DY^2 - 2\,DX \cdot DY \cos\gamma} = x$ (2), so ist $DX \cdot DY = ax$ (3). Aus (2) und (3) ergiebt sich $DX^2 + DY^2 = x^2 + 2ax\cos\gamma$ (4). Addiert man hierzu die mit 2 multiplizierte Gleichung (3) und berücksichtigt, daß $DX + DY = c$, so erhält man $x^2 + 2a(1 + \cos\gamma)x - c^2 = 0$. Aus dieser Gleichung ist x nach IV, b, Aufl. 8 zu konstruieren. Verlängert man dann DE um $DH = x$, so ist nach (3) $DE \cdot DH = DX \cdot DY$. Daher liegen E, H, X, Y auf einem Kreise und es ist $\angle HXD = DEY = \gamma$. Konstr. Fälle von C auf DE oder deren Verlängerung das Lot CB, errichte auf BD die Senkrechte $DG = c$, schlage um B einen Kreis mit BG, welcher die Verlängerung von DE über D hinaus in H trifft; dann konstruiert man über DH als Sehne einen Kreis, welcher den Peripheriewinkel γ faßt; derselbe trifft die Verlängerung von CF in X und X'. Beide Punkte liefern mit D verbunden und gehörig verlängert eine gesuchte Linie.

50. Durch einen gegebenen Punkt D auf der Halbierungslinie eines Winkels eine gerade Linie so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Nebenwinkels liegende Stück derselben $= c$ ist (II, 128). Anal. und Konstr. ähnlich wie 49.

Um einen Punkt K der Halbierungslinie eines rechten Winkels ist ein Kreis mit dem Radius ρ beschrieben; man soll an denselben eine Tangente so ziehen, daß das zwischen den Schenkeln liegende Stück derselben $= c$, und Kreis K und der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels

51. auf derselben Seite der gesuchten Geraden liegen. Anal. Die gesuchte Gerade treffe die Schenkel des Winkels in X und Y; der Berührungspunkt von XY mit K sei D; die von D auf die Schenkel gefällten Senkrechten treffen CX in F und CY in E; die von K auf die Schenkel gefällten einander gleichen Senkrechten werden mit a bezeichnet; ihre Verlängerungen treffen FD in G und DE in H. Dann ist $FX \cdot EY = FD \cdot DE$ (1). Ferner $FX^2 = DX^2 - FD^2$, $EY^2 = DY^2 - DE^2$, folglich $FX^2 \cdot EY^2 = DX^2 \cdot DY^2 - FD^2 \cdot DY^2 - DE^2 \cdot DX^2 + FD^2 \cdot DE^2$, woraus mit Hülfe von (1) $DX^2 \cdot DY^2 = FD^2 \cdot DY^2 + DE^2 \cdot DX^2$ (2). Da $\triangle XFD \sim DEY \sim KHD$, so ist $FD : DX = GK : KD$ und $DE : DY = GD : KD$, oder da $GK = DE - a$, $GD = FD - a$, so ist $FD : DX = DE - a : \rho$ und $DE : DY = FD - a : \rho$; aus beiden Proportionen ergiebt sich $FD = \frac{a \cdot DX\ (DY + \rho)}{DX \cdot DY - \rho^2}$, $DE = \frac{a \cdot DY\ (DX + \rho)}{DX \cdot DY - \rho^2}$ und wenn man diese Werte für DF und DE in (2) einsetzt, den Faktor $DX^2 \cdot DY^2$ forthebt und den Nenner fortschafft, so ergiebt sich $(DX \cdot DY - \rho^2)^2 = a^2\,[(DX + \rho)^2 + (DY + \rho)^2]$. Setzt man jetzt $\sqrt{(DX + \rho)^2 + (DY + \rho)^2} = x$ (3), so ist $(DX \cdot DY - \rho^2)^2 = a^2 x^2$, also durch Wurzelausziehen, (da $DX \cdot DY > \rho^2$), $DX \cdot DY - \rho^2 = ax$ (4). Aus (3) erhält man $DX^2 + DY^2 + 2\rho\ (DX + DY) + 2\rho^2 = x^2$ oder da $DX + DY = c$, $DX^2 + DY^2 = x^2 - 2\rho c - 2\rho^2$. Addiert man hierzu die mit 2 multiplizierte Gleichung (4), so ergiebt sich $c^2 = x^2 + 2ax - 2\rho c$ oder $x^2 + 2ax - c\,(c + 2\rho) = 0$ (5). Aus (5) kann man x konstruieren nach IV., b, Aufl. 6. Dann kennt man von $DX + \rho$ und $DY + \rho$ die Summe $c + 2\rho$ und nach (3) die Summe ihrer Quadrate x^2; folglich sind $DX + \rho$ und $DY + \rho$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse x, dessen Kathetensumme $c + 2\rho$ ist. Konstr. Zeichne $IM = c$, verlängere es um $MN = 2\rho$, schlage um M und N Kreise mit a, welche sich in O treffen, schlage um O mit a einen Kreis, welcher OI in P trifft, lege an IN in N einen halben rechten Winkel an, dessen freier Schenkel einen um I mit IP beschriebenen Kreis in Q und S trifft, fälle auf IM die Senkrechten QT und SU, schneide $TV = \rho$, $UW = \rho$ auf TQ und US ab, verbinde V und W mit der Mitte Z von MN, so liefern WZ und VZ beide einen Wert sowohl für KX, als auch für KY.

52. auf verschiedenen Seiten der gesuchten Geraden liegen. Anal.

und Konstr. ähnlich wie 51. In betreff eines Vorzeichens muß man am Schluß genauere Unterscheidungen anstellen. Die Gleichung für x fällt verschieden aus, je nachdem $c > 2\rho$ oder $c < 2\rho$ ist.

Um einen Punkt der Halbierungslinie eines beliebigen Winkels γ ist ein Kreis mit dem Radius ρ beschrieben; man soll an denselben eine Tangente so ziehen, daß das zwischen den Schenkeln liegende Stück derselben $= c$, und der Kreis und der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels

53. auf derselben Seite der gesuchten Geraden liegen. Ähnlich wie 51.

54. auf verschiedenen Seiten der gesuchten Geraden liegen. Ähnlich wie 52.

55. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben L, M, m (siehe Fig. 4). Anal. Zunächst läßt sich ρ leicht konstruieren. Bezeichnen wir ferner Mm mit e, so ist $r^2 - 2r\rho - e^2 = 0$, so daß also r konstruiert werden kann.

56. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben C, X, m (siehe §. 46, a und Fig. 4.) Anal. Es ist $\angle CX = 2r\cos\gamma$; ferner $Cm = \frac{a \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$ $= 4r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta$, mithin wenn r eliminiert wird: $\sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{CX}{2Cm}$ $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{Cm - CX \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2Cm}$. Da $Cm \cdot \sin \frac{1}{2}\gamma = \rho$, findet man auch $\rho^2 - \frac{1}{2}CX\rho - \frac{1}{2}Cm\,[Cm - CX \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)] = 0$.

57. $R \triangle a + b$, h. Anal. $c^2 + 2hc - (a + b)^2 = 0$.

58. $R \triangle a - b$, h. Anal. $c^2 - 2hc - (a - b)^2 = 0$.

§. 140.

Aufgaben, in denen Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, welche nur gerade Potenzen enthält, zu konstruieren sind.

Die Gleichung muß von der Form $x^4 + abx^2 + cdef = 0$ sein.

1) Dividiert man die Gleichung durch g^2, wo g eine Linie von beliebiger Größe ist, so erhält man $\left(\frac{x^2}{g}\right)^2 + \frac{ab}{g} \cdot \frac{x^2}{g} + \frac{cdef}{g^2} = 0$, oder indem man $\frac{x^2}{g} = y$ setzt, $y^2 + \frac{ab}{g}\,y + \frac{cdef}{g^2} = 0$. Nun kann man $\frac{ab}{g}$ und $\frac{cdef}{g^2}$ nach §. 135 und dann y nach §. 139 konstruieren. Für x findet man aus der Gleichung $\frac{x^2}{g} = y$ den Wert $x = \sqrt{gy}$, so daß sich x nach §. 137 konstruieren läßt.

b) Konstruktion der speciellen Gleichung $x^4 - a^2x^2 + b^2c^2 = 0$. Man kann dieselbe als eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten x^2 ansehen. Sind x_1^2 und x_2^2 die beiden Wurzeln, so ist $x_1^2 x_2^2 = b^2c^2$ oder $x_1x_2 = bc$, und $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. Ein Blick auf diese beiden Gleichungen zeigt, daß die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt ist: „Ein Rechteck mit den Seiten b und c in ein anderes zu verwandeln, dessen Diagonale a ist." Die Seiten desselben werden x_1 und x_2 sein.

c) Andere Konstruktion der Wurzeln der Gleichung $x^4 - a^2x^2 + b^2c^2 = 0$. Man findet wie in b) die Gleichungen $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, $x_1x_2 = bc$; folglich ist $x_1 + x_2 = \sqrt{a^2 + 2bc}$ und $x_1 - x_2 = \sqrt{a^2 - 2bc}$. Aus je zweien der drei Gleichungen $x_1 + x_2 = \sqrt{a^2 + 2bc}$, $x_1 - x_2 = \sqrt{a^2 - 2bc}$, $x_1x_2 = bc$ kann man x_1 und x_2 konstruieren.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben a und $bc = q^2$. Anal. Man findet für b die Gleichung $b^4 + a^2b^2 - q^4 = 0$, die nach (a) zu konstruieren ist. An Stelle von g kann man a oder q wählen. Ebenso erhält man für c die Gleichung $c^4 - a^2c^2 - q^4 = 0$, welche sich ebenso behandeln läßt.

2. In einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen. Anal. Der Radius des Kreises sei r. Bezeichnet man den Radius des dem Fünfeck eingeschriebenen Kreises mit x, so ist $x = r \cos {}^1/_5\pi$. Um eine Bestimmungsgleichung für dasselbe zu erhalten, gehen wir von der Gleichung $\sin 5\alpha = 5 \cos\alpha^4 \sin\alpha - 10 \cos\alpha^2 \sin\alpha^3 + \sin\alpha^5$ aus. Setzt man $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$, so erhält man $\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 16\cos\alpha^4 - 12\cos\alpha^2 + 1$. Setzt man nun $\alpha = {}^1/_5\pi$, so wird die linke Seite $= 0$, man erhält demnach $16 \cos {}^1/_5\pi^4 - 12 \cos {}^1/_5\pi^2 + 1 = 0$, oder indem man mit r^4 multipliziert: $x^4 - 3\,({}^1/_2 r)^2x^2 + ({}^1/_2 r)^4 = 0$. Mit Anwendung von c) findet man $x_1x_2 = ({}^1/_2 r)^2$ und $x_1 - x_2 = {}^1/_2 r$. Daher sind x_1 und x_2 nach §. 139, b Aufl. 7 oder 8 leicht zu konstruieren. Noch ist zu untersuchen, welchen dieser beiden Werte man für x zu wählen hat. Da $x_1x_2 = ({}^1/_2 r)^2$, so ist $x_2 < {}^1/_2 r$; wollte man daher x_2 für den Radius des eingeschriebenen Kreises nehmen, so wäre die Seite des Fünfecks $2\sqrt{r^2 - x^2}$, also größer als $r\sqrt{3}$, mithin größer als die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrats, welche gleich $r\sqrt{2}$ ist. Daher ist der größere Wert x_1 zu wählen.

Anmerkung. Zuweilen gelangt man auch zu einer Gleichung 4ten Grades, welche in eine reciproke verwandelt werden kann, also die Form hat: $x^4 + ax^3 + bcx^2 + ad^2x + d^4 = 0$. Man erhält durch successive Umgestaltung derselben $x^4 + d^4 + a\,(x^2 + d^2)\,x + bcx^2 = 0$ oder $(x^2 + d^2)^2 + a\,(x^2 + d^2)\,x + (bc - 2d^2)\,x^2 = 0$ oder $\left(x + \frac{d^2}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{d^2}{x}\right)$

$+ bc - 2d^2 = 0$. Setzt man nun $x + \frac{d^2}{x} = y$, so erhält man $y^2 + ay + (bc - 2d^2) = 0$ und kann daraus zunächst y konstruieren. Dann findet man x aus der Gleichung $x + \frac{d^2}{x} = y$, welche die Form $x^2 - yx + d^2 = 0$ annimmt.

§. 141.

Aufgaben, in denen Winkel aus einfachen trigonometrischen Funktionen zu konstruieren sind.

a) $\sin\varphi = \frac{b}{a}$. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem a Hypotenuse, b eine Kathete ist. φ ist der b gegenüberliegende Winkel.

b) $\cos\varphi = \frac{b}{a}$. Ebenso, nur ist φ der b anliegende Winkel.

c) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind. φ ist der b gegenüberliegende Winkel.

d) $\cot\varphi = \frac{b}{a}$. Wie c) nur ist φ der b anliegende Winkel.

Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

1. a, b, c, d (§. 60, 9; §. 135, 6; §. 138, 1). Anal. Es ist $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$ und $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$; mithin $\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2ad + 2bc}$. Hieraus folgt, indem man $1 + \cos\alpha$ und $1 - \cos\alpha$ bildet und dividiert, $\cot{}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - (a-d)^2}}$. Setzt man $\sqrt{(a+d)^2 - (b-c)^2} = p$, $\sqrt{(b+c)^2 - (a-d)^2} = q$, so findet man, nachdem man $a + d$, $a - d$, $b + c$, $b - c$ gezeichnet hat, p und q nach §. 136 und schließlich $^1/_2\alpha$ aus der Gleichung $\cot{}^1/_2\alpha = \frac{p}{q}$.

2. a, c, e, f. (§. 60, 10; §. 135, 7; §. 138, 2). Anal. ähnlich wie 1.

In den Aufgaben 3 bis 15 kommt es darauf an, $\angle\varphi$ zu finden, den XY mit AB bildet.

Im $\triangle ABC$ die Linie XY (X auf AC, Y auf BC) so zu ziehen, daß

3. $AX = XY = BY$. (§. 76, 37.) Anal. $\sin\varphi = \sin\alpha - \sin\beta$. Konstr. Entweder wie 6 oder auf folgende Weise: Es ist $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$; $\sin\beta = \frac{b}{2r}$; mithin $\sin\varphi = \frac{a - b}{2r}$. Daher konstruiere um ABC einen

Kreis; schlage um A einen Kreisbogen mit dem Radius $a - b$, welcher den Bogen AC in D trifft, so ist $\angle ABD = \varphi$.

4. $AX + BY = XY$ und $AX : BY = m : n$ (§. 76, 39). 1. Anal. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt von AB und der Verlängerung von XY mit Z, so ist $XY + YZ = \frac{AX \sin\alpha}{\sin\varphi}$ und $YZ = \frac{BY \sin\beta}{\sin\varphi}$, woraus durch Subtraktion $XY = \frac{AX \sin\alpha - BY \sin\beta}{\sin\varphi}$, also $\sin\varphi = \frac{AX}{XY} \sin\alpha - \frac{BY}{XY} \sin\beta = \frac{m \sin\alpha - n \sin\beta}{m+n}$. Konstr. Schneide $m = CD$ und $n = CE$ resp. auf CA und CB ab, schlage um E einen Kreis mit $m + n$, der eine durch D mit AB gezogene Parallele in F trifft, so giebt EF die Richtung von XY an. 2. Konstr. Ähnlich wie in 3 erhält man $\sin\varphi = \frac{1}{2r}\left(\frac{ma}{m+n} - \frac{nb}{m+n}\right)$. Beachtet man, daß wenn CA in D wie $n : m$ geteilt wird, $CD = \frac{nb}{m+n}$ ist, so läßt sich die Konstruktion ähnlich wie in 3 ausführen.

5. $AX - BY = XY$ und $AX : BY = m : n$. Anal. und Konstr. ähnlich wie 4.

6. $AX : BY : XY = m : n : p$. (§. 76, 41.) Anal. Man findet auf ähnliche Weise, wie in 4, $\sin\varphi = \frac{m \sin\alpha - n \sin\beta}{p}$. Wie in 4 zwei Konstruktionen, die zweite mit Hülfe von §. 135.

Im $\triangle ABC$ eine Linie, welche die Verlängerungen von AC und BC über A und B hinaus resp. in X und Y trifft, so zu ziehen, daß

7. $AX = BY = XY$. (§. 76, 38.) Wie 3.

8. $AX + BY = XY$ und $AX : BY = m : n$. (§. 76, 40.) Wie 4.

9. $AX - BY = XY$ und $AX : BY = m : n$. Wie 5.

10. $AX : BY : XY = m : n : p$. (§. 76, 42.) Wie 6.

Im $\triangle ABC$ eine Linie, welche die Verlängerungen von AC und BC über C hinaus resp. in X und Y trifft, so zu ziehen, daß

11. $AX = BY = XY$. Wie 3.

12. $AX + BY = XY$ und $AX : BY = m : n$. Wie 4.

13. $BY - AX = XY$ und $AX : BY = m : n$. Wie 5.

14. $AX : BY : XY = m : n : p$. (§. 76, 43.) Wie 6.

15. Im $\triangle ABC$ eine Linie, welche BC in Y und die Verlängerung von AC über A hinaus in X schneidet, so zu ziehen, daß $AX : BY : XY = m : n : p$. Anal. Man findet für den Winkel φ, den XY mit AB bildet, $\sin\varphi = \frac{m \sin\alpha + n \sin\beta}{p}$.

16. Durch P eine Gerade so zu ziehen, daß von den 3 Abschnitten, in welche sie von 4 gegebenen sich in einem Punkt schneidenden Geraden geteilt wird, die beiden äußeren einander gleich werden. Anal. Der Durchschnittspunkt der 4 gegebenen Geraden sei O; ihre Durchschnittspunkte mit der gesuchten Geraden X, U, V, Y, die Winkel XOU, UOV, VOY resp. α, β, γ. Dann ist der Inhalt des Dreiecks XOU $= \frac{1}{2}OX \cdot OU \sin\alpha$ und der des $\triangle$ VOY $= \frac{1}{2}OY \cdot OV \sin\gamma$; und da beide einander gleich sind, so ist $OX \cdot OU \sin\alpha = OY \cdot OV \cdot \sin\gamma$. Behandelt man ebenso die beiden gleichen Dreiecke XOV und YOU, so erhält man $OX \cdot OV \sin(\alpha+\beta) = OY \cdot OU \sin(\beta+\gamma)$. Durch Multiplikation beider Gleichungen ergiebt sich $\frac{OX^2}{OY^2} = \frac{\sin\gamma \sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}$. Oder, indem a eine Linie von beliebiger Länge bezeichnet, $OX : OY = \sqrt{a \sin\gamma \cdot a \sin(\beta+\gamma)} : \sqrt{a \sin\alpha \cdot a \sin(\alpha+\beta)}$. Konstr. Beschreibe mit a um O einen Kreis. $a \sin\gamma$ u. s. w. werden leicht als Senkrechte konstruiert, dann OX : OY nach §. 137, wodurch die Richtung von OY bekannt ist.

17. Ein Dreieck zu konstruieren aus c, t_c, $\alpha-\beta=\delta$ (siehe §. 63, 22). Anal. Ist CD $= t_c$ und bezeichnet man $\angle$ ADC mit φ, so ist AC : DC $=$ sin ACD : sin DAC; daher $\frac{c}{2t_c} = \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\varphi \cot\alpha + \cos\varphi$. Aus $\triangle$ BDC erhält man ebenso $\frac{c}{2t_c} = \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\beta} = \sin\varphi \cot\beta - \cos\varphi$. Ferner ist $\cot\delta = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$. Eliminiert man $\cot\alpha$ und $\cot\beta$ aus diesen drei Gleichungen, so ergiebt sich $\cot\delta = \frac{c^2 - 4t_c^2 \cos 2\varphi}{4t_c^2 \sin 2\varphi}$ oder $\frac{\sin(2\varphi+\delta)}{\sin\delta} = \frac{c^2}{4t_c^2} = \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{t_c^2}$. Setzt man $\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{t_c} = p$, so ist $\frac{\sin(2\varphi+\delta)}{\sin\delta} = \frac{p}{t_c}$. Die Konstruktion von p geschieht nach §. 135. Aus der letzten Gleichung entnehmen wir: Konstruiert man ein Dreieck aus den Seiten p und t_c und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel δ, so ist der eingeschlossene Winkel $= 2\varphi$. Konstruktion (von Bessel). Kreise um D mit $\frac{1}{2}c$ und t_c mögen eine durch D gezogene gerade Linie resp. in A, B und L, M treffen. Trage an DA in A $\angle\,\delta$ an, dessen freier Schenkel den mit t_c um D geschlagenen Kreis in E trifft; DE trifft den Kreis mit $\frac{1}{2}c$ in F; ziehe FG $\parallel$ EA bis zum Durchschnitt mit DA; FG treffe den Kreis mit t_c in H; die Halbierungslinie des Winkels ADH treffe den Kreis mit t_c in C.

18. Malfattiſche Aufgabe. In $\triangle$ ABC ($c > b > a$) 3 Kreiſe ſo zu zeichnen, daß jeder von ihnen die beiden anderen und zwei Dreiecksſeiten berührt (ſiehe §. 102, 12). 1. Anal. (von Grunert). Das gegebene Dreieck ſei ABC, die Mittelpunkte der geſuchten Kreiſe ſeien D, E, F, ihre Radien reſp. r, r_1, r_2; der Kreis um D berühre AB und AC, der um E berühre AB und BC, der dritte BC und CA. AB berühre die Kreiſe D und E reſp. in G und H; die Kreiſe ſelbſt berühren ſich in I; eine durch I gelegte gemeinſchaftliche Tangente der beiden Kreiſe treffe AB in K. Zieht man durch D eine Parallele zu AB, welche EH (oder wenn $r > r_1$, die Verlängerung von EH) in L trifft, ſo iſt $DE^2 - EL^2 = DL^2 = GH^2$, oder $GH^2 = (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2 = 4rr_1$, oder $GH = 2\sqrt{rr_1}$; ferner iſt $GH = c - AG - BH = c - r \cot \frac{1}{2}\alpha - r_1 \cot \frac{1}{2}\beta$. Mithin

$$2\sqrt{rr_1} = c - r \cot \tfrac{1}{2}\alpha - r_1 \cot \tfrac{1}{2}\beta$$
$$2\sqrt{r_1 r_2} = a - r_1 \cot \tfrac{1}{2}\beta - r_2 \cot \tfrac{1}{2}\gamma \quad (1).$$
$$2\sqrt{r_2 r} = b - r_2 \cot \tfrac{1}{2}\gamma - r \cot \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Multipliziert man von dieſen Gleichungen die 2te mit $\sin\beta$, die 3te mit $\sin\alpha$, und ſubtrahiert dann beide, ſo erhält man $2\sqrt{r_1 r_2}\sin\beta - 2\sqrt{r_2 r}\sin\alpha = r\cot\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha - r_1\cot\frac{1}{2}\beta\sin\beta + r_2\cot\frac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta)$ und da $\cot\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$ und $\cot\frac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = -(\cos\alpha - \cos\beta) = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\sin\frac{1}{2}\beta^2$ iſt, ſo ergiebt ſich: $\sqrt{r_1 r_2}\sin\beta - \sqrt{r_2 r}\sin\alpha = r\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - r_1\cos\frac{1}{2}\beta^2 + r_2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - r_2\sin\frac{1}{2}\beta^2$ oder: $r_1\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 2\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\beta + r_2\sin\frac{1}{2}\beta^2 = r\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\sqrt{rr_2}\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha + r_2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ oder $\sqrt{r_1}\cos\frac{1}{2}\beta + \sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{r}\cos\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}\alpha$. Auf beiden Seiten mußte das poſitive Zeichen genommen werden, da keine der beiden Größen negativ werden kann. Durch ähnliche Behandlung der 1ten und 2ten, und der 1ten und 3ten Gleichung des Syſtems (1) erhält man drei Gleichungen:

$$\sqrt{r_1}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{r_2}\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{r_2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\sqrt{r_2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{r_1}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}\beta \quad (2)$$
$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{r_1}\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{r_2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{r_1}\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Durch Addition der 2ten und 3ten dieſer Gleichungen ergiebt ſich: $\sqrt{r}(\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma) = \sqrt{r_1}(\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\alpha)$ (3.) Nun iſt aber: $\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma = 4\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{4}\beta\sin\frac{1}{4}\gamma$, und ebenſo $\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\alpha = 4\cos\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{4}\alpha\sin\frac{1}{4}\gamma$. Aus (3) ergiebt ſich demnach: $\sqrt{r}\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{4}\beta = \sqrt{r_1}\cos\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{4}\alpha$ oder $\sqrt{r} : \sqrt{r_1} = \dfrac{\cos\frac{1}{4}\alpha}{\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma)} : \dfrac{\cos\frac{1}{4}\beta}{\cos\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)}$ (4)

Um dieſe Proportion für die Konſtruktion bequemer zu machen, multipliziere man die Glieder des erſten Verhältniſſes mit $\sqrt{r}$, ſo ergiebt ſich: $r:\sqrt{rr_1} = \frac{\cos \frac{1}{4}\alpha}{\cos \frac{1}{4}(\beta+\gamma)} : \frac{\cos \frac{1}{4}\beta}{\cos \frac{1}{4}(\gamma+\alpha)}$ (5). Nun iſt, wie oben gezeigt, $2\sqrt{rr_1} = GH$, und da $KG = KH = KI$, ſo iſt $\sqrt{rr_1} = KG = KH = KI$, woraus gleichzeitig folgt, daß $\angle DKE$ ein rechter Winkel iſt. Konſtr. Verlängere CA und CB über A und B hinaus reſp. bis Q und R, teile die 4 Winkel BAC, ABC, BAQ, ABR jeden in 4 gleiche Teile, fälle von einem beliebigen Punkte D' der Halbierungslinie von $\angle BAC$ auf AB das Lot D'G'. Dann ſchneide D'G' von A aus auf der AB zunächſt liegenden Teilungslinie von $\angle BAQ$ ab $= AM$; fälle von M auf AB das Lot MU und verlängere es, bis es die AB zunächſt liegende Teilungslinie von $\angle BAC$ in N trifft, ſchneide AN von B aus auf der AB zunächſt liegenden Teilungslinie von $\angle ABC$ ab $= BO$, und fälle von O auf AB ein Lot, welches verlängert die AB zunächſt liegende Teilungslinie von $\angle ABR$ in P trifft. Dann iſt $AM = \frac{AU}{\cos MAU}$ und $AU = AN \cos NAU$, folglich $AM = \frac{AN \cos NAU}{\cos MAU} = \frac{AN \cos \frac{1}{4}\alpha}{\cos \frac{1}{4}(\beta+\gamma)}$ und ebenſo $PB = \frac{OB \cos \frac{1}{4}\beta}{\cos \frac{1}{4}(\gamma+\alpha)}$, und da $AN = OB$, ſo iſt $AM:PB = \frac{\cos \frac{1}{4}\alpha}{\cos \frac{1}{4}(\beta+\gamma)} : \frac{\cos \frac{1}{4}\beta}{\cos \frac{1}{4}(\gamma+\alpha)} = r:GK$. Nun ſchneide BP auf G'B von G' aus bis K' ab, und von K' aus noch einmal bis H', errichte auf D'K' und K'H' reſp. in K' und H' Lote, welche ſich in E' treffen; dann wird ſich $D'G':G'K' = r:GK$ verhalten. Die Verlängerung von AE' über E' hinaus wird die Halbierungslinie von $\angle ABC$ in E, und eine durch E parallel D'E gezogene Gerade die Halbierungslinie von $\angle BAC$ in D treffen. 2. Anal. (von Schellbach). Die 3 geſuchten Kreiſe ſeien K, K', K''; K berühre die Seiten b und c, K' die Seiten a und c, K'' die Seiten a und b; AB werde von K in L, und von K' in H berührt; es ſei $AL = x$, $BH = y$ und die Entfernung des Punktes C vom Berührungspunkt von K'' und der Seite $AC = z$. Dann iſt $KL = x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ und $K'H = y \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$. Da nun $KK' = x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + y \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$, und $LH = c - x - y$ iſt, ſo erhält man: $(x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + y \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta)^2 = (c - x - y)^2 + (x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - y \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta)^2$ oder $x + y + 2\sqrt{xy \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta} = c$. Bezeichnet man aber $a + b + c = 2s$, ſo iſt $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, alſo $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = 1 - \frac{c}{s}$. Setzt man nun $1 - \frac{c}{s} = \cos\varphi^2$ oder $c = s \sin\varphi^2$ (1), ſo ergiebt ſich: $x + y + 2\sqrt{xy} \cos\varphi$

$= s \sin\varphi^2$ (2). Analog erhält man, wenn man $b = s \sin\chi^2$ (1a) und $a = s \sin\psi^2$ (1b) setzt: $x + z + 2\sqrt{xz}\cos\chi = s \sin\chi^2$ (2a) und $y + z + 2\sqrt{yz}\cos\psi = s \sin\psi^2$ (2b). Setzt man ferner $x = s \sin\lambda^2$, $y = s \sin\mu^2$, $z = s \sin\nu^2$, so geht (2) über in $\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 + 2 \sin\lambda \sin\mu \cos\varphi = 1 - \cos\varphi^2$, oder $\cos\varphi^2 + 2\sin\lambda \sin\mu \cos\varphi + \sin\lambda^2 \sin\mu^2 = 1 - \sin\lambda^2 - \sin\mu^2 + \sin\lambda^2 \sin\mu^2$ oder $\cos\varphi + \sin\lambda \sin\mu = \pm\cos\lambda \cos\mu$; daher ist $\cos\varphi = \pm\cos(\lambda \pm \mu)$, wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Folglich ist entweder $\lambda + \mu = \varphi$ oder $\lambda - \mu = \pi - \varphi$; da letzterer Wert für die innerhalb des Dreiecks liegenden Kreise keine Bedeutung hat, so gilt nur $\lambda + \mu = \varphi$; analog $\lambda + \nu = \chi$ und $\mu + \nu = \psi$. Durch Addition ergiebt sich $\lambda + \mu + \nu = {}^1/_2 (\varphi + \chi + \psi) = \sigma$; mithin $\lambda = \sigma - \psi$, also $x = s \sin(\sigma - \psi)^2$ (3); analog $y = s \sin(\sigma - \chi)^2$ (3a) und $z = s \sin(\sigma - \varphi)^2$ (3b). Konstr. x, y, z sind nun nach den Gleichungen 1 und 3 zu konstruieren; hierzu werden aber zunächst φ, χ und ψ konstruiert werden müssen. Verlängere BA über A hinaus bis F, so daß $BF = s$; schlage über BF als Durchmesser einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt M, nach der Seite zu, auf welcher das Dreieck liegt, und errichte auf BF in A ein Lot, welches den Halbkreis in A′ trifft, so ist $A'B^2 = cs = s^2 \sin A'FB^2$, oder $c = s \sin A'FB^2$, mithin nach (1) $\angle A'FB = \varphi$ und $\angle A'MB = 2\varphi$. Schlägt man ferner auf AB von B aus $b = BD$ und $a = BE$ ab, und errichtet auf AB in D und E Lote, welche den Halbkreis resp. in D′ und E′ treffen, so ist $b = s \sin D'FB^2$, also $\angle D'MB = 2\chi$; und $c = s \sin E'FB^2$, also $\angle E'MB = 2\psi$. Um nun z. B. x zu konstruieren, nehmen wir (3), wonach $x = s \sin(\sigma - \psi)^2$. Da $\sigma - \psi = {}^1/_2 (\varphi + \chi - \psi)$, so ist der Centriwinkel $2\varphi + (2\chi - 2\psi)$ zu konstruieren. Es ist $\angle D'ME' = 2\chi - 2\psi$; schlägt man daher auf Bogen A′F von A′ aus D′E′ ab bis G, so ist $\angle BMG = 2(\varphi + \chi - \psi)$; wird Bogen BG in H′ halbiert, so ist $\angle BMH' = \varphi + \chi - \psi$; mithin $\angle BFH' = {}^1/_2 (\varphi + \chi - \psi)$. Wird daher von H′ auf AB das Lot H′H gefällt, so ist $BH = AL = x$. Die Konstruktion von y und z ist ähnlich.

19. Ein Dreieck zu konstruieren aus ρ_a, ρ_b, ρ_c (siehe §. 64, 55).

Anal. Es ist $\sin {}^1/_2\alpha = \dfrac{\rho_a}{\sqrt{(\rho_a + \rho_b)(\rho_a + \rho_c)}}$ und $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha = \dfrac{\rho_a}{\sqrt{\rho_a\rho_b + \rho_b\rho_c + \rho_c\rho_a}}$ u. s. w.; mithin $\rho_a \cot {}^1/_2\alpha = \rho_b \cot {}^1/_2\beta = \rho_c \cot {}^1/_2\gamma$. Konstr. Auf derselben Geraden mache man $DE = \rho_a$, $EF = \rho_b$, $EG = \rho_c$. Eine Senkrechte in F treffe den Halbkreis über DG in H, so ist $HD = \sqrt{(\rho_a + \rho_b)(\rho_a + \rho_c)}$. Ein Kreis mit DH um D trifft eine auf DF in E errichtete Senkrechte in J, so ist $\angle DJE = {}^1/_2\alpha$; mithin $EJ = \rho_a \cot {}^1/_2\alpha = \rho_b \cot {}^1/_2\beta$, also $\angle EJF = {}^1/_2\beta$. Man trägt nun auf JE von E aus $JK = \rho_c$ ab, errichtet auf JE in K eine Senkrechte, welche JD in A und JF in B trifft; Senkrechte auf JD und JF in resp. A und B treffen sich in m.

§. 142.

Aufgaben, in denen Winkel aus unentwickelten Gleichungen zu konstruieren sind.

a) Konstruktion des Winkels φ aus einer Gleichung von der Form $\alpha)$ $a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$, $\beta)$ $a\cos\varphi - b\sin\varphi = c$, $\gamma)$ $b\sin\varphi - a\cos\varphi = c$.

$\alpha)$ Konstruiert man einen rechten Winkel und macht seine Schenkel $OA = a$, $OB = b$, legt dann an OA in O den Winkel φ so an, daß sein freier Schenkel außerhalb des Dreiecks OAB liegt und fällt auf denselben und seine Verlängerung die Lote AA' und BB', so ist $A'B' = OA' + OB' = a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$, wodurch die Aufgabe auf §. 70, 6 zurückgeführt ist. Da die Konstruktion von $A'B'$ nicht Hauptzweck ist, so kann man dieselbe bei der Konstruktion fortlassen. Konstr. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten $OA = a$ und $OB = b$, errichte über AB als Durchmesser einen Kreis und schlage um A mit c einen Kreis, welcher den vorigen in D und E trifft (D auf dem Bogen AOB), so ist $\angle OAE$ ein Wert von φ. Ist $c > a$, liegt also D zwischen O und B, so genügt auch $\angle OAD$ der Aufgabe.

$\beta)$ Die Konstruktion ist nur möglich, wenn $c < a\cos\varphi$, also $c < a$ ist. Zeichnet man einen rechten Winkel mit den Schenkeln $OA = a$, $OB = b$, zieht dann innerhalb des Winkels AOB durch O eine Linie, die mit OA den Winkel φ bildet und fällt auf dieselbe die Lote AA' und BB', so ist $A'B' = OA' - OB' = a\cos\varphi - b\sin\varphi = c$, also die Aufgabe zurückgeführt auf §. 70, 15. Konstr. ebenso wie beim vorigen Fall, nur trifft der um A mit c beschriebene Kreis, da $c < a$, den Bogen AO in D. Der Aufgabe genügt hier nur $\angle OAD$.

$\gamma)$ Die Konstruktion ist nur möglich, wenn $c < b\sin\varphi$, also auch $c < b$ ist. Ähnlich wie der vorige Fall läßt sich auch dieser auf §. 70, 15 zurückführen. Konstr. ebenso wie in $\alpha)$. Trifft der um A mit c beschriebene Kreis den Halbkreis, welcher nicht das Dreieck AOB enthält, in E, so ist $\angle OAE = \varphi$.

Ein Dreieck zu konstruieren aus

1. c, h_c, $\alpha - \beta$ (§. 29, 1). Anal. Man findet γ aus der Gleichung $2h_c\sin\gamma - c\cos\gamma = c\cos(\alpha - \beta)$.

2. $p - q$, h_c, γ (§. 29, 5). Anal. Für $\alpha - \beta$ findet man die Gleichung $2h_c\sin(\alpha - \beta) - (p - q)\cos(\alpha - \beta) = (p - q)\cos\gamma$.

3. $a - b$, w_c, γ. Anal. $\alpha - \beta = \delta$ zu finden aus $2w_c\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\delta - (a - b)\cos\delta = (a - b)\cos\gamma$. (§. 53, 12.)

In den Aufgaben 4 bis 14 ist $\frac{1}{2}\gamma$, in 15 bis 25 ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, in 26 bis 29 ist γ, in 30 und 31 ist $\alpha - \beta$, in 32 ist α, in 33 und 34 ist β die unbekannte Größe.

4. $a+b+c, h_c, \alpha-\beta$
5. $c, \rho, \alpha-\beta$
6. $a+b+c, w_c, \alpha-\beta$
7. $a+b-c, h_c, \alpha-\beta$
8. $a+b-c, w_c, \alpha-\beta$
9. $c, \rho_c, \alpha-\beta$
10. $c, \rho_a, \alpha-\beta$
11. $a+b, h_c-\rho, \alpha-\beta$
12. $a+b, h_c+\rho_c, \alpha-\beta$
13. $a+b+c, w_c, \rho$
14. $a+b-c, w_c, \rho_c$
15. $a-b, \rho, \gamma$
16. $a+b+c, \rho_a-\rho_b, \gamma$ (§. 46, 94)
17. $a+b-c, \rho_a-\rho_b, \gamma$ (§. 46, 95)
18. $a+b, \rho_a, \gamma$
19. w_c, ρ_a, γ (§. 46, 37)
20. $p-q, h_c-\rho, \gamma$
21. $p-q, h_c+\rho_c, \gamma$
22. $\rho, \rho_a-\rho_b, \gamma$ (§. 46, 92)
23. $\rho_c, \rho_a-\rho_b, \gamma$ (§. 46, 93)
24. $\rho_a, \rho_c+\rho, \gamma$ (§. 46, 90)
25. $u-v, \rho_a+\rho_b, w_c$
26. $a+b+c, h_c+\rho_c, r$
27. $a+b-c, h_c-\rho, r$
28. $a+b+c, \rho_a+\rho_b, \rho_c+\rho$
29. $a+b-c, \rho_a+\rho_b, \rho_c+\rho$
30. $w_c, \rho_a-\rho_b, \gamma$
31. $p-q, u-v, \rho_a+\rho_b$
32. $h_c, \rho_a-\rho_b, \beta$
33. $h_c, \rho_c+\rho, \alpha$
34. $h_c, \rho_a-\rho_b, \alpha$

b) Konstruktion der Winkel μ und ν, wenn $\mu+\nu=\alpha$, ($\alpha<2R$) bekannt ist und zwischen μ und ν eine trigonometrische Gleichung besteht.

α) μ und ν zu bestimmen aus $\mu+\nu=\alpha$ und $a\sin\mu=b\sin\nu$. 1. Aufl. Zeichne einen Winkel $=\alpha$ und mache seine Schenkel $OA=a$, $OB=b$, und verbinde O mit der Mitte C von AB. Dann ist $\angle AOC=\mu$, $\angle BOC=\nu$. 2. Aufl. Zeichne einen Winkel $=2R-\alpha$, mache seine Schenkel $OA=a$, $OB=b$, so ist $OAB=\mu$, $OBA=\nu$. Anm. Ist $\alpha=\mu+\nu>2R$, so ist, wenn μ' und ν' die Nebenwinkel von μ und ν bezeichnen, $\mu'+\nu'=4R-\alpha$, also $<2R$ und $a\sin\mu'=b\sin\nu'$; daher μ' und ν' zu konstruieren. 3. Aufl. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Grundlinie $AB=a+b$, dessen Winkel $ACB=\alpha$, trage $AD=a$ auf AB ab, so ist $\angle ACD=\nu$, $\angle BCD=\mu$.

β) μ und ν zu bestimmen aus $\mu+\nu=\alpha$ und $a\sin\mu+b\sin\nu=c$. Aufl. Zeichne einen Winkel $=\alpha$, und mache seine Schenkel $OA=a$, $OB=b$ und ziehe nach §. 70, 6 durch O außerhalb $\angle AOB$ eine Linie der Art, daß, wenn man auf sie die Senkrechten AA' und BB' fällt, $A'B'=c$ ist. Dann ist $\angle OAA'=\mu$, $\angle OBB'=\nu$.

γ) μ und ν zu bestimmen aus $\mu+\nu=\alpha$ und $a\sin\mu-b\sin\nu=c$. Aufl. Zeichne einen Winkel $=2R-\alpha$, mache seine Schenkel $OA=a$, $OB=b$ und ziehe nach §. 70, 15 durch O innerhalb $\angle AOB$ eine Linie, daß, wenn man darauf die Senkrechten AA' und BB' fällt, $A'B'=c$ ist. Dann ist $\angle OAA'=\mu$, $\angle OBB'=\nu$.

δ) μ und ν zu bestimmen aus $\mu+\nu=\alpha$ und $ab\sin\mu\sin\nu=c^2$. 1. Aufl. Zeichne einen Winkel $=\alpha$ mit den Schenkeln $OA=a$, $OB=b$, ziehe dann nach §. 75, 4 durch O außerhalb des Winkels so eine Linie, daß, wenn man die Senkrechten AA' und BB' auf dieselbe fällt, $OA'\cdot OB'=c^2$ ist. Dann ist $\angle OAA'=\mu$ und $\angle OBB'=\nu$. 2. Aufl. Zeichne einen Winkel $=2R-\alpha$ mit den Schenkeln $OA=a$, $OB=b$, und ziehe nach §. 75, 4 durch O innerhalb des Winkels so eine Linie, daß, wenn

man darauf die Senkrechten AA′ und BB′ fällt, $OA' \cdot OB' = c^2$ ist. Anm. Bei Anwendung dieser Konstruktion kann man oft dadurch eine Vereinfachung erzielen, daß man statt a und b zwei Linien nimmt, die sich = a : b verhalten.

ε) Enthalten die Gleichungen statt der Sinusse die Cosinusse der Winkel, so ist die Konstruktion ähnlich auszuführen.

In ein Parallelogramm ein Viereck zu beschreiben (wenn ein Parallelogramm in oder um ein anderes beschrieben wird, so haben beide denselben Mittelpunkt), welches

35. ein Quadrat ist (§. 123, 24.) Anal. Das gegebene Parallelogramm sei ABCD, der Durchschnittspunkt der Diagonalen E, die zu den Seiten a und b gehörigen Höhen seien resp. h_a und h_b. Auf AD liege die Ecke F, auf CD die Ecke G des gesuchten Quadrats; EF und EG werden dann seine halben Diagonalen sein. ∠ ADC werde mit δ, EFD mit x, EGD mit λ bezeichnet. Nun ist $EF = \frac{h_b}{2 \sin x}$, $EG = \frac{h_a}{2 \sin \lambda}$, folglich da EF = EG ist, $\frac{h_b}{\sin x} = \frac{h_a}{\sin \lambda}$, oder da $h_b : h_a = a : b$, $a \sin\lambda = b \sin x$. Ferner $x + \lambda = 3R - \delta$ oder $2R - (x + \lambda) = \delta - R$. Konstr. (mit Hülfe von α), Aufl. 2). Errichte in der Mitte H von AB die Senkrechte $HI = \frac{1}{2} a$; EI ist, gehörig verlängert, eine Diagonale des Quadrats. Beweis. $HIE + HEI = 2R - IHE = 2R - (\delta - R) = 3R - \delta$; $\sin HEI : \sin HIE = HI : HE = a : b$; mithin ∠ HEI = x.

36. ein Rhombus ist, dessen Diagonalen sich = m:n verhalten (§. 123, 26). Anal. Bezeichnungen wie 35. Man erhält ähnlich wie dort $\frac{na}{m} \sin\lambda = b \sin x$, wo der Koefficient von $\sin\lambda$ nach §. 135 zu konstruieren ist. Dann wie 35.

37. ein Rechteck wird, dessen Seiten sich m:n verhalten (§. 123, 27). Anal. Bezeichnungen wie bei 35. Durch das Verhältnis der Seiten des Rechtecks ist auch der Diagonalenwinkel ϑ bestimmt. Dann findet man, ähnlich wie in 35, $a \sin\lambda = b \sin x$ und $x + \lambda = 4R - (\delta + \vartheta)$;

38. ein Parallelogramm ist, welches einem anderen gegebenen ähnlich ist (§. 123, 28). Anal. Die Bezeichnungen bleiben. Sind in dem zweiten gegebenen Parallelogramm f und g die Diagonalen, ϑ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so findet man, wie in 36, die Gleichungen $\frac{fa}{g} \sin\lambda = b \sin x$ und $x + \lambda = 4R - (\delta + \vartheta)$;

39. einem beliebigen gegebenen Viereck ähnlich wird. Anal. Das gegebene Parallelogramm sei ABCD, das gegebene Viereck EFGH, das gesuchte E′F′G′H′, und zwar liege E′ auf AB, F′ auf BC, G′ auf

CD, H′ auf AD. G′E′ und H′F′ schneiden sich in I. Dann kennt man das Verhältnis der Abstände des Punktes I von den Parallelen AB und CD, welches = E′I : IG′ ist. Ebenso läßt sich das Verhältnis der Abstände des Punktes I von BC und AD angeben = IF′ : IH′. Dadurch ist der Punkt I bestimmt, somit also auch die von ihm auf CD und DA gefällten Senkrechten. Ferner kennt man ∠ G′IH′ und G′I : IH′. Die Aufgabe läßt sich dann in ähnlicher Weise auflösen, wie die vorigen.

Um ein gegebenes Parallelogramm ein Viereck so zu zeichnen, daß dasselbe

40. ein Quadrat wird (§. 127, 6). Anal. Das gegebene Parallelogramm sei ABCD, die Diagonalen schneiden sich in E unter dem Winkel ε, das gesuchte Quadrat sei FGHI, und es liege A auf IF, B auf FG, C auf GH, D auf HI. Ferner werde ∠ EAF mit x, EBF mit λ bezeichnet, AC mit e, BD mit f, die Seite des Quadrats mit x. Dann ist $e \sin x = x$, $f \sin \lambda = x$, folglich $e \sin x = f \sin \lambda$; ferner $x + \lambda = 3R - \varepsilon$. Konstr. (mit Hülfe von α), Aufl. 2). Errichte auf EB in E die Senkrechte EK = EB. Dann ist AK gehörig verlängert eine Seite des Quadrats. Bew. ähnlich wie bei 35;

41. ein Rechteck wird, dessen Seiten sich wie m : n verhalten (§. 127, 5). Anal. Bezeichnungen wie in 40. Man findet $\frac{ne}{m} \sin x = f \sin \lambda$. Der Koefficient von sin x ist nach §. 135 zu konstruieren, dann wie 40.

42. ein Rhombus mit dem Winkel ϑ wird (§. 127, 13). Anal. Die beiden einander gleichen Höhen des Rhombus sind $e \sin x$ und $f \sin \lambda$; folglich ist $e \sin x = f \sin \lambda$ und $x + \lambda = 4R - (\varepsilon + \vartheta)$. Die Konstruktion ist mit Benutzung von α) Aufl. 2 ähnlich wie 40.

43. ein Parallelogramm wird, welches einem gegebenen F′G′H′I′ mit dem Winkel ϑ ähnlich ist (§. 127, 12.) Anal. Die Höhen $e \sin x$ und $f \sin \lambda$ des gesuchten Parallelogramms verhalten sich umgekehrt wie seine Seiten, also $e \sin x : f \sin \lambda = FG : FI = F'G' : F'I'$, oder $\frac{F'I' \cdot e}{F'G'} \sin x = f \sin \lambda$ und $x + \lambda = 4R - (\varepsilon + \vartheta)$. Zu benutzen §. 135, dann ähnlich wie 40 und 42.

44. Um ein beliebiges Viereck ABCD ein Parallelogramm FGHI zu beschreiben, welches einem gegebenen F′G′H′I′ mit dem Winkel ϑ ähnlich ist (§. 127, 12). Anal. AC und BD schneiden sich in E; ∠ EAF werde mit x, ∠ EBF mit λ bezeichnet. Dann findet man, wie in 15, $G'H' \cdot e \sin x = F'G' \cdot f \sin \lambda$, und $x + \lambda = 4R - (\varepsilon + \vartheta)$. α), Aufl. 2.

In den folgenden 4 Aufgaben kommt b, δ) in Anwendung.

45. In ein gegebenes Parallelogramm einen Rhombus von gegebenem

Inhalt q^2 zu konstruieren (§. 123, 29). Anal. Bezeichnungen wie in 36. Man findet, da $q^2 = 2EF \cdot EG$ ist, zur Bestimmung von x und λ die Gleichungen $2q \cdot q \sin x \sin\lambda = h_a h_b$ und $x + \lambda = 3R - \delta$.

46. In ein gegebenes Parallelogramm ein anderes zu beschreiben, dessen Inhalt $= q^2$ und Diagonalenwinkel ϑ gegeben ist (§. 123, 30). Anal. Bezeichnungen wie 37. Aehnlich wie in 45 erhält man $2q.q \sin x \sin\lambda = h_a - h_b \sin\vartheta$ und $x + \lambda = 4R - (\delta + \vartheta)$.

47. Um ein gegebenes Parallelogramm ein Rechteck von gegebenem Inhalt q^2 zu konstruieren (§. 127, 7). Anal. Bezeichnungen wie 41. Da $q^2 = FG \cdot FI$, so ist $ef \sin x \sin\lambda = q^2$ und $x + \lambda = 3R - \varepsilon$.

48. Um ein gegebenes Parallelogramm ein anderes zu beschreiben, dessen Inhalt q^2 und Winkel ϑ gegeben ist (§. 127, 14). Anal. Bezeichnungen wie 43. Da $q^2 = \frac{h_a h_b}{\sin\vartheta}$, so findet man $\frac{e}{\sin\vartheta} f \sin x \sin\lambda = q^2$ und $x + \lambda = 4R - (\varepsilon + \delta)$.

In einen gegebenen Kreissektor (Centriwinkel $< R$) ein Rechteck, von welchem zwei Ecken auf einem Radius liegen, so zu zeichnen, daß

49. sein Umfang $= 2s$ wird (§. 120, 13). Anal. Der Mittelpunkt des Kreissektors sei M, der Bogen AB, der Centriwinkel γ. Von dem gesuchten Rechteck CDEF liegen die Ecken C und F auf MA, D auf MB, und E auf dem Bogen AB. Ferner werde ED mit x, EF mit y, $\angle$ BME mit μ, $\angle$ AME mit ν bezeichnet. Dann ergiebt sich aus den Dreiecken MED und MEF $x = \frac{r \sin\mu}{\sin\gamma}$, $y = r \sin\nu$, und da $x + y = s$ ist, $\frac{r}{\sin\gamma} \sin\mu + r \sin\nu = s$ und $\mu + \nu = \gamma$. Konstr. nach β).

50. die Differenz der Seiten $= d$ ist (§. 120, 14). Anal. Ähnlich wie in 49 findet man $\frac{r}{\sin\gamma} \sin\mu - r \sin\nu = d$ und $\mu + \nu = \gamma$. Konstruktion nach γ).

51. seine Diagonale $= e$ wird (§. 120, 15). Anal. Wie in 49 findet man $\frac{r^2}{\sin\gamma^2} \sin\mu^2 + r^2 \sin\nu^2 = e^2$. Drückt man $\sin\mu^2$ und $\sin\nu^2$ durch $\cos 2\mu$ und $\cos 2\nu$ aus, so erhält diese Gleichung die Form $\frac{r^2}{\sin\gamma^2} \cos 2\mu + r^2 \cos 2\nu = \frac{r^2}{\sin\gamma^2} + r^2 - 2e^2$ oder, indem man $\frac{r}{\sin\gamma} = p$ setzt und die Gleichung durch p dividiert, $p \cos 2\mu + r \sin\gamma \cos 2\nu = p + r \sin\gamma - \frac{2e \cdot e}{p}$, während $2\mu + 2\nu = 2\gamma$ ist. Konstr. nach ε).

In einen Kreissektor ein Rechteck, von welchem zwei Ecken auf dem Kreisbogen liegen, so zu zeichnen, daß

52. sein Umfang = 2s (§. 120, 8). Anal. Der Mittelpunkt des Kreissektors sei M, der Bogen AB, der Centriwinkel 2γ. Vom gesuchten Rechteck liegen die Ecken E und F auf AB, C auf MA, D auf MB; ED werde mit x, EF mit y, $\angle$ BME mit μ, $\angle$ EMG (G die Mitte von AB) mit ν bezeichnet. Dann findet man ähnlich, wie in 49, die Gleichungen $x = \frac{r\sin\mu}{\sin\gamma}$, $y = 2r\sin\nu$, folglich $\frac{r}{\sin\gamma}\sin\mu + 2r\sin\nu = s$; ferner ist $\mu + \nu = \gamma$, also μ und ν nach β) zu finden.

53. die Differenz der Seiten = d ist (§. 120, 9). Anal. Man findet ähnlich wie in 52 die Gleichungen $\frac{r}{\sin\gamma}\sin\mu - 2r\sin\nu = d$, $\mu + \nu = \gamma$, so daß γ) in Anwendung kommt.

54. seine Diagonale = e ist (§. 120, 10). Anal. Bezeichnungen wie in 52. Ähnlich wie in 51 erhält man zur Bestimmung von 2μ und 2ν die Gleichungen $p\cos 2\mu + 4r\sin\gamma\cos\nu = p + 4r\sin\gamma - \frac{2e\cdot e}{p}$ und $2\mu + 2\nu = 2\gamma$, wo $p = \frac{r}{\sin\gamma}$ gesetzt ist. Es kommt also ε) in Anwendung.

55. Gegeben $\triangle$ ABC. Durch C eine Linie so zu ziehen, daß, wenn man auf dieselbe die Lote AX und BY fällt, $\triangle$ ACX = $\triangle$ BCY wird. Anal. $\angle$ ACX = μ, $\angle$ BCY = ν gesetzt, giebt $\triangle$ ACX = $\frac{1}{4}b^2\sin 2\mu$ und $\triangle$ BCY = $\frac{1}{4}a^2\sin 2\nu$; daher $b^2\sin 2\mu = a^2\sin 2\nu$, wo $2\mu + 2\nu = \gamma$. Beschreibt man um ABC einen Kreis (Mittelpunkt M) und fällt auf CM die Lote AD und BE, so ist CD $\sin 2\mu$ = BE $\sin 2\nu$. 1. Aufl. Nachdem man die Punkte D und E bestimmt hat, schneide man CD = MF auf MA, CE = MG auf MB ab, verbinde M mit dem Mittelpunkt von FG. Diese Linie treffe den Kreis in H, so ist CH die verlangte Linie. 2. Aufl. Nachdem man um ABC einen Kreis beschrieben, teile man AB im Verhältnis $a^2 : b^2$ (§. 114, 13). Der Teilpunkt sei L. Die Verlängerung von ML über L hinaus treffe den Kreis in H, so ist CH die verlangte Linie.

56. Gegeben $\triangle$ ABC. Auf AB einen Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn man auf AC und BC die Lote XY und XZ fällt, $\triangle$ AXY = BXZ wird. Anal. Wird $\angle$ ACX = μ, $\angle$ BCX = ν gesetzt, so ist XY = CX $\sin\mu$, XZ = CX $\sin\nu$, ferner $\triangle$ AXY = $\frac{1}{2}$AY · XY = $\frac{1}{2}XY^2\cot\alpha = \frac{1}{2}CX^2\sin\mu^2\cot\alpha$; ebenso $\triangle$ BXZ = $\frac{1}{2}CX^2\sin\nu^2\cot\beta$ folglich $\frac{\sin\mu}{\sin\nu} = \sqrt{\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}} = \sqrt{\frac{h_c\cot\beta}{h_c\cot\alpha}} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{pq}}{q}$.

Erster Anhang.

Aufgaben, welche mit Anwendung der Koordinaten-Methode zu lösen sind.

Bei einigen Aufgaben führt der Gebrauch von Koordinaten zu einer besonders einfachen Konstruktion. Es mögen daher, wenn auch die Lehre von den Koordinaten außerhalb des Pensums der Gymnasien liegt, doch die ersten Elemente dieser Theorie, soweit sie zur Lösung der folgenden Aufgaben erforderlich sind, in diesem Buche als Anhang einen Platz finden.

a) *Erklärung.* Wir denken uns zwei im Punkte O auf einander senkrecht stehende gerade Linien OX und OY (unten links O, rechts X, oben Y). Dieselben nennt man *Koordinatenachsen* und zwar OX die *Abscissenachse*, OY die *Ordinatenachse*, O den *Anfangspunkt der Koordinaten*, $\angle$ XOY den *Koordinatenwinkel*. Fällt man von einem beliebigen innerhalb $\angle$ XOY liegenden Punkte P auf OX und OY resp. die Senkrechten PQ und PR, so nennt man dieselben die *Koordinaten* des Punktes P, und zwar PR = OQ seine *Abscisse*, PQ = OR seine *Ordinate*. Für jeden innerhalb $\angle$ XOY gelegenen Punkt kann man die Koordinaten leicht konstruieren; ebenso leicht kann man aber auch einen Punkt konstruieren, wenn seine Koordinaten gegeben sind. *Ein Punkt ist also durch seine Koordinaten bestimmt.*

Anmerkung. Wenn man die Koordinaten eines Punktes nennt, so setzt man die Abscisse stets voran. Wird z. B. gesagt, daß die Koordinaten eines gewissen Punktes x und y seien, so ist ohne weiteres unter x seine Abscisse, unter y seine Ordinate zu verstehen; und man bezeichnet den Punkt durch (x, y).

Zusatz. Die analytische Geometrie handelt auch von den Koordinaten solcher Punkte, die nicht innerhalb des Koordinatenwinkels liegen. Dieselben können jedoch in dem vorliegenden Falle stets von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Man braucht die Koordinatenachsen nur so zu wählen, daß die ganze Figur innerhalb des Koordinatenwinkels liegt.

b) Aufgabe. Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Linie zu berechnen, wenn man die Koordinaten ihrer Endpunkte kennt. Aufl. Die Endpunkte der gegebenen Geraden seien P (x, y) und P′ (x′, y′). Endlich sei P″ (x″, y″) der Mittelpunkt von PP′. Dann sind x″ und y″ Mittellinien der Trapeze PRR′P′ und PQQ′P′, folglich ist $x'' = \frac{1}{2}(x + x')$, $y'' = \frac{1}{2}(y + y')$.

c) Denken wir uns ein Parallelogramm $PP_1P_2P_3$; die 4 Eckpunkte seien resp. (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Die Koordinaten des Mittelpunktes der Diagonale PP_2 sind $\frac{1}{2}(x + x_2)$ und $\frac{1}{2}(y + y_2)$, die Koordinaten des Mittelpunktes von P_1P_3 sind $\frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ und $\frac{1}{2}(y_1 + y_3)$. Da aber die Linien PP_2 und P_1P_3 denselben Mittelpunkt haben, so muß offenbar $x + x_2 = x_1 + x_3$ und $y + y_2 = y_1 + y_3$ sein, woraus $x_3 = x - x_1 + x_2$ und $y_3 = y - y_1 + y_2$ folgt.

d) Umkehrung. Kennt man die Punkte P (x, y), P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), so läßt sich der Punkt $(x - x_1 + x_2, y - y_1 + y_2)$ leicht konstruieren, indem man durch P_2 eine Parallele mit PP_1 und durch P eine Parallele mit P_1P_2 zieht. Beide schneiden sich in dem gesuchten Punkte. Man kann auch P_1 mit der Mitte von PP_2 verbinden und die Verbindungslinie um sich selbst verlängern. Der Endpunkt der Verlängerung wird der gesuchte Punkt sein.

Zusatz. Ist $x_2 = x$, $y_2 = y$, soll also der Punkt $(2x - x_1, 2y - y_1)$ konstruiert werden, so verlängert man einfach die Linie PP_1 über P hinaus um sich selbst. Der Endpunkt der Verlängerung ist der gesuchte Punkt.

e) Aufgabe. Gegeben die Punkte P (x, y) und P_1 (x_1, y_1); man soll den Punkt P_2 (x_2, y_2) finden, durch welchen PP_1 im Verhältnis m:n geteilt wird. Aufl. Es sei zunächst $x < x_1$; eine Parallele durch P_2 zu OY treffe die Abscisse von P und P_1 resp. in R′ und R_1'. Dann ist $PR' : P_1R_1' = PP_2 : P_2P_1 = m : n$ und da $PR' = x_2 - x$, $P_1R_1' = x_1 - x_2$ ist, so erhält man $x_2 - x : x_1 - x_2 = m : n$, also $x_2 = \frac{mx_1 + nx}{m + n}$. Dasselbe würde man erhalten, wenn $x > x_1$ ist. Eine ähnliche Formel ergiebt sich auch für y_2 und man erhält schließlich $x_2 = \frac{mx_1 + nx}{m + n}$, $y_2 = \frac{my_1 + ny}{m + n}$.

Soll P_2 auf der Verlängerung von PP_1 über P_1 hinaus liegen, und $PP_2 : P_1P_2 = m : n$ sein, so erhält man mittelst desselben Verfahrens $x_2 = \frac{mx_1 - nx}{m - n}$, $y_2 = \frac{my_1 - ny}{m - n}$. Hiernach sind die Punkte

$\left(\frac{mx_1+nx}{m+n}, \frac{my_1+ny}{m+n}\right)$ und $\left(\frac{mx_1-nx}{m-n}, \frac{my_1-ny}{m-n}\right)$ leicht zu konstruieren, indem man PP_1 im ersteren Fall nach innerem, im zweiten nach äußerem Verhältnis, wie m:n teilt (§. 114, 1).

f) Aufgabe. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks aus den Koordinaten der 3 Ecken zu berechnen. Aufl. Die Ecken seien $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$; der Schwerpunkt sei $P_3(x_3, y_3)$, der Mittelpunkt von PP_1 sei $P_4(x_4, y_4)$. Dann liegen P_4, P_3, P_2 in einer geraden Linie und es verhält sich $P_4P_3 : P_3P_2 = 1:2$, folglich ist nach e), indem man 1 und 2 für m und n setzt, $x_3 = \frac{1}{3}(x_2+2x_4)$. Nach b) ist aber $x_4 = \frac{1}{2}(x+x_1)$, folglich $x_3 = \frac{1}{3}(x+x_1+x_2)$ und ebenso $y_3 = \frac{1}{3}(y+y_1+y_2)$.

Im folgenden sollen die gesuchten Punkte mit P, P_0, P_1, P_2 ꝛc., ihre Koordinaten mit x und y unter Hinzufügung des dem entsprechenden Punkte zugehörenden Index, die gegebenen Punkte hingegen mit A_0, A_1, A_2 ꝛc. (mitunter treten doppelte Indices auf), ihre Koordinaten mit a und b ebenfalls unser Hinzufügung des Index, welchen der entsprechende Punkt hat, bezeichnet werden. Die Koordinaten von P_3 sind also x_3 und y_3, die von A_4 sind a_4 und b_4, die von A_{01} sind a_{01} und b_{01}.

1. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Mitten der Seiten gegeben sind. Anal. Das gesuchte Fünfeck sei $P_0P_1P_2P_3P_4$. Die gegebenen Mittelpunkte der Seiten P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_0 seien resp. A_{01}, A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{40}. Dann erhält man nach b) die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_0+x_1 &= 2a_{01} & y_0+y_1 &= 2b_{01}\\ x_1+x_2 &= 2a_{12} & y_1+y_2 &= 2b_{12}\\ x_2+x_3 &= 2a_{23} & y_2+y_3 &= 2b_{23}\\ x_3+x_4 &= 2a_{34} & y_3+y_4 &= 2b_{34}\\ x_4+x_0 &= 2a_{40} & y_4+y_0 &= 2b_{40} \end{aligned}$$

und aus denselben: $x_0 = a_{01} - a_{12} + a_{23} - a_{34} + a_{40}$, $y_0 = b_{01} - b_{12} + b_{23} - b_{34} + b_{40}$. Um hieraus eine geschickte Konstruktion abzuleiten, setze man: $a_{12} - a_{23} + a_{34} = u$, $b_{12} - b_{23} + b_{34} = v$ (1). Dann ist $x_0 = a_{01} - u + a_{40}$, $y_0 = b_{01} - v + b_{40}$ (2). Mit Hülfe von d) kann man aus (1) den Punkt (u, v) und dann aus (2) den Punkt P_0 konstruieren. Das giebt folgende Konstr.: Man verbinde A_{23} mit der Mitte von $A_{12}A_{34}$ und verlängere diese Linie um sich selbst bis Q, verbinde dann Q mit der Mitte von $A_{01}A_{40}$ und verlängere diese Linie ebenfalls um sich selbst. Der Endpunkt der Verlängerung ist P_0. Zu einer andern Auflösung gelangt man, wenn man bedenkt, daß aus den Gleichungen für x_0 und y_0: $\frac{1}{3}(a_{01}+a_{23}+a_{40}) = \frac{1}{3}(x_0+a_{12}+a_{34})$ und $\frac{1}{3}(b_{01}+b_{23}+b_{40}) = \frac{1}{3}(y_0+b_{12}+b_{34})$ folgt, somit nach f) die Dreiecke $A_{01}A_{23}A_{40}$ und $P_0A_{12}A_{34}$ denselben Schwerpunkt haben.

2. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Mittelpunkte der Diagonalen gegeben sind. Anal. wie 1.

Ein Siebeneck zu konstruieren, wenn die Mitten

3. der Seiten gegeben sind. Anal. Unter ähnlichen Bezeichnungen wie in 1 erhält man für x_0 und y_0 die Gleichungen

$$x_0 = a_{01} - a_{12} + a_{23} - a_{34} + a_{45} - a_{56} + a_{60}.$$
$$y_0 = b_{01} - b_{12} + b_{23} - b_{34} + b_{45} - b_{56} + b_{60}.$$

Zur Konstruktion setze man:

$$a_{23} - a_{34} + a_{45} = u, \qquad a_{12} - u + a_{56} = r,$$
$$b_{23} - b_{34} + b_{45} = v, \qquad b_{12} - v + b_{56} = s.$$

Dann ist $x_0 = a_{01} - r + a_{60}$, $y_0 = b_{01} - s + b_{60}$. Ähnlich wie bei 1 konstruiert man nach d) successive die Punkte (u, v) und (r, s), endlich P_0 selbst;

4. der 7 Diagonalen gegeben sind, welche ein Dreieck abschneiden. Anal. wie 3;

5. der 7 Diagonalen gegeben sind, welche ein Viereck abschneiden. Anal. wie 3.

Anmerkung. Ähnliche Aufgaben, wie die bisherigen, lassen sich über jedes Vieleck mit ungerader Seitenzahl auf dieselbe Weise auflösen. Anders ist es bei den Vielecken von gerader Seitenzahl. Wollte man z. B. ein Viereck aus den Mitten der Seiten konstruieren, so würde man finden, daß die 4 gegebenen Punkte die Ecken eines Parallelogramms sein müssen, und daß dann unendlich viele Vierecke der Aufgabe genügen.

6. Ein Viereck zu konstruieren, wenn die Schwerpunkte der vier Dreiecke gegeben sind, welche von zwei Seiten und einer Diagonale gebildet werden. Anal. Das gesuchte Viereck sei $P_0P_1P_2P_3$, die Schwerpunkte der 4 Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_0P_2P_3$, $P_0P_1P_3$, $P_0P_1P_2$ resp. A_0, A_1, A_2, A_3. Dann ist nach f)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3a_0 \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 3b_0$$
$$x_0 + x_2 + x_3 = 3a_1 \qquad y_0 + y_2 + y_3 = 3b_1$$
$$x_0 + x_1 + x_3 = 3a_2 \qquad y_0 + y_1 + y_3 = 3b_2$$
$$x_0 + x_1 + x_2 = 3a_3 \qquad y_0 + y_1 + y_2 = 3b_3$$

und hieraus: $x_0 = -2a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, $y_0 = -2b_0 + b_1 + b_2 + b_3$. Zur Konstruktion verfahre man ähnlich wie bei 1, indem man $u = 2a_0 - a_1$ und $v = 2b_0 - b_1$ setzt, wodurch $x_0 = a_2 - u + a_3$, $y_0 = b_2 - v + b_3$. Dann ist (u, v) nach d), Zusatz und P_0 nach d) zu konstruieren.

7. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Schwerpunkte der fünf Dreiecke gegeben sind, welche von zwei Seiten und einer Diagonale gebildet werden. Anal. Bezeichnet man das Fünfeck mit $P_0P_1P_2P_3P_4$, die Schwerpunkte der Dreiecke $P_4P_0P_1$, $P_0P_1P_2$, $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_0$ resp. mit A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, so findet man: $x_0 = -a_3 + 2a_4 - a_0 + 2a_1 - a_2$, $y_0 = -b_3 + 2b_4 - b_0 + 2b_1 - b_2$. Zur Konstruktion setze man: $2a_4 - a_3 = u$, $2b_4 - b_3 = v$, $2a_1 - a_2 = r$, $2b_1 - b_2 = s$, wodurch $x_0 = u - a_0 + r$, $y_0 = v - b_0 + s$ und verfahre wie in 6.

8. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Schwerpunkte der fünf Dreiecke gegeben sind, die von einer Seite und zwei Diagonalen gebildet werden. Anal. wie 7.

Ein Siebeneck $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ zu konstruieren, wenn gegeben sind

9. die Schwerpunkte der 7 Dreiecke, welche von 2 Seiten und einer Diagonale gebildet werden.

10. die Schwerpunkte der 7 Dreiecke $P_0P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_4P_5$, $P_3P_5P_6$, $P_4P_6P_0$, $P_5P_0P_1$, $P_6P_1P_2$.

11. die Schwerpunkte der 7 Dreiecke $P_0P_3P_4$, $P_1P_4P_5$, $P_2P_5P_6$, $P_3P_6P_0$, $P_4P_0P_1$, $P_5P_1P_2$, $P_6P_2P_3$.

Anmerkung. Bei Lösung derselben Aufgabe über Vielecke, deren Seitenzahl durch 3 teilbar, würde man zu ähnlichen Resultaten gelangen, wie bei den in 5, Anmerk. erwähnten Aufgaben.

12. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die drei Punkte gegeben sind, welche die drei Seiten im Verhältnis m:n teilen (m > n). Anal. Das gesuchte Dreieck sei $P_0P_1P_2$. Auf den Seiten P_1P_2, P_2P_0, P_0P_1 liegen resp. die Punkte A_0, A_1, A_2, so daß $P_1A_0 : A_0P_2 = P_2A_1 : A_1P_0 = P_0A_2 : A_2P_1 = m:n$. Dann hat man nach e) sechs Gleichungen:

$$mx_2 + nx_1 = (m+n)\,a_0 \qquad my_2 + ny_1 = (m+n)\,b_0$$
$$mx_0 + nx_2 = (m+n)\,a_1 \qquad my_0 + ny_2 = (m+n)\,b_1$$
$$mx_1 + nx_0 = (m+n)\,a_2 \qquad my_1 + ny_0 = (m+n)\,b_2$$

und hieraus $x_0 = \dfrac{m^2a_1 - mna_0 + n^2a_2}{m^2 - mn + n^2}$, $y_0 = \dfrac{m^2b_1 - mnb_0 + n^2b_2}{m^2 - mn + n^2}$.

Setzt man nun: $\dfrac{ma_1 - na_0}{m-n} = u$, $\dfrac{mb_1 - nb_0}{m-n} = v$ (1), $\dfrac{ma_0 - na_2}{m-n} = r$, $\dfrac{mb_0 - nb_2}{m-n} = s$ (2), so lassen sich die beiden Gleichungen unter folgende zwei Formen schreiben:

$$x_0 = \frac{(m^2 - mn)\,u + n^2a_2}{m^2 - mn + n^2},\quad y_0 = \frac{(m^2 - mn)\,v + n^2b_2}{m^2 - mn + n^2} \qquad (3)$$

$$x_0 = \frac{m^2a_1 - (mn - n^2)\,r}{m^2 - (mn - n^2)},\quad y_0 = \frac{m^2b_1 - (mn - n^2)\,s}{m^2 - (mn - n^2)} \qquad (4).$$

Man konstruiere nun aus (1) mit Hülfe von e) den Punkt U (u, v), und ebenso aus (2) den Punkt R (r, s). Nun ist aus (3) nach e) ersichtlich, daß P_0 die Linie A_2U im Verhältnis $m^2 - mn : n^2$ teilt, also jedenfalls auf dieser Linie liegt. Ebenso ergiebt sich aus (4), daß der Punkt P_0 auf der Verlängerung von A_1R über A_1 hinaus liegt. P_0 ist also der Durchschnittspunkt von A_2U und A_1R.

13. Ein Viereck zu konstruieren, wenn die vier Punkte gegeben sind, welche die Seiten im Verhältnis m:n teilen. Anal. Das Viereck sei $P_0P_1P_2P_3$, auf den Seiten $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_0$ liegen resp. die Punkte

$A_{01}, A_{12}, A_{23}, A_{30}$, so daß $P_0A_{01} : A_{01}P_1 = P_1A_{12} : A_{12}P_2 = P_2A_{23} : A_{23}P_3 = P_3A_{30} : A_{30}P_0 = m:n$. Dann hat man nach e) die Gleichungen:

$$mx_0 + nx_3 = (m+n)\,a_{30} \qquad my_0 + ny_3 = (m+n)\,b_{30}$$
$$mx_1 + nx_0 = (m+n)\,a_{01} \qquad my_1 + ny_0 = (m+n)\,b_{01}$$
$$mx_2 + nx_1 = (m+n)\,a_{12} \qquad my_2 + ny_1 = (m+n)\,b_{12}$$
$$mx_3 + nx_2 = (m+n)\,a_{23} \qquad my_3 + ny_2 = (m+n)\,b_{23}$$

und hieraus: $$x_0 = \frac{m^3a_{30} - m^2na_{23} + mn^2a_{12} - n^3a_{01}}{(m^2+n^2)\,(m-n)}$$

$$y_0 = \frac{m^3b_{30} - m^2nb_{23} + mn^2b_{12} - n^3b_{01}}{(m^2+n^2)\,(m-n)}$$

Setzt man: $u = \frac{ma_{30} - na_{23}}{m-n}$, $v = \frac{mb_{30} - mb_{23}}{m-n}$ (1), $r = \frac{ma_{12} - na_{01}}{m-n}$,

$s = \frac{mb_{12} - nb_{01}}{m-n}$ (2), so ist $x_0 = \frac{m^2u + n^2r}{m^2+n^2}$, $y_0 = \frac{m^2v + n^2s}{m^2+n^2}$ (3)

Mit Hülfe von e) konstruiert man aus (1) den Punkt (u, v), aus (2) den Punkt (r, s), endlich aus (3) den Punkt P_0 etwa mit Benutzung von §. 114, b.

Zweiter Anhang.

Aufgaben aus der neueren Geometrie, namentlich über harmonische Teilung.

Vorbemerkungen. 1) Wenn im folgenden A, A', B, B' harmonische Punkte genannt werden, so soll A mit A' und B mit B' konjugiert sein. Dasselbe gilt für harmonische Strahlen.

2) Aufgaben, in denen harmonische Teilung zur Anwendung kommt, finden sich unter anderen noch in §. 64 und §. 64a.

a) 1. Zu P, P', P'' den vierten (P'' zugeordneten) harmonischen Punkt zu finden. 1. Anal. nach 114, 1. 2. Aufl. Man ziehe durch P'' eine beliebige Gerade, nehme auf derselben beliebig die Punkte A und C an. Es schneiden sich PA und P'C in B, PC und P'A in D, PP' und BD in Q, dem verlangten Punkte.

2. Gegeben L, L' L'', welche sich in O schneiden. Den vierten harmonischen (L'' zugeordneten) Strahl zu konstruieren. 1. Anal. auf 1) zurückzuführen, indem man das Strahlenbüschel durch eine

beliebige Gerade schneidet. 2. Anal. Man mache PP′ zur Diagonale eines vollständigen Vierseits, so daß eine der beiden anderen Diagonalen durch P″ geht. 3. Anal. Man schneide L, L′, L″ durch eine beliebige Gerade; dann ähnlich wie 1, 2. Anal.

3. Gegeben L, P, P′, P″. Auf L soll X so bestimmt werden, daß L, XP, XP′, XP″ harmonische Strahlen werden. Anal. Der Punkt ist zu beachten, in welchem sich XP und P′P″ schneiden.

4. Gegeben P, L, L′, L″. Durch P eine Gerade zu ziehen, welche durch P, L, L′, L″ harmonisch geteilt wird. Anal. Der Schnittpunkt auf L sei X, L′ und L″ schneiden sich in A. AX ist zu finden.

5. Gegeben L, L′ und P. Ohne den Schnittpunkt von L und L′ zu benutzen, eine Gerade durch P zu ziehen, die durch jenen Schnittpunkt geht. Anal. Man benutze ein beliebiges vollständiges Viereck, von welchem L und L′ zwei Gegenseiten und P ein Schnittpunkt der Diagonalen ist.

6. Gegeben P, P′, L. Ohne PP′ zu verbinden, auf L einen Punkt zu bestimmen, der mit P und P′ in gerader Linie liegt. Anal. Man benutze ein vollständiges Vierseit, von welchem P und P′ zwei Gegenecken sind und L eine Diagonale ist.

Im folgenden gelten die Bezeichnungen von §. 46a. Außerdem sei O_1 der Schnittpunkt von AB mit m′m″. Man beachte, daß C, O‴, m, m‴; P, O‴, F, F‴; C, O_1, m′, m″; P, O_1, F′, F″ harmonische Punkte sind.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben

7. C, F, L	13. C, F′, L	19. P, F, F′, F″
8. C, F‴, L	14. Z, F′, F″	20. A, P, F, F‴
9. Z, F, F‴	15. Z, F′, L	21. A, P, L, F
10. Z, F, L	16. P, F, F′, F‴	22. A, P, L, F‴
11. Z, F‴, L	17. P, L, F, F′	23. A, P, F′, F″
12. C, F′, F″	18. P, L, F′, F‴	24. A, P, L, F′

25. M, P, F. Anal. O‴ zu finden. Örter für die Mitte von CG sind der Halbkreis über MO‴ und die Mittelsenkrechte von PL.

Ähnlich wie 25 sind zu lösen.

26. M, P, F‴ 27. M, P, F′ 28. M, O‴, F 29. M, O_1, F′

30. p, q und die Entfernung der Höhenfußpunkte auf CA und CB. Anal. Die Verbindungslinie der Höhenfußpunkte treffe AB in Q. Q ist als vierter harmonischer Punkt zu finden. In dem Halbkreise über AB ist durch Q eine Sehne von bekannter Länge zu ziehen.

31. c, a:b, △ soll ein Maximum werden.

32. t_a, a:b △ soll ein Maximum werden.

Im rechtwinkligen Dreieck fallen M und L zusammen. L′ sei die Mitte von BC. Harmonische Punkte sind außer den bereits genannten M, P, O‴, O_1; A, O′, m, m′; C, O′, D, D′.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben

33. A, m, m′ 35. C, D, D′ 37. C, D′, L′
34. O′ m, m′ 36. C, D, L′

Im gleichschenkligen Dreiecke seien die Bezeichnungen dieselben wie in 7 bis 32; außerdem sei G′ die Mitte von $\overset{\frown}{BC}$; M, X, m, m‴ sind harmonische Punkte, da Am den Winkel MAX halbiert; außerdem ist noch zu beachten, daß $XZ = 2MZ$ ist. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben

38. M, m, Z 41. M, Z, m‴ 44. X, m, m‴
39. X, m, Z 42. X, Z, m‴ 45. B, C, O′
40. M, X, m 43. M, X, m‴
46. A, m, m′. Anal. O′ und G′ zu finden und dann zwei Örter für B.
47. m, m′, O′ 50. m, O′, G′ 52. A, m, O′
48. A, m, G′ 51. m′, O′, G′ 53. A, m′, O′
49. A, m′, G′

Im Trapez ABCD seien H, I, K resp. die Mitten von AB, DC, AD und G der Schnittpunkt von AD und BC. G, E, I, H sind harmonische Punkte. Gegeben ist eins der unter a), b), c) angeführten Punktsysteme und außerdem eins der Stücke I bis XI. Es entstehen auf diese Weise die Aufgaben 54 bis 86.

a) G, H, E b) H, E, I c) G, H, I

I. A.
II. K. Anal. K mit der Mitte von HI zu verbinden.
III. Die Mitte von AC.
IV. ∠ (af), ∠ (bf).
V. h, α.
VI. α, β (§. 19).
VII. b, d. Anal. Parallelen durch I zu den Schenkeln. §. 19.
VIII. e, f. Anal. Parallelen durch I zu den Diagonalen. §. 19.
IX. ∠ (ae), ∠ (af). (§. 19).
X. a + c, ε. Anal. wie VIII.
XI. h, ε. Anal. wie VIII.

87. A, D, G, E. Anal. Parallele durch E zu AB treffe AD in N. Dann ist N zu finden.

88. A, C, E, G. 1. Anal. Der Punkt zu finden, in welchem AC von einer durch G zu AB gezogenen Parallele getroffen wird. 2. Anal. Die Parallele zu GC durch den Mittelpunkt von AC ist ein Ort für H.

Im allgemeinen Viereck sei F der Schnittpunkt von AB und

DC, G der von AD und BC, E' der von AC und FG, E'' der von BD und FG. Ein Viereck zu konstruieren, wenn gegeben

89. A, E, F, G
90. A, B, D, E'
91. A, B, E', E''

92. E, E' E'' und die Mitte I von AB. 1. Anal. Eine Parallele durch E zu AB treffe E'E'' in K, EI treffe E'E'' in L. Dann ist E (ABIK) ein harmonisches Büschel, also E', E'', K, L harmonische Punkte. 2. Anal. Die Richtung von AB läßt sich nach §. 68, e finden.

b) Ein Kreis, welcher den Abstand zweier zugeordneten harmonischen Punkte zum Durchmesser hat, schneidet jeden durch die beiden anderen Punkte gelegten Kreis rechtwinklig. Die Aufgaben dieses Abschnittes sind dann mit Hülfe von §. 90 oder der Sätze von der Potenzlinie zu lösen.

93. Gegeben P, P', P'' in gerader Linie. PP' durch eine Strecke XX', deren Mittelpunkt P'' ist, harmonisch zu teilen. Anal. Halbkreis über XX' und Kreis durch PP'. Dann ist P''X gleich der von P'' an den anderen Kreis gezogenen Tangente.

94. Gegeben L, L', L'', die sich in einem Punkte O schneiden. Durch O zwei Strahlen zu legen, welche ∠ (LL') harmonisch teilen, und deren Winkel durch L'' halbiert wird. Anal. Man schneide das Büschel durch eine Gerade senkrecht zu L'', dann wie 93.

95. Gegeben P, P', P'', P''' auf einer Geraden. Ein Punktepaar XX' zu bestimmen, welches PP' und P''P''' harmonisch teilt. Anal. Legt man durch PP' und durch P''P''' beliebige sich schneidende Kreise, so schneidet der Halbkreis über XX' beide rechtwinklig. Die Mitte Y von XX' liegt daher auf der Potenzlinie und YX = YX' ist gleich der von Y an einen der Kreise gezogenen Tangente.

96. Gegeben L, L', L'', L''', die durch denselben Punkt O gehen. Durch O zwei Strahlen zu legen, die ∠ (LL') und ∠ (L''L''') harmonisch teilen. Anal. Auf 93 zurückzuführen, indem man sämtliche Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet. Zieht man diese Gerade parallel mit einer der gegebenen Geraden, so wird die Aufgabe auf 95 zurückgeführt.

97. Gegeben P,P'. Es soll PP' durch eine Strecke gleich a harmonisch geteilt werden. Anal. wie 93.

98. Gegeben L, L'. Es soll ∠ (LL') durch zwei Strahlen, die einen gegebenen Winkel α einschließen, harmonisch geteilt werden. Anal. Nimmt man A auf L' beliebig an und zieht durch A eine Parallele zu L, welche die gesuchten Strahlen in X und X' trifft, so ist XA = AX' und △ XX'O nach §. 19 zu konstruieren.

99. Gegeben P, P′, P″, P‴, P^{IV}. Durch P zwei Strahlen zu ziehen, welche P′P″ und P‴P^{IV} harmonisch teilen. Anal. Man verbinde P mit den übrigen Punkten und wende 96 an.

100. Gegeben L, L′, L″, L‴, L^{IV}. Auf L zwei Punkte zu bestimmen, welche zu ∠(L′L″) und zu ∠(L‴L^{IV}.) harmonisch liegen. Anal. Man beachte die Schnittpunkte von L mit den übrigen Geraden. 95.

Mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren, welcher

101. PP′ harmonisch teilt und durch P″ geht.

102. PP′ und P″P‴ harmonisch teilt.

103. Einen Kreis zu konstruieren, der PP′, P″P‴, $P^{IV}P^{V}$ harmonisch teilt

104. Gegeben L, L′, L″, L‴, welche sich in O schneiden, und P. Durch P eine Gerade zu ziehen, welche die Strahlen in X, X′, X″, X‴ so schneidet, daß XX′ = X″X‴. Anal. Y sei die Mitte von X′X″ und OY′ ∥ XX‴. Dann sind OY und OY′ nach 96 zu konstruieren.

105. Gegeben P, P′, P″, P‴ auf einer Geraden und L. Auf L soll X so bestimmt werden, daß ∠PXP′ = P″XP‴ wird. Anal. Die Halbierungslinien von ∠ P′XP″ und PXP‴ sind nach 96 zu konstruieren. Treffen sie PP‴ in Y und Y′, so ist der Halbkreis über YY′ ein Ort für X.

106. Gegeben P, P′, P″, P‴, P^{IV}, P^{V} in gerader Linie. X so zu bestimmen, daß ∠PXP′ = P″XP‴ = $P^{IV}XP^{V}$ ist. Anal. wie 105.

c) Bei den folgenden Aufgaben kommt 93, bei einigen 94, 95 oder 96 in Anwendung.

Ein Dreieck zu konstruieren (Bezeichnungen wie in 7 bis 29) aus

107. M, P, O‴ 109. A, P, O‴, L

108. M, P, O_1 110. A, P, O_1, L

Ein rechtwinkliges Dreieck (Bezeichnungen wie 33 bis 37) zu konstruieren aus

111. P, O‴, F 113. P, O‴, M 115. C, O‴, G

112. P, O‴, F‴ 114. A, O′, G′ 116. C, O_1, H

117. Gleichschenkliges △ aus M, m, m‴.

Ein gleichschenkliges Trapez (Antiparallelogramm) (Bezeichnungen wie in 54 bis 86) zu konstruierrn aus

118. G, E, A 119. G, E, K

Ein Viereck (Bezeichnungen wie in 89 bis 92) zu konstruieren aus

120. E, F, G, Mitte von AB. 124. E, F, G, α, ε

121. E, F, G, Mitte von AC. 125. E, F, G, b, ∠(bd)

122. E′, E″, E‴, e, α 125a. A, E′, E″, α, β

123. A, E, E″, f, γ 125b. A, E, E″, c, α

126. B, D und die Punkte, in denen AC von den Halbierungslinien von $\angle$ B und $\angle$ D getroffen wird.

127. Gegeben L, L′ und P auf der Halbierungslinie von $\angle$ (LL′). Durch P zwischen L und L′ eine Strecke XX′ von gegebener Länge a zu ziehen. Anal. L und L′ schneiden sich in O. Man konstruiere in $\triangle$ OXX′ den inneren Berührungskreis und den äußeren Berührungskreis an XX′. Sie berühren L in Y und Y′. Zieht man noch PA $\perp$ L, so ist OA bekannt, YY′ = XX′ = a und O, A, Y, Y′ harmonisch. 97. (§. 53, 4 und §. 139, 49.)

128. Dieselbe Aufgabe, nur soll P auf der Halbierungslinie des Nebenwinkels liegen. Anal. Man konstruiert die äußeren Berührungskreise an OX und OX′. (§. 139, 50.)

129. Gegeben Viereck ABCD. Die Winkel A und C harmonisch so zu teilen, daß die Teilungsstrahlen ein Parallelogramm bilden. Anal. Zieht man durch A Parallelen zu den Schenkeln von C, so ist 96 anzuwenden.

130. Gegeben Viereck ABCD. AB und CD harmonisch so zu teilen, daß die Teilpunkte ein gleichschenkliges Trapez bilden. 1. Anal. Der Kreis um das Trapez schneidet die Kreise über den Durchmessern AB und DC rechtwinklig und sein Mittelpunkt liegt auf der Halbierungslinie von $\angle$ (AB, DC). 2. Anal. Man projiziere die Ecken des Vierecks und des Trapezes auf die Halbierungslinie von $\angle$ (AB, CD); dann Aufg. 95.

d) Die Sätze über Pol und Polare sind zu benutzen.

131. Gegeben P, K, L. Von P nach L eine Gerade zu ziehen, die durch K harmonisch geteilt wird. Anal. Schnittpunkt von L mit der Polare.

132. Gegeben K, K′ und P auf K. Durch P in K eine Sehne zu ziehen, welche von K′ harmonisch geteilt wird.

Einen Kreis zu konstruieren, wenn ein Pol P, dessen Polare L und

133. ein Peripheriepunkt P′ gegeben ist. 1. Anal. PA $\perp$ L, dann b) anzuwenden. 2. Anal. Der zweite Schnittpunkt P″ der Sekante PP′ und des Kreises läßt sich finden, weil P′P″ durch Pol und Polare harmonisch geteilt wird.

134. der Radius gegeben ist. Anal. wie 133.

135. Gegeben P, P′ und K. Durch P′ eine Sehne XY so zu ziehen, daß PX:PY = P′X:P′Y. Anal. PZ $\perp$ PP′ treffe die Sehne in Z, dann ist Z ein Punkt der Polare von P′.

136. Gegeben P, P′, P″. Einen Kreis so zu konstruieren, daß das von den Polaren gebildete Dreieck einem gegebenen kongruent ist. Anal. $\angle$ PMP′ u. s. w. bekannt, dadurch M bestimmt. Schlägt man um M einen beliebigen Kreis und konstruiert in bezug auf diesen die Polaren, so ist das entstandene Dreieck mit dem gesuchten in Ähnlichkeitslage und M der Ähnlichkeitspunkt.

137. Gegeben Viereck ABCD. Mit gebenem Radius einen

Kreis so zu konstruieren, daß das Viereck, welches die Polaren von A, B, C, D bilden, ein Parallelogramm ist. Anal. Da die Polaren von A und C parallel werden sollen, muß der Mittelpunkt auf AC liegen, ebenso auf BD, also Diagonalenschnittpunkt sein.

138. Einen Kreis zu konstruieren, wenn ein zugehöriges Tripel (Dreieck, dessen Seiten Polaren der Ecken sind, oder ein System von drei Punkten, welche die Eigenschaft haben, daß jeder Punkt der Pol zu der Verbindungslinie der beiden anderen ist) gegeben ist. 1. Anal. Er teilt die Höhen harmonisch. 103. 2. Anal. Der Mittelpunkt ist der Höhendurchschnittspunkt, dann 93.

Im Sehnenviereck sei M der Mittelpunkt, die übrigen Bezeichnungen wie 89 bis 92. Es ist zu beachten, daß im △ EFG jede Seite Polare der Gegenecke ist; ist also dieses Dreieck bekannt, so kann man den Kreis M konstruieren (138). Da M im △ EFG der Höhenschnittpunkt ist, so ist, wenn von den Punkten E, F, G, M drei gegeben sind, der vierte leicht zu konstruieren. Zur Konstruktion eines Sehnenvierecks sei eins der unter a) bis d) angeführten Punktsysteme und außerdem eins der Stücke I bis VI gegeben. Es entstehen auf diese Weise 24 Aufgaben 139 bis 162.

a) E, F, G b) F, G, M c) E, F, M

d) E, M, Mitte von FG. 1. Anal. Der Kreis um △ EFG ist zu finden. 2. Anal. Der Feuerbach'sche Kreis von △ EFG ist zu finden.

I. a III. α V. ε (98)

II. e IV. ∠ (ae) VI. ∠ (bd) (98)

163. E, E′, E″, r. Anal. EK ⊥ E′E″. Kreis M nach 97 zu konstruieren.

164. M, E′, E″, r. Anal. E als 4. harmonischer Punkt zu finden.

165. F, G, E, E′. Anal. E″ zu finden, dann wie 164.

166. E, E′, E″, F. Anal. G zu finden.

167. F, G, A, D. Anal. FE als vierter harmonischer Strahl zu finden. GM schneidet FE senkrecht.

168. E, G, A, D. Anal. wie 167.

169. A, E, C, F. Anal. Strahl FG zu finden. EI ⊥ FG ist ein Ort für M.

170. G, r und die Lage von AF und DF. Anal. FE als vierter harmonischer Strahl zu konstruieren. Schneiden sich FE und GM in K, so ist da der Kreis GK harmonisch teilt, 97 anzuwenden.

171. E, r, die Lage von AF und DF. Anal. wie 170.

172. G, r die Lage von AC und BD. Anal. wie 170.

e) Zwei Gerade nennt man konjugiert in bezug auf einen Kreis, wenn der Pol der einen auf der anderen liegt. Sollen die Diagonalen

eines Sehnenvierecks konjugiert sein, so ist E′ der Pol von BD, E″ der von AC, und △ EE′E″ hat auch die Eigenschaft, daß jede Seite Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Es ist daher M auch für dieses Dreieck Durchschnittspunkt der Höhen.

Ein Sehnenviereck, dessen Diagonalen konjugiert sind, zu konstruieren, wenn gegeben ist

173. E, F, G 176. E, M, Mitte von FG 179. E, E′, M
174. F, G, M 177. E, E′, E″
175. E, F, M 178. E′, E″, M

f) Im folgenden ist der Satz anzuwenden: Schneiden sich zwei konjugierte Gerade L und L′ außerhalb des Kreises in O, so bilden sie mit den von O an den Kreis (Mittelpunkt M) gelegten Tangenten OA und OB ein harmonisches Büschel. Beweis. MC ⊥ L schneide L′ in D, MC′ ⊥ L′ schneide L in D′. Dann ist D der Pol von L, D′ der von L′, daher DD′ die Polare von O, geht also durch AB, u. s. w.

180. Einen Kreis zu konstruieren, wenn ein Pol P, dessen Polare L und eine Tangente L′ gegeben ist.

181. Gegeben K, K′ und L, welche K berührt. Auf L einen Punkt X zu bestimmen, so daß der Winkel der von X an K gezogenen Tangenten von den an K′ gezogenen Tangenten halbiert wird. Anal. Die zweite Tangente geht durch den Pol von L in bezug auf K′.

g) In einem Tangentenviereck seien die Bezeichnungen wie für das allgemeine Viereck (89 bis 92). Außerdem sei M der Mittelpunkt des Kreises, H, I, K, L bezüglich die Berührungspunkte auf AB, BC, CD, DA. N sei die Mitte von AC. Harmonische Strahlen sind E (ABHI), harmonische Punkte A, C, E, E′; B, D, E, E″; F, G, E′, E″. Vielfach kann man zunächst Viereck HIKL konstruieren (139 bis 172). Auch der Satz in e) läßt sich mehrfach anwenden.

Gegeben ist die Entfernung zweier Berührungspunkte (HI) und
182. E, E′ E″ 183. E, E′, M 184. M, E′, E″.

Gegeben ist:

185. A, E, E′, E″ 190. E′, E″, F, M 195. A, C, E′, E″
186. A, E, E′, M 191. N, E, E′, E″ 196. A, C, E, M
187. A, E′, E″, M 192. N, E, E′, M 197. E, F, G, E′
188. E, E′, E″, F 193. N, E′, E″, M 198. F, G, E′, M
189. E, E′, F, M 194. A, C, E, E″

199. A, B, C, E. 1. Anal. AD — CD bekannt und BE als Ort für D. (§. 66, a). 2. Anal. E′ zu finden, dann zwei Örter

für M, die Senkrechte von E′ auf EE″ und die Halbierungslinie von ∠ ABC.

Ähnlich wie 199 zu behandeln sind:

200. A, C, E, F 202. A, E, E′, F 204. E, E′, F, N
201. A, B, E, E′ 203. B, N, E, E′

205. A, C, E, H. Anal. E′ zu finden, HE′ ein Ort für I. Dadurch wird ∠ CIE′ = BHI bekannt.

206. A, H, E, E′. Wie 205. 207. E, E′, H, N. Wie 205.

208. A, B, E, H. Anal. Strahl EI bestimmt, dann I, da BI = BH, dadurch C, dann E′.

209. E, F, G, r. Anal. Der Kreis M ist nach 134 zu konstruieren.

210. L, H, E, ε. Anal. 98 anzuwenden. Ein zweiter Ort für A ist die Mittelsenkrechte von LH.

211. A,E,E″, f (97) 212. A, E, E″ α (98).

213. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem ein Winkel α und die Entfernungen des Diagonalenschnittpunktes von den Seiten gegeben sind. Anal. EF ⊥ AB, EG ⊥ BC, EH ⊥ CD, EI ⊥ DA. Schlägt man um E einen beliebigen Kreis und sind in bezug auf denselben F′, G′, H′, I′ bezüglich die Pole von AB, BC, CD, DE, so ist F′G′H′I′ ein Parallelogramm (137). Zunächst findet man leicht A, E, F, I, F′ I′. Ferner sind EG′ und EH′ bekannt, da EG · EG′ = r². Zieht man nun F′K ∥ G′E und I′K ∥ H′E, so ist △ F′I′K aus seinen drei Seiten zu konstruieren.

214. Das Apollonische Berührungsproblem. Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise K, K′, K″ berührt. (§. 100, 10). Anal. nach Steiner. Wir beschränken uns auf die beiden Kreise M und M′, welche die drei gegebenen gleichartig berühren. M berühre sie von außen bezüglich in C, D, E und M′ berühre sie einschließend in C′, D′, E′. M und M′ werden von K ungleichartig berührt, ebenso von K′, daher liegt der innere Ähnlichkeitspunkt P von M und M′ auf der Potenzlinie von K und K′. Aus demselben Grunde liegt P auch auf der Potenzlinie von K′ und K″ und auf der von K″ und K′, d. h. P ist das Potenzcentrum von K, K′, K″. Da P innerer Ähnlichkeitspunkt zu M und M′ ist, müssen PCC′, PDD′, PEE′ gerade Linien sein. M berührt K und K′ gleichartig, dasselbe thut M′, daher liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt von K und K′ auf der Potenzlinie von M und M′. Führt man dieselben Schlüsse für je zwei andere der gegebenen Kreise aus, so ergiebt sich, daß die Potenzlinie von M und M′ die äußere

Ähnlichkeitsachse AA′ von K, K′, K″ ist. Die in C und C′ an K gezogenen Tangenten mögen sich in F schneiden. Da FC und FC′ auch Tangenten an M und M′ und überdies gleich sind, so ist F ein Punkt der Potenzlinie von M und M′, liegt also auf AA′. Nun ist CC′ die Polare von F in bezug auf K; es muß also der Pol von AA′ in bezug auf K auf CC′ liegen. Man findet so zwei Punkte der Geraden CC′.

215. Castillon'sches Problem. Gegeben K, P, P′, P″. In K ein Dreieck ABC zu zeichnen, dessen Seiten bezüglich durch P, P′, P″ gehen. (§. 125, 6). Anal. In den Kreis K seien die Dreiecke ABC und A′B′C′ beschrieben, und es schneiden sich AB und A′B′ in P, BC und B′C′ in P′, CA und C′A′ in P″. Es ist ABCA′B′C′ ein Sehnensechseck, daher liegen nach dem Pascal'schen Satze die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden. Schneiden sich AC′ und CA′ in Q″, so liegen demnach P, P′, Q″ auf einer Geraden. Außerdem liegt Q″ auf der Polare von P″, ist also bestimmt. Der Schnittpunkt O″ von CC′ und AA′ ist Pol von P″Q″. Ebenso kann man den Schnittpunkt von AA′ und BB′ sowie den von BB′ und CC′ konstruieren.

216. Gegeben K, L, L′, L″. Um K ein Dreieck ABC zu zeichnen, dessen Ecken bezüglich auf L, L′, L″ liegen. Anal. Die Berührungspunkte von BC, CA, AB mit K seien bezüglich D, E, F; P, P′, P″ seien die Pole bezüglich von L, L′, L″. Da ED Polare von C ist, so muß sie durch P″ gehen, ebenso muß DF durch P′ und FE durch P gehen. Dreieck DEF ist also nach 215 zu konstruieren.

Dreiecks-Aufgaben, in denen besonders die Aufgaben 93, 97, 127, 128 dieses Anhanges zur Anwendung kommen. Fig. 4.

217. a + b, h_o, γ (§. 53, 7). Anal. Zunächst ist △ CSG bestimmt, also auch SG = ½ ($\rho_o + \rho$). Werden C, m und m‴ auf HG als C′, N und N‴ projiziert, so wird N‴N = $\rho_o + \rho$ durch LC′ = h_o harmonisch geteilt. Trägt man nun SX = ½NL auf SG nnd SY = ½NC′ auf der Verlängerung von SG ab, so wird SG durch XY = ½h_o harmonisch geteilt. (II, 97).

218. a − b, h_o, γ. Anal. Zunächst ist △ CWH bestimmt, also auch HW. Die Projektionen von m′, m″ und C auf HG seien resp. N′, N″, C′; dann wird N′N″ = $\rho_a - \rho_b$ durch C′L = h_o harmonisch geteilt. Trägt man WY = ½N″C′ auf WH und WX = ½N″L auf der Verlängerung von WH ab, so wird HW durch XY = ½h_o harmonisch geteilt (II, 97).

Die Aufgaben 219 bis 224 sind ähnlich wie die vorhergehenden zu lösen.

219. a + b, h_o, α − β (△ AHW zuerst bestimmt)

220. a − b, h_o, α − β (△ ASG zuerst bestimmt)

221. a+b, h_c, $\rho_c+\rho$ (§. 64, 60) 223. a+b, h_c, $\rho_a-\rho_b$ (§. 64, 56)
222. a−b, h_c, $\rho_c+\rho$ (§. 64, 61) 224. a−b, h_c, $\rho_a-\rho_b$ (§. 64, 57)

In den Aufgaben 225 bis 251 ist C'L durch eine gegebene Strecke nach II, 97 harmonisch zu teilen. Außer h_c und $\rho_c+\rho$ ist noch gegeben

225. α	229. a	233. r	236. $\rho_a-\rho_b$
226. γ (§. 64, 62)	230. h_a	234. ρ_a	237. p−q
227. α−β (§. 64, 63)	231. t_c	235. $\rho_a+\rho_b$	238. u−v
228. c	232. w_c		

Außer h_c und $\rho_a-\rho_b$ ist noch gegeben

239. α	242. c	245. t_c	248. p−q
240. γ (§. 64, 58)	243. a	246. w_c	249. u−v
241. α−β (§. 64, 59)	244. h_a	247. r	250. $\rho_c-\rho$

In den Aufgaben 251 bis 262 ist außer h_c entweder $\rho_c-\rho$ oder $\rho_a+\rho_b$ gegeben. Im ersteren Fall kennt man auf HG die Punkte L, C' und G; daher ist LC' durch die Strecke NN''' nach II, 93 harmonisch so zu teilen, daß G ihr Mittelpunkt wird. Im zweiten Fall kennt man auf HG die Punkte L, C' und H; daher ist LC' nach II, 93 durch die Strecke N'N'' harmonisch so zu teilen, daß H ihr Mittelpunkt wird.

Außer h_c und $\rho_c-\rho$ ist noch gegeben

251. a (§. 66, 90)	253. h_a	255. a+b
252. β (§. 66, 91)	254. t_c	256. a−b

Außer h_c und $\rho_a+\rho_b$ ist noch gegeben

257. a (§. 66, 92)	259. h_a	261. a+b
258. β (§. 66, 93)	260. t_c	262. a−b

263. ρ, w_c, α. Anal. Die Halbierungslinie des Winkels α ist bestimmt und auf ihr m; daher ist △ CAO nach II, 127 zu konstruieren.

264. ρ_c, w_c, α, Anal. Die Halbierungslinie des Nebenwinkels von α ist bestimmt und auf ihr m'''. Daher ist △ CAO nach II, 128 zu konstruieren.

Dritter Anhang.

Geometrische Örter.

Im Folgenden soll D. g. O. f. a. P. heißen: Der geometrische Ort für alle Punkte.

D. g. O. f. d. M. a. K. soll heißen: Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise.

D. g. O. f. d. Sp. a. Dr. soll heißen: Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke.

1. D. g. O. f. a. P., welche von P den Abstand a haben, ist ein Kreis mit a um P.

2. D. g. O. f. a. P., welche von P und P' gleichen Abstand haben, ist ein Lot in der Mitte von PP'.

3. D. g. O. f. a. P., welche von L um a entfernt sind, sind zwei Parallelen im Abstande a zu L.

4. D. g. O. f. a. P., welche von den Parallelen L und L' gleiche Entfernung haben, ist eine Parallele in der Mitte zwischen L und L'.

5. D. g. O. f. a. P., welche von den sich schneidenden L und L' gleiche Entfernung haben, sind die Halbierungslinien von $\angle$ (LL').

6. D. g. O. f. d. M. a. K., welche L in P berühren, ist ein Lot auf L in P.

7. D. g. O. f. d. M. a. K., welche K in P berühren, ist KP.

8. D. g. O. f. d. Scheitelpunkte der rechten Winkel aller rechtwinkligen Dreiecke, welche eine gegebene Hypotenuse haben, ist der über der Hypotenuse als Durchmesser geschlagene Kreis. §. 10.

9. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben, ist ein Kreis. §. 11.

10. D. g. O. f. d. Halbierungspunkte aller Sehnen = a in K ist ein Kreis um K mit dem Lot von K auf a.

11. D. g. O. f. d. Halbierungspunkte aller Sehnen in K, welche durch P gehen, ist ein Kreis über KP als Durchmesser.

12. D. g. O. f. d. Endpunkte aller Tangenten = a an K ist ein Kreis um K mit dem Abstande des Endpunktes der Tangente von K.

13. D. g. O. f. d. Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare an K, welche $\angle \alpha$ bilden, ist ein Kreis um K mit dem Abstande des Durchschnittspunktes der Tangenten von K.

14. D. g. O. f. a. P., deren Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei Parallelen L und L' = a, sind Parallelen in der Entfernung $\frac{1}{2}(h-a)$, resp. $\frac{1}{2}(a-h)$, wenn h der Abstand von L und L' ist.

15. D. g. O. f. a. P., deren Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei sich schneidenden L und L' = a, sind vier Gerade. §. 69, c, Lehrsatz 1 und 2.

16. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., welche gegebenen Inhalt und gegebene Grundseite haben, ist eine Parallele durch die Spitze zur Grundlinie. §. 104.

17. D. g. O. f. d. M. der vier Berührungskreise derjenigen Dreiecke, von denen eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gegeben, sind zwei Kreise. §. 40, 3. 4. 5.

18. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und die Differenz der Quadrate der Seiten gegeben, ist eine Gerade. §. 47.

19. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und die Summe der Quadrate der Seiten gegeben, ist ein Kreis. §. 48.

Anmerkung. An Stelle der Endpunkte der Grundlinie können in 18 und 19 auch Kreise treten.

20. D. g. O. f. d. M. a. K., welche durch P gehen und K rechtwinklig schneiden, ist eine Gerade. §. 90, a.

21. D. g. O. f. d. M. a. K., welche durch P gehen und K unter dem Durchmesser schneiden, ist eine Gerade. §. 90, b.

22. D. g. O. f. d. M. a. K., welche durch P gehen und von K unter dem Durchmesser geschnitten werden, ist ein Kreis. §. 90, c.

Anmerkung. An Stelle von P können in 20, 21, 22 auch Kreise treten und dann können immer je zwei der Bedingungen von 20, 21, 22 kombiniert werden.

23. D. g. O. f. a. P., in denen die Linien von P nach L = m:n geteilt werden, ist ein Parallele zu L durch den Punkt, in welchem eine beliebige Linie von P nach L = m : n geteilt wird.

24. D. g. O. f. a. P., in welchen die Linien zwischen den Parallelen L und L′ = m:n geteilt werden, ist eine Parallele durch den Punkt, in welchem eine beliebige Linie zwischen L und L′ = m:n geteilt wird.

25. D. g. O. f. a. P., in denen die zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels in paralleler Richtung gezogenen Linien = m:n geteilt werden, ist eine Gerade vom Scheitelpunkt des Winkels durch den Punkt, in welchem irgend eine der Parallelen = m:n geteilt wird.

26. D. g. O. f. a. P., deren Entfernungen von L und L′ = m:n, ist eine Gerade vom Durchschnittspunkt durch den Punkt, der von L und L′ resp. die Abstände m und n hat.

27. D. g. O. f. a. P. B, in denen die von P nach der Peripherie von K gezogenen Linien PA, PA′ u. s. w. = m:n geteilt werden, ist ein Kreis, den man erhält, wenn man PK in M so teilt, daß PM:MK = m:n, PA beliebig nach der Peripherie von K zieht, MB ∥ KA bis zum Durchschnitt mit PA, und mit MB um M einen Kreis schlägt. Bew. folgt aus §. 100, Lehrsatz 2.

28. D. g. O. f. a. P. B, in denen die von P nach L gezogenen Linien PA, PA′ u. s. w. so geteilt werden, daß PA · PB = PA′ · PB′ = m^2, ist ein Kreis, den man erhält, wenn man PA ⊥ L in B so teilt, daß PA · PB = m^2, und über PB als Durchmesser einen Kreis beschreibt.

29. D. g. O. f. a. P. B, in denen die von P auf der Peripherie von K gezogenen Sehnen PA PA′ u. f. w. so geteilt werden, daß $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = m^2$, ist eine Senkrechte zu PK und zwar durch den Punkt B des Durchmessers PKA, in welchem dieser so geteilt ist, daß $PA \cdot PB = m^2$.

30. D. g. O. f. a. P. B, in denen die von P auf der Peripherie von K ausgehenden Sehnen PA, PA′ u. f. w. so geteilt werden, daß $PB \cdot BA = PB' \cdot B'A' = m^2$, ist ein Kreis um K mit dem Abstande der Sehne 2m von K.

31. D. g. O. f. a. P. B, in denen die von P nach der Peripherie von K gezogenen Geraden PA, PA′ u. f. w. so geteilt werden, daß $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = q^2$, ist ein Kreis, welcher mit K gemeinschaftlich P zum Ähnlichkeitspunkt hat. Bew. folgt aus §. 100, Lehrsatz 2.

32. D. g. O. f. d. dritte Ecke B eines Dreiecks $\sim \alpha\beta\gamma$, dessen γ entsprechende Ecke in den gegebenen Punkt P fällt, und dessen α entsprechende Ecke auf L liegt, ist eine Gerade, die man so erhält: Konstruiere $\triangle PA'B' \sim \gamma\alpha\beta$, so daß A′ und B′ auf L liegen, lege an PB′ in B′ nach der vom Dreieck abgewandten Seite $\angle \alpha$ an, so ist der freie Schenkel desselben die gesuchte Gerade. Bew. Zieht man durch P zwei Linien unter $\angle \gamma$, deren eine L in A, die andere den gefundenen Ort in B trifft, so ist PBAB′ ein Sehnenviereck; also $\triangle PAB \sim PA'B'$ aus Gleichheit der Winkel.

33. D. g. O. f. d. dritte Ecke B eines Dreiecks $\sim \alpha\beta\gamma$, dessen γ entsprechende Ecke in den gegebenen Punkt P fällt, und dessen α entsprechende Ecke auf K liegt, ist ein Kreis M, den man so erhält: PK treffe den Kreis in A′ und E; konstruiere über PK $\triangle PKM \sim \gamma\alpha\beta$, ziehe $A'B' \parallel KM$ bis zum Durchschnitt mit PM, mit MB′ um M einen Kreis, welcher der gesuchte Ort ist. Bew. Zieht man durch P zwei Linien unter $\angle \gamma$, deren eine K in A und C, die andere M in B und D trifft, so daß die Punkte A und B sowie C und D einander entsprechen; dann ist $PK:PM = KA':MB' = KA:MB$, also $\triangle PKA \sim PMB$; und $PA:PB = PK:PM$, also $\triangle PAB \sim PKM \sim \gamma\alpha\beta$.

34. D. g. O. f. d. dritte Ecke B eines Dreiecks PAB, von welchem $\angle APB = \gamma$ und $PA \cdot PB = p \cdot q$; von dem ferner eine Ecke in P, die zweite A auf L liegen soll, ist ein Kreis, den man so erhält: Fälle $PA' \perp L$, trage $\angle \gamma$ an PA′ in P an $= A'PB'$, so daß $PA' \cdot PB' = p \cdot q$; beschreibe über PB′ als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte Ort. Bew. Zieht man PA beliebig nach L, legt an PA in P $\angle APB$ (B auf der Peripherie) gleich

und in gleicher Lage mit A'PB'; dann ist $\triangle PBB' \sim PA'A$, also $PA.PB = PA' \cdot PB' = p \cdot q$.

35. D. g. O. f. d. dritte Ecke B eines Dreiecks PAB, von welchem $\angle APB = \gamma$ und $PA \cdot PB = p \cdot q$; von dem ferner zwei Ecken P und A auf der Peripherie von K liegen sollen, P außerdem in einem gegebenen Punkte, ist eine Gerade, die man so erhält: Ziehe den Durchmesser PA', trage $\angle \gamma$ an PA' in P an = A'PB', so daß $PA' \cdot PB' = p \cdot q$, errichte auf PB' in B' eine Senkrechte, so ist diese der gesuchte Ort. Bew. wie in 34.

36. D. g. O. f. d. dritte Ecke eines Dreiecks, von dem eine Ecke in P (P nicht auf K), die zweite auf K liegen soll, von welchem ferner der Winkel bei $P = \gamma$ und das Produkt der einschließenden Seiten $= p \cdot q$, ist ein Kreis, den man so erhält: (Figur und Bezeichnungen wie in 33). Ziehe PA'KE, trage $\angle \gamma$ an PK in P an = KPB', so daß $PE \cdot PB' = p \cdot q$, $KM \parallel A'B'$ bis zum Durchschnitt mit PB', mit MB' um M ein Kreis, welcher der gesuchte Ort ist. Bew. Wie in 33 folgt, daß $PA:PB = PK:PM = PA':PB'$; daher $\triangle PBB' \sim PAA' \sim PEC \sim PFD$; also $PA \cdot PD = PC \cdot PB = PE \cdot PB' = p \cdot q$.

37. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und das Verhältnis einer anderen Seite zu ihrer Höhe gegeben, ist ein Kreis. §. 55, b.

38. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und das Verhältnis der Seiten gegeben, ist ein Kreis. §. 59.

39. D. g. O. f. d. Sp. a. Dr., von denen die Grundlinie und das Verhältnis der Quadrate der Seiten gegeben, ist ein Kreis. Durch §. 114, b auf 38.

40. D. g. O. f. d. P., für welche die nach P gezogenen Linien und an K gelegten Tangenten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis. §. 96, Anmerk.

41. D. g. O. f. d. P., für welche die an K und K' gelegten Tangenten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis. §. 96.

42. D. g. O. f. a. P., von denen die Tangenten an zwei gegebene Kreise gleich sind, ist eine Gerade (Chordale, Potenzlinie). Schneiden sich die Kreise, so ist sie zugleich die gemeinschaftliche Sekante; schneiden sich die Kreise nicht, so ist ein Kreis zu konstruieren, welcher beide schneidet, und von dem Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sekanten ist auf die Centrale der gegebenen Kreise ein Lot zu fällen.

43. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte sämtlicher Doppelsehnen von K und K' (d. h. sämtlicher Strecken, welche durch einen Schnittpunkt von K und K' so gezogen sind, daß der eine Endpunkt

auf K, der andere auf K' liegt, gleichviel ob sie auf denselben oder auf verschiedenen Seiten des Schnittpunktes liegen) ist ein Kreis, der durch die Schnittpunkte beider Kreise geht, und dessen Mittelpunkt die Mitte der Centrale ist. Bew. K und K' schneiden sich in C und D. Zieht man durch C die Doppelsehne AA' (A auf K, A' auf K'), deren Mitte E sei, ferner die Durchmesser CB und CB', so ist $BA \perp AA'$ und $B'A' \perp AA'$, BDB' eine Gerade und parallel KK'. Ist F der Mittelpunkt von BB', so liegt E auf einem Kreise über CF als Durchmesser. Dieser Kreis geht auch durch D. Sein Mittelpunkt M ist die Mitte von KK', da $KM : MK' = BF : FB'$.

Die zwölf Örter für den Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius gegeben, finden sich in §. 87.

Vierter Anhang.

§. 7a.

Einfache Aufgaben über das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez.

Zu beachten ist, daß $AD=BC=b$, $AC=BD=e$, $\angle DAB = CBA = \alpha$. $\angle(be)$ sei $\angle ACB$.

1. a, b, h	8. b, h, $\angle(ae)$	15. a, α, $\angle(ae)$
2. a, e, h	9. b, h, $\angle(be)$	16. b, e, α
3. a, h, α	10. a, b, e	17. b, e, $\angle(ae)$
4. a, h, $\angle(ae)$	11. a, b, α	18. b, e, $\angle(be)$
5. b, e, h	12. a, e, α	19. b, α, $\angle(ae)$
6. e, h, α	13. a, b, $\angle(ae)$	20. e, α, $\angle(ae)$
7. h, α, $\angle(ae)$	14. a, e, $\angle(ae)$	

Zu §. 8b.

Ist das Trapez gleichschenklig, so ist in einigen Aufgaben zu beachten, daß $\triangle FBC$ gleichschenklig ist, also FB durch die Senkrechte von C halbiert wird.

50. a, b, c	52. a, c, α	54. a, c, $\angle(ae)$
51. a, c, h	53. e, h, $\angle(be)$	

Zu §. 8c.

Ist das Trapez gleichschenklig, so ist in einigen Aufgaben zu beachten, daß $\triangle ACF$ gleichschenklig ist, also AF durch die Senkrechte von C halbiert wird.

55. a, c, e
56. a, e, ε
57. e, ε, ∠(be)
58. e, α, ε
59. h, α, ε
60. b, α, ε
61. a, α, ε
62. b, e, ε
63. a, c, ε

Zu §. 12b.

Ein Antiparallelogramm zu konstruieren aus
43. a, c, ∠(be)

Zu §. 18.

15. b, ν, β. Anal. Im △ ADC ist ∠ ADC − ACD = β. Also §. 14.

Zu §. 25.

b) Trägt man AC auf AB von A aus ab bis H und BC auf BA von B aus bis L, so ist LH = a + b − c, ∠ CHL = R − ½α, ∠ CLH = R − ½β, ∠ LCH = R − ½γ. Die Differenz der Höhenabschnitte im △ LHC ist (p − q) − (a − b.)
3. a+b − c, h_c, γ (§. 42, 18)

Zu §. 29.

a) 7. a + b − c, h_c, α − β, Anal. nach §. 25, b).
b) 8. (p − q) − (a − b), h_c, γ. Anal. nach §. 25, b).

Zu §. 35c.

183. a, β, γ, ε. 1. Anal. ∠ ABD = ACD = δ′ = ½(β+γ−ε). 2. Anal. Kreis um ABE treffe AD in F und BC in G; dann ist $\overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{GE}$.

Zu §. 44.

31. a+b, $\rho_c+\rho$, t_c. Anal. ähnlich wie §. 19, 17, 2. Anal.

Zu §. 45.

45. a−b, $\rho_a-\rho_b$, t_c. Anal. ähnlich wie §. 19, 18, 2. Anal.

Zu §. 46.

101. r, ρ, γ
102. r, ρ_c, γ
103. r, ρ_c, γ
104. h_c, w_c, ρ_a
105. h_c, w_c, $\rho_a+\rho_b$
106. h_c, p−q, $\rho_c-\rho$
107. h_c, p−q, $\rho_a+\rho_b$

In den Aufgaben 108 und 109 ist zu beachten, daß BC gemeinschaftliche Tangente ist an Kreise um L mit ½h_a und um G oder H.
108. ρ, ρ_c, h_a (§. 64, 64)
109. ρ_c, ρ_b, h_a (§. 64, 65).

§. 48a.

1. $a^2+b^2+c^2 = q^2$, r, t_c. Anal. Es ist $b^2+c^2 = \frac{1}{2}a^2+2t_a^2$ 2c., mithin $q^2 = \frac{4}{3}(t_a^2+t_b^2+t_c^2)$ (1). Der Mittelpunkt des Umkreises werde mit M, der Schwerpunkt mit S, der Mittelpunkt von AB mit D bezeichnet, und es sei ME ⊥ CD. Dann ist $MC^2 = MS^2+CS^2 + 2CS\cdot SE$ und $MD^2 = MS^2+SD^2-2SD\cdot SE$, also r^2+2MD^2

$= 3MS^2 + 6SD^2$ oder $r^2 + 2r^2 - 2AD^2 = 3MS^2 + 6SD^2$. Da nun $AS^2 + BS^2 = 2AD^2 + 2SD^2$, so ist $3r^2 = 3MS^2 + AS^2 + BS^2 + 4SD^2$ $= 3MS^2 + {}^4/_9 (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$. Daher unter Berücksichtigung von (1): $3r^2 = 3MS^2 + {}^1/_3 q^2$, also $MS^2 = r^2 - {}^1/_9 q^2$. Also ist $\triangle$ SMC bestimmt, daher auch D.

Zu §. 60.

Für die Aufgaben 18 bis 32 ist §. 8, b) und c) zu beachten.

Ein Trapez zu konstruieren aus a, c, b:d und

18. h 19. e 20. ε 21. $\angle$(ae) 22. $\angle$(bf)

Ein Trapez zu konstruieren aus a, c, e:f und

23. h 24. b 25. $\alpha + \beta$ 26. α 27. $\angle$(bf). 28. b:d

Ein Trapez zu konstruieren aus

29. a — c, h, e, b:d
30. a — c, h, $\angle$(ae), b:d
31. a + c, h, b, e:f
32. a + c, h, α, e:f

Für die Aufgaben 33 bis 36 ist § 12, d) zu beachten; außerdem für 35 und 36, daß die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der nicht parallelen Seiten eines Trapezes mit dem Diagonalenschnittpunkt die parallelen Seiten halbiert.

Ein Trapez zu konstruieren aus

33. drei Stücken, welche $\triangle$ BFC bestimmen und e:f
34. drei Stücken, welche $\triangle$ ACG bestimmen und b:d
35. a, $\angle$(ae), $\angle$(af), b:d
36. a, α, β, e:f.
37. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Stücken, welche $\triangle$ ABC bestimmen und ε, c:d.

Für die Aufgaben 38 bis 48 ist §. 23, a) zu beachten.

Ein Viereck zu konstruieren aus

38. e, f, ε, a:b, c
39. e, f, ε, a:b, $\angle$(df)
40. e, f, ε, a:b, $\alpha + \beta$
41. e, f, ε, a:b, c:d
42. e, f, ε, a:c, b
43. e, f, ε, a:c, $\beta + \gamma$
44. e, f, ε, a:c, $\angle$(ae)
45. e, f, ε, a:c, b:d
46. e, f, ε, a:b:c
47. a, c, β, γ, e:f
48. a, b, c, $\beta + \gamma$, e:f.

Zu §. 64.

In den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß, wenn C, O, m, m', m'', m''' auf den Durchmesser HG als C', L, N, N', N'', N''' projiziert werden, dann C', L, N, N''' und L, C', N'', N' harmonische Punkte sind und daß ferner G der Mittelpunkt von NN''', H der von N' N'' ist. — Für die Aufgaben 66 bis 68 ist die Bemerkung zu §. 46, 108 und 109 (S. 204) zu beachten.

64. h_c, ρ, ρ_a (§. 46, 108)
65. h_c, ρ_c, ρ_a (§. 46, 109)
66. h_c, ρ, h_a
67. h_c, ρ_c, h_a
68. h_c, ρ_b, h_a
69. h_c, ρ, $\rho_a + \rho_b$
70. h_c, ρ_c, $\rho_a + \rho_b$
71. h_c, ρ_a, $\rho_c - \rho$
72. h_c, ρ, $u - v$
73. h_c, ρ_a, $u - v$
74. ρ_a, ρ_b, $u - v$

75. a, ρ, ρ_c. Anal. Werden m und m''' auf die Höhe CP als Q und Q''' projiziert, so ist C als vierter harmonischer Punkt zu Q''', Q und P bestimmt.

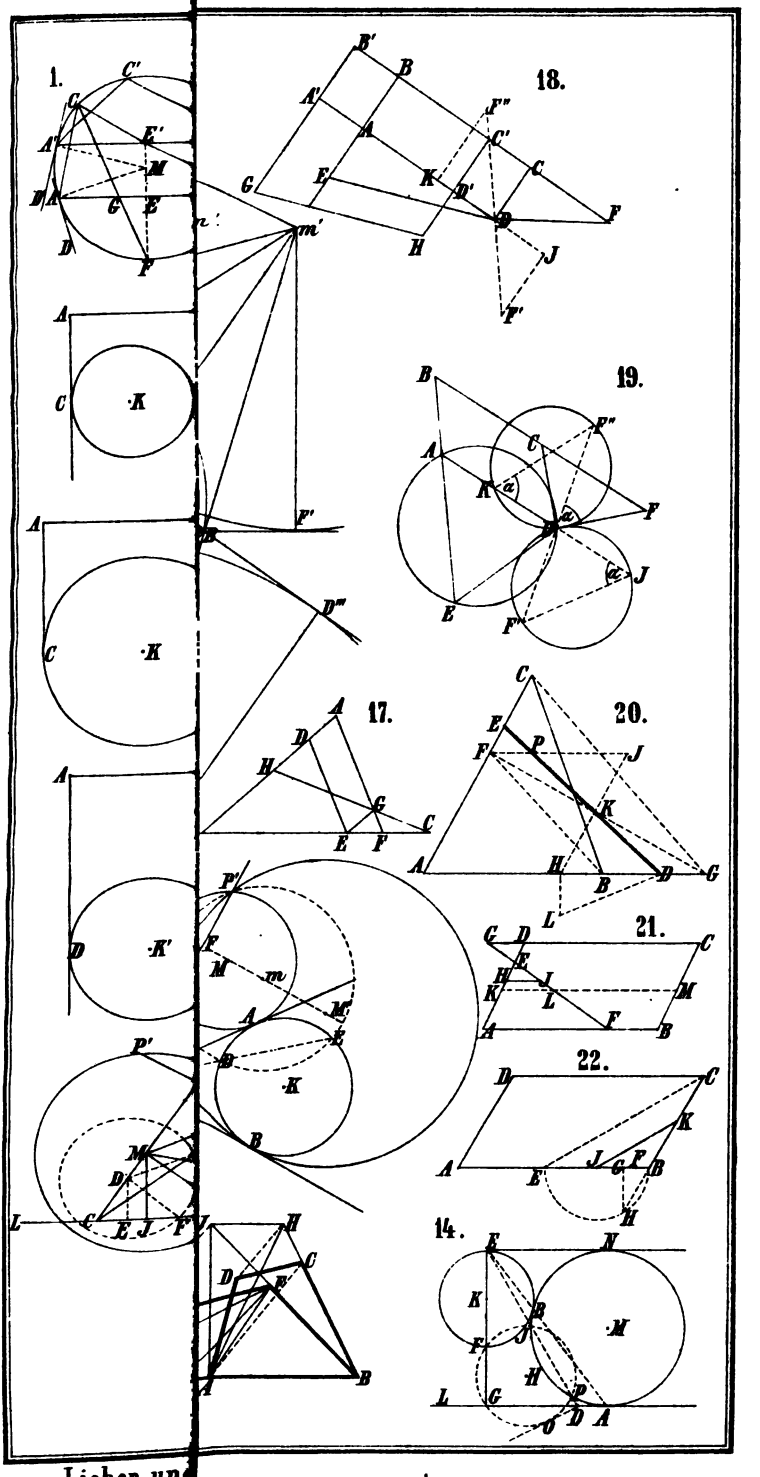
76. a, ρ_a, ρ_b. Ähnlich wie 75.

Zu §. 66.

d) In den Aufgaben 90 bis 93 ist ein Kreis zu konstruieren, welcher durch B und C geht und außerdem eine Parallele zu AB berührt, also §. 100, 2.

90. a, h_c, $\rho_c - \rho$ (II, 251)
91. h_c, β, $\rho_c - \rho$ (II, 252)
92. a, h_c, $\rho_a + \rho_b$ (II, 257)
93. h_c, β, $\rho_a + \rho_b$ (II, 258)

Druck von Leonhard Simion, Berlin SW.



Lieber un

Stereometriſche Aufgaben.

Herausgegeben

von

Prof. Dr. Heinrich Wilhelm Lieber, 1835–
Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnaſium in Stettin.

Berlin.
Verlag von Leonhard Simion.
1888.

Vorrede.

In den Sammlungen geometrischer Konstruktions-Aufgaben und trigonometrischer Aufgaben, welche ich vor Jahren im Verein mit meinem Kollegen v. Lühmann herausgegeben habe, waren wir bei der Anordnung der Aufgaben von dem Grundsatze ausgegangen, daß dieselben, wenn die Gesamtheit der Schüler im stande sein soll, sie zu lösen, systematisch behandelt und in bestimmte Gruppen geteilt werden müssen, für welche die Grundzüge der Lösung anzugeben sind. Von demselben Gesichtspunkt ausgehend habe ich nun auch die stereometrischen Aufgaben bearbeitet und zwar nur diejenigen, welche sich auf die Berechnung der Körper beziehen; der größte Teil derselben dürfte jedoch nicht als bloße Rechenaufgaben anzusehen sein, da zu ihrer Lösung gründliche Übung in der stereometrischen Anschauung durchaus erforderlich ist. Ausdrücklich bemerke ich, um Irrtümer zu vermeiden, daß ich die stereometrischen Übungsaufgaben, welche mehr konstruktiver Natur sind und welche sich namentlich in der von Dr. Thieme herausgegebenen Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie finden, für ebenso berechtigt halte. Nur dürfte sich bei mehreren derselben der Übelstand geltend machen, daß zu ihrer Lösung die Kenntnis der beschreibenden Geometrie, welche in den Lehrplan unserer Gymnasien nicht aufgenommen ist, erforderlich ist.

Zur besseren Orientierung der Leser habe ich den Aufgaben die Resultate, einigen schwierigeren auch eine kurze Anleitung zur Lösung beigefügt. Die Aufgaben über Maxima und Minima, sowie diejenigen,

welche auf kubische Gleichungen führen, sind nicht in besonderen Paragraphen vereinigt, sondern finden sich, da ja letztere auch an dem Resultat leicht als solche erkannt werden können, in der Gruppe, welche die verwandten Aufgaben enthält.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Sammlung habe ich benutzt: Müttrich, Sammlung stereometrischer Aufgaben, herausgegeben von v. Behr; einzelne Abiturienten-Aufgaben und Aufgaben, welche in dem Aufgaben-Repertorium der vom Professor Hoffmann herausgegebenen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht veröffentlicht sind.

Stettin im Oktober 1887.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite.

§ 1. Prisma 1
§ 2. Würfel 4
§ 3. Schnitte durch den Würfel und Berechnung der dadurch entstandenen Körper 6
§ 4. Pyramide 10
§ 5. Abgestumpfte Pyramide 14
§ 6. Reguläres Tetraeder 15
§ 7. Schnitte durch das reguläre Tetraeder und Berechnung der dadurch entstandenen Körper 15
§ 8. Reguläres Oktaeder 19
§ 9. Schnitte durch das reguläre Oktaeder und Berechnung der dadurch entstandenen Körper 20
§ 10. Cylinder 22
§ 11. Kegel 27
§ 12. Abgestumpfter Kegel 31
§ 13. Schnitte durch den Kegel. Kegel und abgestumpfter Kegel 33
§ 14. Kugel und Kugelsektor 36
§ 15. Kugel in einer Halbkugel und in einem Segment 40
§ 16. Zwei und mehrere Kugeln 43
§ 17. Prisma und Pyramide 47
§ 18. Prisma und Kugel 49
§ 19. Würfel und Kugel 51
§ 20. Würfel und reguläres Tetraeder 54
§ 21. Würfel und Pyramide 57
§ 22. Würfel und reguläres Oktaeder 58
§ 23. Würfel, Pyramide und Kugel 61
§ 24. Würfel und Cylinder 61
§ 25. Würfel und Kegel 63
§ 26. Würfel, Kegel und Kugel 65
§ 27. Reguläres Tetraeder und Kugel 66
§ 28. Pyramide und Kugel 70
§ 29. Reguläres Oktaeder und Kugel 73
§ 30. Oktaeder, begrenzt von acht kongruenten gleichschenkligen Dreiecken . . 77
§ 31. Reguläres Tetraeder und Cylinder 80
§ 32. Pyramide und Kegel 82
§ 33. Reguläres Oktaeder und Cylinder 84

§ 34. Reguläres Oktaeder und Kegel 86
§ 35. Reguläres Dodekaeder 88
§ 36. Gerader Cylinder und gerader Kegel 88
§ 37. Gerader Cylinder und Halbkugel 94
§ 38. Gerader Cylinder und Kugel 97
§ 39. Kegel und Doppelkegel in einer Halbkugel und einer Kugel 100
§ 40. Gerader Kegel um eine Halbkugel, eine Kugel und um mehrere Kugeln 105
§ 41. Gerader Kegel, welcher eine Kugel schneidet 117
§ 42. Abgestumpfter Kegel und Kugel 122
§ 43. Cylinder, Kegel und Kugel 125
§ 44. Rotation von Dreiecken 126
§ 45. Rotation von Vierecken und regelmäßigen Vielecken 129
§ 46. Rotation von Kreisen 132
§ 47. Rotation von Kreissegmenten 134
§ 48. Schwerpunktsbestimmungen mittels der Guldin'schen Regel 135

§ 1.

Prisma.

Die Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC; durch die Kante $AC = b$ werde eine Ebene gelegt, welche die gegenüberliegende Kante in D trifft. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen ACB und ACD werde mit α, der Inhalt der Schnittfläche ACD mit F, das Volumen der Pyramide DABC mit V bezeichnet und BC mit a. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen, wenn gegeben

1. a, b, α. Aufl. $F = \frac{ab}{2\cos\alpha}$; $V = \frac{1}{8}a^2 b \operatorname{tg}\alpha$.

2. a, b, F. Aufl. $\cos\alpha = \frac{ab}{2F}$; $V = \frac{1}{8}a\sqrt{4F^2 - a^2b^2}$.

3. a, b, V. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3V}{a^2 b}$; $F = \frac{1}{2a}\sqrt{9V^2 + a^4 b^2}$.

Durch eine Grundkante eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist, werde eine Ebene gelegt, welche mit der Grundfläche den Winkel α bilde. Unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen wie in den vorigen Aufgaben sind die fehlenden Stücke zu berechnen, wenn gegeben

4. a, α. Aufl. $F = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$, $V = \frac{1}{8}a^3 \operatorname{tg}\alpha$.

5. a, F. Aufl. $\cos\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{4F}$, $V = \frac{a\sqrt{3}}{24}\sqrt{16F^2 - 3a^4}$.

6. a, V. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8V}{a^3}$, $F = \frac{\sqrt{3(64V^2 + a^6)}}{4a}$.

7. Das Volumen eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ABCDEF ist zu berechnen, wenn gegeben sind die Seitenkanten $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$, der senkrechte Abstand e zwischen a und b, und der Abstand h zwischen ABED und CF. Aufl. Man kann ABED und CF als Grundflächen eines Prismatoids ansehen; die eine Grundfläche desselben ist $\frac{e(a+b)}{2}$, die andere O, der Mittelschnitt ist $\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\left(\frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}\right)$, daher $V = \frac{1}{6}he(a+b+c)$; oder wenn

mit q der Inhalt des zu den Seitenkanten senkrechten Querschnittes bezeichnet wird, so ist $V = \frac{1}{8} q (a + b + c)$.

8. Das Volumen eines schief abgeschnittenen Parallelepipedons zu berechnen, wenn zwei gegenüberliegende Seitenkanten, also entweder a und c oder b und d gegeben sind und der Inhalt q des zu den Seitenkanten senkrechten Querschnittes. Aufl. Ähnlich wie in 7 findet man $V = \frac{1}{2} q (a + c) = \frac{1}{2} q (b + d)$.

9. Ein Würfel von dem Volumen v wird so verschoben, daß ein von kongruenten Rhomben begrenztes Parallelepipedon entsteht. Wie groß ist das Volumen desselben, wenn der Winkel eines Rhombus α und der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche β ist? Aufl. Ist a die Kante, so ist $a = \sqrt[3]{v}$; die Grundfläche ist $a^2 \sin\alpha$ und die Höhe $a \sin\beta$, also $Vol = a^3 \sin\alpha \sin\beta = v \sin\alpha \sin\beta$.

10. Das Volumen eines von sechs kongruenten Rhomben begrenzten Parallelepipedons zu berechnen, wenn eine Seite des Rhombus a und sein spitzer Winkel α gegeben sind. Aufl. Das Parallelepipedon sei ABCDEFGH und zwar sei $\angle ABC = \alpha$; fällt man von F auf ABCD die Senkrechte FJ, so liegt J auf der Verlängerung von DB; fällt man ferner in der Ebene ABFE von F auf die Verlängerung von AB die Senkrechte FK, so ist $\angle BKJ = 90^\circ$. Nun ist $BK = a \cos\alpha$, also $BJ = \frac{BK}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ und $FJ = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos\frac{\alpha^2}{2} - \cos\alpha^2} =$

$\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}$; da die Grundfläche $ABCD = a^2 \sin\alpha$, so ist $Vol = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}$.

11. Ein gegebenes dreiseitiges Prisma soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck wird. Aufl. Die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks sei x, seine drei Ecken seien E, F, G. Durch F werde ein Schnitt parallel der Grundfläche des Prismas gelegt; die Seiten des entstehenden Dreiecks seien $AF = c$, $AC = b$, $CF = a$, und zwar liege A auf der G-Kante, C auf der E-Kante. Ziehen wir dann noch in der AC-Ebene EH parallel AC, so ist $\sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - c^2}$, mithin $3x^4 - 2x^2 (a^2 + b^2 + c^2) + \{(a-c)^2 - b^2\}\{(a+c)^2 - b^2\} = 0$. Bezeichnet man mit Δ den Inhalt von Δ ACF, so ist das letzte Glied der linken Seite $= 16\Delta^2$, und da ferner der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $D = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ ist, so

folgt aus der letzten Gleichung: $D^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}} D + \Delta^2 = 0$, oder: $D = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{48}} + \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{48} - \Delta^2}$. In diesem Werte für D hat nur das positive Zeichen der Wurzel Gültigkeit, denn es ist $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{48}} \leq \frac{3x^2}{48} \leq D$, da $a, b, c \leqq x$ sind.

12. Ein Stück Pappe hat die Form eines Rechtecks mit den Seiten a und 2a. Aus jeder Ecke desselben wird ein Quadrat herausgeschnitten und aus dem Rest ein Kasten dargestellt. Wie groß muß die Seite des Quadrates sein, wenn der Inhalt des Kastens möglichst groß werden soll? Aufl. Ist x die Seite des Quadrates, so findet man Max. $= x(2a-2x)(a-2x)$, mithin $x = \frac{1}{6} a (3 - \sqrt{3})$.

13. Gegeben sei ein gerades rhombisches Prisma mit den Grundflächen ABCD und A'B'C'D'; die Grundkante sei a, die Seitenkante b und $\angle ADC = 120^0$. Mit F werde der Teil seiner Oberfläche bezeichnet, der gebildet wird von den Seitenflächen A'B und BC', sowie von der Endfläche B'D'. Wenn man die Seitenflächen A'D und C'D nach oben erweitert und die Endfläche B'D' um die größere Diagonale A'C' schwenkt, so ist jede neue Endfläche A'XC'Y wieder ein Rhombus. Der neue Körper ABCDA'XC'Y hat dasselbe Volumen aber eine andere Oberfläche, welche von $B'X = x$ abhängt, mit F_x bezeichnet und deren Minimum bestimmt werden soll. Aufl. Da $B'D' = a$, so ist $F_x = 2ab - ax + a\sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}$; für $x = 0$ ist $F_x = F$, also $= 2ab + \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$. Ferner ergiebt sich $F - F_x = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + ax - a\sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}$; es ist also $F - F_x \lessgtr 0$, jenachdem $\frac{a^2}{2}\sqrt{3} + ax - a\sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \lessgtr 0$ oder $\frac{a}{2}\sqrt{3} \lessgtr x$ ist. Da nun für $x = 0$, $F_x = F$; für $x < \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $F_x < F$ und für $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, wiederum $F_x = F$ ist, so nimmt bei dem Schwenken der Endfläche F erst ab und dann wieder zu; folglich muß zwischen den beiden Grenzwerten ein Minimum liegen; und dies tritt ein für $x = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$.

Anmerkung. Wenn man drei Körper ABCDA'XC'Y so zusammenstellt, daß ihre Grundflächen ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkt D bilden, so hat man die Umgrenzung einer Bienenzelle.

Durch Messung hat man gefunden, daß bei diesen Zellen $B'X = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$ ist. Die Bienen gebrauchen also ein Minimum von Wachs, um einen Raum von bestimmter Größe herzustellen.

§ 2.

Würfel.

Bezeichnet man die Kante des Würfels mit a, die Diagonale einer Seitenfläche mit e, die Diagonale des Würfels mit d, den Inhalt einer Seitenfläche mit F, den Inhalt einer Diagonalebene mit E, das Volumen des Würfels mit V, so sind die fehlenden Stücke zu berechnen, wenn gegeben

1. a. Aufl. $e = a\sqrt{2}$; $d = a\sqrt{3}$; $F = a^2$; $E = a^2\sqrt{2}$; $V = a^3$.
2. e. Aufl. $a = \frac{1}{2} e\sqrt{2}$; $d = \frac{1}{2} e\sqrt{6}$; $F = \frac{1}{2} e^2$; $E = \frac{1}{2} e^2\sqrt{2}$; $V = \frac{1}{4} e^3\sqrt{2}$.
3. d. Aufl. $a = \frac{1}{3} d\sqrt{3}$; $e = \frac{1}{3} d\sqrt{6}$; $F = \frac{1}{3} d^2$; $E = \frac{1}{3} d^2\sqrt{2}$; $V = \frac{1}{9} d^3\sqrt{3}$.
4. F. Aufl. $a = \sqrt{F}$; $e = \sqrt{2F}$; $d = \sqrt{3F}$; $E = F\sqrt{2}$; $V = F\sqrt{F}$.
5. E. Aufl. $a = \sqrt{\frac{E}{\sqrt{2}}}$; $e = \sqrt{E\sqrt{2}}$; $d = \sqrt{\frac{3E}{\sqrt{2}}}$; $F = \frac{1}{2} E\sqrt{2}$; $V = E\sqrt{\frac{E}{2\sqrt{2}}}$.
6. V. Aufl. $a = \sqrt[3]{V}$; $e = \sqrt[6]{8V^2}$; $d = \sqrt[6]{27V^2}$; $F = \sqrt[3]{V^2}$; $E = \sqrt[6]{8V^4}$.
7. Wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher $\frac{n}{m}$ eines durch die Kante a gegebenen Würfels ist? Aufl. $x = a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$.

Wie groß ist die Kante eines Würfels, wenn

8. die Summe seiner Oberfläche und der eines anderen, dessen Kante nmal so groß ist, gleich b ist? Aufl. $x = \sqrt{\frac{b}{6(1+n^2)}}$.
9. eine Vergrößerung der Kante um b, eine Vergrößerung der Oberfläche um c bewirkt? Aufl. $x = \frac{c - 6b^2}{12b}$.
10. eine Verkleinerung der Kante um b, eine Verkleinerung des Volumens um c bewirkt? Aufl. $x = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{\frac{4c - b^3}{3b}}\right)$.
11. $d - a = b$ ist? Aufl. $x = \frac{1}{2} b(\sqrt{3} + 1)$.
12. $d + a = b$ ist? Aufl. $x = \frac{1}{2} b(\sqrt{3} - 1)$.

Wie groß sind die Kanten zweier Würfel, wenn

13. die Summe ihrer Volumina b und die Summe ihrer Kanten c beträgt?

14. der Unterschied ihrer Volumina b und der Unterschied ihrer Kanten c beträgt?

15. die Summe ihrer Oberflächen b und die Summe ihrer Kanten c beträgt?

16. die Summe ihrer Oberflächen b und die Differenz ihrer Kanten c beträgt?

17. beide aus einem Stoff vom specifischen Gewicht s bestehen, die Summe ihrer Kanten a *dm* beträgt und ein aus beiden zusammengesetzter Körper p *kg* wiegt? Aufl. $x+y=a;\ x^3+y^3=\frac{p}{s}$.

18. Wie groß ist die Kante eines Würfels, wenn derselbe b Liter fassen soll? $x=\sqrt[3]{1000\,b}$ *cm*.

19. Wieviel Liter faßt ein Gefäß, dessen hohler Raum ein Würfel mit der Kante a *cm* ist? Aufl. $\frac{a^3}{1000}$ *l*.

20. Wie groß ist das specifische Gewicht eines Würfels, dessen Kante a *cm* beträgt und der p *gr* wiegt? Aufl. $\frac{p}{a^3}$.

21. Wieviel wiegt ein Würfel, dessen Kante a *cm* beträgt und dessen specifisches Gewicht s ist? Aufl. $a^3 s$ *gr*.

22. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der p *gr* wiegt und dessen specifisches Gewicht s ist? Aufl. $\sqrt[3]{\frac{p}{s}}$ *cm*.

23. Aus p *gr* eines Stoffes vom specifischen Gewicht s' und p' *gr* eines anderen Stoffes vom specifischen Gewicht s' wird ein Würfel gegossen. Wie groß ist die Kante desselben? Aufl. $\sqrt[3]{\frac{p}{s}+\frac{p'}{s'}}$ *cm*.

24. Vergrößert man die Kante eines Würfels vom specifischen Gewicht s um b *cm*, so wird das Gewicht um q *gr* größer. Wie groß ist die Kante? Aufl. $x=\frac{1}{2}\left(-b+\sqrt{\frac{4q-sb^3}{3sb}}\right)$ *cm*.

25. Ein hohler Würfel, dessen hohler Raum ebenfalls ein Würfel ist, hat die äußere Kante a *cm*, die Wanddicke b *cm* und das specifische Gewicht s; wieviel wiegt derselbe? Aufl. $2bs\,(3a^2-6ab+4b^2)$ *gr*.

26. In einem würfelförmigen oben offenen Gefäß, dessen specifisches Gewicht s ist, beträgt jede Kante a *cm*, der Boden und die Seitenwände haben eine Dicke von b *cm*; wieviel wiegt das mit Wasser gefüllte Gefäß? Aufl. $a^3+(a-d)\,(a-2d)^2\,(1-s)$ *gr*.

27. Ein Würfel, dessen Kante a *cm* und dessen specifisches Gewicht s ist, schwimmt auf Wasser, so daß die Seitenkanten senkrecht zur Oberfläche sind. Wie tief sinkt er ein? Aufl. as *cm*.

28. Ein hohler Würfel, dessen äußere Kante a *cm*, Wanddicke b *cm* und specifisches Gewicht s ist, schwimmt auf Wasser, so daß die Seitenkanten senkrecht zur Oberfläche sind. Wie tief sinkt er ein? Aufl. $\frac{(a-2b)^3 s}{a^2}$ *cm*.

29. Wie weit kann man man den Würfel der vorigen Aufgabe 28 mit einer Flüssigkeit vom specifischen Gewicht s′ füllen, so daß er gerade noch schwimmt? Aufl. $\frac{a^3 - a^3 s + (a-2d)^3 s}{a^2 s_1}$.

30. In einen hölzernen Würfel ist von der oberen Fläche aus ein würfelförmiger Ausschnitt gemacht, dessen Boden von der unteren Würfelfläche 8 *cm* entfernt ist. Wird der Ausschnitt mit Wasser gefüllt, so wiegt der ganze Würfel 1679 *gr*. Wie groß ist die Kante x des ursprünglichen Würfels, wenn 1 *cbcm* Holz $\frac{8}{4}$ *gr* wiegt? Aufl. Der Ausschnitt wiegt $(x-8)^3$ *gr*, der ausgeschnittene Würfel wiegt $\frac{8}{4}(x^3 - (x-8)^3) = 18x^2 - 144x + 384$; mithin $x^3 - 6x^2 + 48x - 1807 = 0$.

§ 3.

Schnitte durch den Würfel und Berechnung der dadurch entstandenen Körper.

Der Würfel sei ABCDEFGH, so daß AE, BF, CG, DH Kanten und zwar von der Länge a sind; sein Mittelpunkt sei M.

a) Legt man durch H und irgend einen Punkt K von FB eine Ebene, so daß sie von EA und GC gleiche Stücke EJ und GL abschneidet, so ist der Querschnitt des Würfels ein Rhombus HJKL (die gegenüberliegenden Seiten sind parallel und außerdem ist HJ = HL), dessen eine Diagonale $JL = AC = a\sqrt{2}$ ist, während die andere HK von FK = p abhängt. Es ist $HK^2 = FK^2 + HF^2 = p^2 + 2a^2$; also $HK = \sqrt{p^2 + 2a^2}$. Ferner ist $JK = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4a^2}$; $EJ = \sqrt{\frac{p^2}{4} + a^2 - a^2} = \frac{1}{2}p$; mithin $FK = 2EJ$. $\angle JHL = \varphi$ wird bestimmt durch $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = a\sqrt{\frac{2}{p^2 + 2a^2}}$; also $\cos\varphi = \frac{p^2}{p^2 + 4a^2}$. Geht der Schnitt durch F, so ist derselbe das Quadrat HEFG, geht er durch B, so ist er der Rhombus HJBL, dessen Seite $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, dessen Diagonalen $a\sqrt{3}$ und $a\sqrt{2}$ sind und in

welchem φ bestimmt wird durch $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oder $\cos\varphi = \frac{1}{5}$; mithin $\varphi = 78^{\circ}27'46'',95$; kleiner kann der Winkel des Rhombus nicht werden.

In den folgenden Aufgaben ist der Würfel ABCDEFGH mit der Kante a gegeben; man soll durch H einen Schnitt legen, welcher einen Rhombus ausschneidet, von welchem noch ein Stück gegeben ist. In den Aufgaben ist FK = p zu berechnen. Gegeben ist noch

1. der Inhalt des Rhombus $= 1{,}15\,a^2$.
2. die Seite des Rhombus $= 1{,}1\,a$.
3. $\varphi = 80^{\circ}$.

Der durch den Rhombus abgeschnittene Körper besteht aus zwei gleichen vierseitigen Pyramiden, von denen die eine H—EFKJ ist; ihre Grundfläche EFKJ ist ein Trapez, dessen Inhalt $= \frac{3}{4}\,pa$, die Höhe der Pyramide ist $= a$ und das Volumen derselben $= \frac{1}{4}\,pa^2$; mithin ist das Volumen des abgeschnittenen Stückes $= \frac{1}{2}\,pa^2$.

4. Es soll $\frac{1}{n}$ des Würfels abgeschnitten werden. Aufl. $p = \frac{2}{n}\,a$.

Durch zwei gegenüberliegende Ecken H und B des Würfels sind zwei parallele Ebenen, welche Rhomben ausscheiden, so zu legen, daß

5. der Würfel in drei gleiche Teile geteilt wird. Aufl. $p = \frac{2}{3}\,a$.
6. der mittlere Teil gleich der Summe der beiden äußeren ist. Aufl. $p = \frac{1}{2}\,a$.

b) Schnitte senkrecht zu einer Würfeldiagonale HB. HB steht senkrecht auf den Ebenen GED und ACF; beide Dreiecke sind gleichseitig, ihre Seiten sind $a\sqrt{2}$. HB schneide GED in L und ACF in K, so ist HL = LK = KB; denn Pyramide $H-DEG = \frac{1}{3}HL\cdot EDG = \frac{1}{3}HL.\ \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$ und Pyramide $E-DGH = \frac{1}{3}\,EH\cdot DGH = \frac{1}{6}\,a^3$; also $\frac{1}{3}HL\cdot\frac{1}{2}\,a^2\sqrt{3} = \frac{1}{6}\,a^3$ und $HL = \frac{1}{3}\,a\sqrt{3}$; folglich $HL = \frac{1}{3}HB$ und ebenso $BK = \frac{1}{3}HB$.

Legt man durch irgend einen Punkt L′ von HL Ebenen parallel zu GED in der Entfernung HL′ = p, so schneiden diese ebenfalls gleichseitige Dreiecke aus z. B. G′E′D′; eine Seite G′E′ sei s, so ist $s:p = a\sqrt{2}:\frac{1}{3}\,a\sqrt{3}$, also $s = p\sqrt{6}$. Der Inhalt eines solchen Dreiecks G′E′D′ ist dann $\frac{1}{4}\,s^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\,p^2\sqrt{3}$.

Ebenen, welche zwischen EDG und ACF parallel zu denselben liegen und daher senkrecht zu HB sind, schneiden aus dem Würfel Sechsecke; die durch die Mitte M von HB gehende schneidet ein regelmäßiges Sechseck NOPQRS (N auf AD, O auf CD, P auf CG,

Q auf FG, R auf EF und S auf AE) aus, und zwar sind die Ecken des Sechseckes Mitten der Würfelkanten.

7. Der Inhalt des regelmäßigen Sechseckes ist zu berechnen. Aufl. Die Seite ist $\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$, mithin der Inhalt $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

Ein Schnitt zwischen DEG und NOPQRS in der Entfernung $MM' = q$ von M sei N'O'P'Q'R'S'; dieses Sechseck hat drei größere Seiten S'N', O'P', Q'R' und drei kleinere N'O', P'Q' und R'S'; HF schneide QR in T und Q'R' in T'. Dann ist $MT^2 = MR^2 - RT^2 = \frac{3}{8}\,a^2$, also $MT = \frac{1}{4}\,a\sqrt{6}$.

Ferner $MT : HM = M'T' : HM'$ oder $\frac{1}{4}\,a\sqrt{6} : \frac{1}{2}\,a\sqrt{3} = M'T' : \frac{1}{2}\,a\sqrt{3} - q$, mithin $M'T' = \frac{1}{4}\,a\sqrt{6} - \frac{1}{2}\,q\sqrt{2}$.

$$HM : HT = HM' : HT' \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{3} : \tfrac{3}{4}\,a\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} - q : HT',$$

also $HT' = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}}$, mithin $FT' = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} + q\sqrt{\frac{3}{2}}$; und $R'Q' = 2FT' = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2} + q\sqrt{6}$, da $R'T' = T'Q' = FT'$ ist.

Werden RS und R'S' von BE resp. in U und U' geschnitten, so findet man auf ähnliche Weise $M'U' = \frac{1}{4}\,a\sqrt{6} + \frac{1}{2}\,q\sqrt{2}$ und $R'S' = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2} - q\sqrt{6}$.

Nun ist der Inhalt des Sechseckes $N'O'P'Q'R'S' = 3\triangle M'Q'R' + 3\triangle M'R'S' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\,a\sqrt{6} - \frac{1}{2}\,q\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,a\sqrt{2} + q\sqrt{6}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\,a\sqrt{6} + \frac{1}{2}\,q\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,a\sqrt{2} - q\sqrt{6}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}\left(a^2 - 4q^2\right)$.

Der Umfang des Sechseckes ist $3Q'R' + 3R'S' = \frac{3}{2}\,a\sqrt{2} + 3q\sqrt{6} + \frac{3}{2}\,a\sqrt{2} - 3q\sqrt{6} = 3a\sqrt{2}$, also gleich dem Umfange des regelmäßigen Sechseckes und des Dreieckes DEG; mithin haben alle Schnitte von DEG bis ACF, welche parallel diesen Ebenen sind, denselben Umfang.

Zwischen H und DEG und zwar parallel zur letzteren Ebene, also senkrecht zu HB wird ein Schnitt D'E'G' geführt; wie weit muß derselbe von H entfernt sein, damit

8. der Umfang von D'E'G' gleich dem halben Umfang von DEG wird?

9. der Inhalt von D'E'G' halb so groß wie der Inhalt von DEG wird?

10. Pyramide H — DEG halbiert wird?

Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß das Volumen einer geraden dreiseitigen Pyramide, deren Grundkante a, Seitenkante b und Höhe h ist, $\frac{1}{12}\,a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$ oder $\frac{1}{12}\,a^2h\sqrt{3}$ ist (§ 4, 1 und 2).

Wie groß ist das Volumen der Pyramide

11. H — DEG.
12. M — DEG.
13. H — D'E'G' mit der Bedingung in 8.
14. M — D'E'G' mit der Bedingung in 8.
15. H — D'E'G' mit der Bedingung in 9.
16. M — D'E'G' mit der Bedingung in 9.
17. M — D'E'G' mit der Bedingung in 10.

Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß der Radius r der Umkugel einer geraden dreiseitigen Pyramide mit der Grundkante a, der Seitenkante b und der Höhe h, $\frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{3}{3b^2-a^2}}$ oder $\frac{3h^2+a^2}{6h}$ und der Radius ρ der Inkugel $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{3\sqrt{4b^2-a^2}+a\sqrt{3}}$ oder $\frac{a(\sqrt{12h^2+a^2}-a)}{12h}$ ist. (§ 4, 7 und 8).

Wie groß sind die Radien der Um- und Inkugeln der Pyramiden
18. H — DEG
19. M — DEG
20. H — D'E'G' mit der Bedingung in 8.
21. M — D'E'G' mit der Bedingung in 8.
22. H — D'E'G' mit der Bedingung in 9.
23. M — D'E'G' mit der Bedingung in 9.
24. H — D'E'G' mit der Bedingung in 10.
25. M — D'E'G' mit der Bedingung in 10.

Zwischen DEG und ACF ist ein Schnitt parallel zu denselben zu führen, welcher ein Sechseck N'O'P'Q'R'S' ausschneidet; welche Entfernung q muß derselbe vom Mittelpunkt M des Würfels haben, damit der Inhalt des Sechseckes

26. gleich $\frac{4}{5}$ des Mittelschnittes ist? Aufl. $q = \frac{a}{10}\sqrt{5}$.

27. gleich $\frac{6}{5}$ von DEG ist? Aufl. $q = \frac{a}{10}\sqrt{5}$.

28. mittlere Proportionale zwischen dem Mittelschnitt und dem Dreieck DEG ist? Aufl. $q = \sqrt{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

29. Wie groß muß q sein, damit R'Q' = 2R'S' ist? Aufl. $q = \frac{a\sqrt{3}}{18}$.

In den Aufgaben 26 bis 29 sind die Seiten des Sechsecks zu berechnen; ferner die Volumina der Pyramiden, deren Grundfläche das Sechseck ist und deren Spitzen in M und in H liegen.

30. Wenn man die Pyramiden H — DEG und B — ACF ab-

schneidet, so bleibt ein Oktaeder übrig, welches näher zu beschreiben ist. Das Volumen desselben ist leicht zu berechnen, ebenso der Radius der Umkugel.

c) Wie verhalten sich die Inhalte derjenigen Figuren zueinander, durch welche ein Würfel halbiert werden kann, wenn dieselben

31. Rechtecke sind. Aufl. Das Rechteck kann entweder ein Quadrat sein oder ein Rechteck mit den Seiten a und $a\sqrt{2}$; mithin Quadrat: Rechteck $= 1 : \sqrt{2}$.

32. Rhomben sind. Aufl. Der Rhombus kann entweder ein Quadrat sein oder ein Rhombus HJBL mit den Diagonalen a $\sqrt{3}$ und $a\sqrt{2}$; mithin Quadrat: Rhombus $= \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

33. regelmäßige Figuren sind. Aufl. Die Figur kann entweder ein Quadrat oder ein regelmäßiges Sechseck sein, dessen Inhalt $\frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}$ ist; mithin Quadrat: Sechseck $= 4 : 3\sqrt{3}$.

d) Von einem Würfel schneidet man die Ecken ab durch Ebenen, welche durch die Mitten derjenigen Kanten gehen, welche von der abzuschneidenden Ecke ausgehen. Zu berechnen ist

34. die Oberfläche des Restkörpers. Aufl. Der Restkörper wird begrenzt von 6 Quadraten, deren Seite $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ und deren Inhalt $\frac{1}{2} a^2$ ist, und von 8 gleichseitigen Dreiecken, deren Seite $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ und deren Inhalt $\frac{1}{8} a^2 \sqrt{3}$ ist; also Oberfläche des Restkörpers $= a^2 (3 + \sqrt{3})$. Anm. Die Oberfläche des Restkörpers ist doppelt so groß wie die eines Restkörpers, welchen man in ähnlicher Weise aus einem Oktaeder erhält (§ 9. 6).

35. das Volumen des Restkörpers. Aufl. Die Grundfläche einer abgeschnittenen Pyramide ist $\frac{1}{8} a^2 \sqrt{3}$ und ihre Höhe $\frac{1}{6}$ der Diagonale, also $\frac{1}{6} a\sqrt{3}$; mithin abgeschnittene Pyramide $= \frac{1}{48} a^3$ und Restkörper $= a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3$. Anm. Das Verhältnis des Volumens des Restkörpers zu demjenigen des Restkörpers, welchen man in ähnlicher Weise aus einem Oktaeder erhält, ist $2\sqrt{2}$. (§ 9, 7).)

§ 4.

Pyramide.

a) Die dreiseitige Pyramide.

In einer geraden dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC und deren Spitze S ist, sei a eine Grundkante, b eine Seitenkante und h die Höhe SD.

Das Volumen ist zu berechnen, wenn gegeben

1. a, b. Aufl. $Vol = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}$.

2. a, h. Aufl. $Vol = \frac{1}{12} a^2 h \sqrt{3}$.

3. b, h. Aufl. $Vol = \frac{1}{4} h (b^2 - h^2) \sqrt{3}$.

Der Radius r der Umkugel ist zu berechnen, wenn gegeben

4. a, b. Aufl. Ist M der Mittelpunkt, so ist $MA = MS = r$; nun ist $SD = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = r + MD = r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}}$, also $2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}} = b^2$ und $r = \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{3}{3b^2 - a^2}}$.

5. a h. Aufl. $r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}} = h$, also $r = \frac{3h^2 + a^2}{6h}$.

6. b, h. Aufl. $a^2 = 3(b^2 - h^2)$, mithin $r = \frac{b^2}{2h}$.

Den Radius ρ der Inkugel zu berechnen, wenn gegeben

7. a, b. Aufl. $\rho \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{1}{8} \rho \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{8} \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$, also $\rho = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{3\sqrt{4b^2 - a^2} + a\sqrt{3}}$.

8. a, h. Aufl. $\rho \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2} + \frac{1}{8} \rho \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{8} \frac{a^2}{4} \sqrt{3} h$, also $\rho = \frac{a(\sqrt{12h^2 + a^2} - a)}{12h}$.

9. b, h. Aufl. $a^2 = 3(b^2 - h^2)$, also $\rho = \frac{h\sqrt{b^2 - h^2}}{\sqrt{b^2 + 3h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}}$.

10. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC, sein Mittelpunkt sei O und r der Radius des Umkreises; auf OA, OB, OC werde von O aus dieselbe Strecke $x = OA' = OB' = OC'$ abgetragen $(x > r)$. V sei das Volumen des Tetraeders, dessen Grundfläche das gleichseitige Dreieck A'B'C' ist und dessen Seitenflächen die gleichschenkligen Dreiecke AB'C', BC'A', CA'B' sind. Gesucht wird der Wert von x, für welchen $V = \frac{3}{8} x^3$ ist. Aufl. S sei die Spitze des Tetraeders und es sei $CD \perp A'B'$. Dann ist $A'B' = x\sqrt{3}$, $OD = \frac{x}{2}$ $SO^2 = CD^2 - OD^2 = \left(r + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r(r + x)$. Folglich $V = \frac{x^2}{4} \sqrt{3} \sqrt{r(r + x)} = \frac{3}{8} x^3$; mithin $x^2 - \frac{4}{3} rx - \frac{4}{3} r^2 = 0$, $x = 2r$.

11. Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die Längen a, b, c der von einer Ecke ausgehenden Kanten und die von ihnen gebildeten Winkel α, β, γ. Zu berechnen ist das Volumen V des Tetraeders und der Radius ρ der Inkugel. Aufl. Wird die vom Endpunkt der Kante c auf die Ebene des Winkels γ gefällte Senkrechte mit h und der

Flächenwinkel an der Kante b mit β_1 bezeichnet, so ist $h = c \sin\alpha \sin\beta_1$; mithin $V = \frac{1}{6} abc \sin\alpha \sin\gamma \sin\beta_1$, wo β_1 bestimmt ist durch $\cos\beta_1 = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$.

Ist O die Oberfläche des Tetraeders, so ist $\rho = \frac{3V}{O}$.

b) Die vierseitige Pyramide.

In einer geraden vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck ABCD mit den Seiten $AB = a$ und $BC = b$ und deren Spitze S ist, werde eine Seitenkante mit s und die Höhe SM mit h bezeichnet.

Das Volumen ist zu berechnen, wenn gegeben

12. a, b, h. Aufl. $Vol = \frac{1}{3} abh$.

13. a, b, s. Aufl. $Vol = \frac{1}{6} ab\sqrt{4s^2 - a^2 - b^2}$.

14. a, h, s. Aufl. $Vol = \frac{1}{3} ah\sqrt{4s^2 - 4h^2 - a^2}$.

Der Radius der Umkugel ist zu berechnen, wenn gegeben

15. a, b, h. Aufl. Ist O der Mittelpunkt, so ist $h = SO + OM = r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2+b^2}{4}}$, also $r = \frac{4h^2 + a^2 + b^2}{8h}$.

16. a, b, s. Aufl. $r = \frac{s^2}{\sqrt{4s - a^2 - b^2}}$.

17. h, s. Aufl. $r = \frac{s^2}{2h}$.

18. Die Pyramide soll mittels einer durch die Seite AD der Grundfläche gehende Ebene AB'C'D (B' auf SB, C' auf SC) halbiert werden. Aufl. Man lege durch den Mittelpunkt E von AD, den Mittelpunkt F von BC und S eine Ebene, welche B'C' in G schneidet; ferner sei $EH \perp SF$, $SM \perp ABCD$ und $SM' \perp AB'C'D$. Dann ist $Pyr\,S - ABCD = 2\,Pyr\,S - AB'C'D$, mithin $AD \cdot AB \cdot SM = 2\frac{AD + B'C'}{2} \cdot EG \cdot SM'$; da $AB \cdot SM = EF \cdot SM = SF \cdot EH$ und $EG \cdot SM' = SG \cdot EH$, so ist $AD \cdot SF = (AD + B'C') \cdot SG$, mithin $\frac{SF}{SG} = 1 + \frac{B'C'}{AD} = 1 + \frac{SG}{SF}$ oder $\frac{SB}{SB'} = 1 + \frac{SB'}{SB}$; also $SB'^2 = SB^2 - SB \cdot SB'$ und $SB'^2 = SB \cdot BB'$, d. h. SB ist in B' stetig geteilt.

19. Gegeben ist eine Pyramide $S - ABCD$, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale 2a ist; die Höhe SE der Pyramide sei h. Von A fällt man eine Senkrechte AK auf die gegenüberliegende Kante SC und legt durch AK die Perpendikularebene zu SC, welche SB in F und SD in G trifft. Gesucht wird das Volumen ABCDFKG $= V$. Aufl. SE treffe AK in H. Es ist $V = Pyr\,S - ABCD -$

Pyr S – AFKG = $\frac{2}{3}a^2h - \frac{1}{3}$ AK · FH · SK. Nun ist Dreieck ACS = $ah = \frac{1}{2}$ AK $\sqrt{h^2+a^2}$, mithin $AK = \frac{2ah}{\sqrt{h^2+a^2}}$. Ferner $SK^2 = AS^2 - AK^2 = h^2 + a^2 - \frac{4h^2a^2}{h^2+a^2}$; also $SK = \frac{h^2-a^2}{\sqrt{h^2+a^2}}$. Nun ist noch FH zu berechnen. Es ist HE : AE = CK : AK oder $HE : a = \frac{2a^2}{\sqrt{h^2+a^2}} : \frac{2ah}{\sqrt{h^2+a^2}}$, also $HE = \frac{a^2}{h}$, mithin $SH = \frac{h^2-a^2}{h}$; ferner $FH : a = \frac{h^2-a^2}{h} : h$, also $FH = \frac{a(h^2-a^2)}{h^2}$. Daher $V = \frac{2a^4(3h^2-a^2)}{3h(h^2+a^2)}$. Ist h = a, so ist V (das Volumen der Hälfte eines regulären Oktaeders) $= \frac{2}{3}a^3$.

20. Wie groß muß die Kante x der Grundfläche und die Höhe y einer geraden vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat ist, sein, wenn die Gesamtoberfläche derselben bei dem gegebenen Volumen k ein Minimum werden soll? Aufl. Die Höhe einer Seitenfläche sei z, dann ist $Min = x^2 + 2xz$. Nun ist $z^2 = y^2 + \frac{x^2}{4}$ und $x^2y = 3k$, also $y^2 = \frac{9k^2}{x^4}$, mithin $Min = x^2 + 2x\sqrt{\frac{9k^2}{x^4} + \frac{x^2}{4}}$, woraus man $x = \sqrt[6]{\frac{9k^2}{2}}$ und $y = \sqrt[3]{6k}$ findet.

Durch eine vierseitige Pyramide, deren Höhe SE = h und deren Grundfläche ABCD ein Quadrat mit der Seite a ist, sei ein Schnitt A'B'C'D' (A' auf SA u. s. w.) parallel der Grundfläche gelegt. Welchen Abstand SF = x von der Spitze S muß der Schnitt haben, damit

21. *Pyr* E – A'B'C'D' ein Maximum wird? Aufl. A'B' sei = y, so ist $Max = \frac{1}{3}(h-x)y^2$, und da $h : a = x : y$, so ist $Max = \frac{1}{3}(h-x)\frac{a^2x^2}{h^2}$, woraus sich $x = \frac{2}{3}h$ ergiebt.

22. *Pyr* E – A'B'C'D' $= \frac{1}{n}$ *Pyr* S – ABCD wird? Aufl. Es ist $\frac{1}{3}y^2(h-x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3}a^2h$; und da $y = \frac{ax}{h}$, so ist $x^3 - hx^2 + \frac{h^3}{n} = 0$.

§ 5.

Abgestumpfte Pyramide.

Die Höhe h einer geraden abgestumpften Pyramide ist zu berechnen, wenn die Summe der Seitenflächen gleich der Summe der Grundflächen ist und

1. die Grundflächen zwei Quadrate mit den Seiten a und b sind. Aufl. Die Höhe einer Seitenfläche sei x: dann ist $x^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, also $a^2 + b^2 = 4\,\frac{a+b}{2}\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ oder $a^2 + b^2 = (a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$, mithin $h = \frac{ab}{a+b}$.

2. die Grundflächen zwei regelmäßige Polygone mit den Durchmessern a und b der Inkreise sind. Aufl. Die Seiten der Grundflächen seien s und s'; dann ist $s : s' = a : b$; die Höhe einer Seitenfläche sei x. Die Grundflächen sind $\frac{nsa}{4}$ und $\frac{ns'b}{4} = \frac{nsb^2}{4a}$; ferner ist $x^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Mithin $\frac{nsa}{4} + \frac{nsb^2}{4a} = \frac{n}{2}\left(s + \frac{bs}{a}\right)\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ und hieraus $h = \frac{ab}{a+b}$.

3. Die Grundflächen einer abgestumpften Pyramide sind zu berechnen aus der Höhe h, dem Volumen V und der Summe der Grundflächen $G + g = s$. Aufl. $\frac{1}{3}h(G + \sqrt{Gg} + g) = V$, also $Gg = \left(\frac{3V}{h} - s\right)^2$.

4. Die Höhe x einer Pyramide zu berechnen, wenn ein Stumpf derselben die Grundflächen G und g und das Volumen V hat. Aufl. Ist y die Höhe des Stumpfes, so ist $y = \frac{3V}{G + \sqrt{Gg} + g}$ und da $\sqrt{G} : \sqrt{G} - \sqrt{g} = x : y$, so ist $x = \frac{3V\sqrt{G}}{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}$.

5. Die Kanten der Grundflächen einer abgestumpften quadratischen Pyramide sind a und b; dieselbe wiegt p *kgr* und besteht aus einem Stoff vom specifischen Gewicht s. Wie hoch ist dieselbe? Aufl. $x = \frac{3p}{s(a^2 + ab + b^2)}$.

§ 6.

Das reguläre Tetraeder.

Bezeichnet man die Kante des regulären Tetraeders mit a, die Höhe einer Seitenfläche mit p, die Höhe des Tetraeders mit h, den Inhalt einer Seitenfläche mit F und das Volumen des Tetraeders mit V, so sind die fehlenden Stücke zu berechnen, wenn gegeben

1. a. Aufl. $p = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$; $h = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$; $F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

2. p. Aufl. $a = \frac{2}{3} p \sqrt{3}$; $h = \frac{2}{3} p \sqrt{2}$; $F = \frac{1}{3} p^2 \sqrt{3}$; $V = \frac{2}{27} p^3 \sqrt{6}$.

3. h. Aufl. $a = \frac{1}{2} h \sqrt{6}$; $p = \frac{3}{4} h \sqrt{2}$; $F = \frac{3}{8} h^2 \sqrt{3}$; $V = \frac{1}{8} h^3 \sqrt{3}$.

4. F. Aufl. $a = 2\sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}$; $p = \sqrt{F\sqrt{3}}$; $h = \frac{2}{3}\sqrt{2F\sqrt{3}}$; $V = \frac{2}{3} F \sqrt{\frac{2F}{3\sqrt{3}}}$.

5. V. Aufl. $a = \sqrt[3]{6V\sqrt{2}}$; $p = \frac{1}{2}\sqrt[6]{1944 V^2}$; $h = \frac{1}{3}\sqrt{15552 V^2}$; $F = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2187 V^4}$.

§ 7.

Schnitte durch das reguläre Tetraeder und Berechnung der dadurch entstandenen Körper.

a) Viereckige Schnitte.

Legt man durch die Mittelpunkte E, F, G, H der vier Kanten AD, BD, BC, AC eines regulären Tetraeders ABCD mit dem Mittelpunkt M einen ebenen Schnitt, so daß also die beiden sich kreuzenden Kanten AB und CD nicht getroffen werden, so erhält man als Durchschnitt ein Quadrat; jede Seite desselben ist $\frac{a}{2}$, also sein Umfang 2a und sein Inhalt $\frac{a^2}{4}$.

Ein Schnitt parallel dem vorigen und in der Entfernung p von demselben schneidet ein Rechteck E'F'G'H' aus.

1. Zu berechnen Umfang und Inhalt dieses Rechtecks. Aufl. Es sei $E'F' = s_1$ und $F'G' = s_2$. Eine Senkrechte von D auf AB treffe EF in P, E'F' in P' und AB in J; und eine Senkrechte von J auf

CD treffe CD in K, EFGH in Q und E'F'G'H' in Q', so ist $2QJ^2 = EJ^2 = \frac{1}{4}a^2$, mithin $QJ = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$. Im $\triangle PQJ$ ist $PP' : PJ = QQ' : QJ$ oder $PP' : \frac{a}{4}\sqrt{3} = p : \frac{a}{4}\sqrt{2}$, also $PP' = \frac{1}{2}p\sqrt{6}$. Im $\triangle ABD$ ist $E'F' : P'D = AB : JD$ oder $s_1 : \frac{1}{4}a\sqrt{3} + PP' = a : \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin $s_1 = \frac{1}{2}a + p\sqrt{2}$. Im $\triangle BCD$ treffe BK die Gerade FG in R und F'G' in R'; dann ist $F'G' : BR' = CD : BK$ oder $s_2 : \frac{1}{4}a\sqrt{3} - PP' = a : \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin $s_2 = \frac{1}{2}a - p\sqrt{2}$. Der Umfang des Rechtecks E'F'G'H' ist mithin $2s_1 + 2s_2 = 2a$, also konstant; der Inhalt ist $s_1 s_2 = \frac{1}{4}a^2 - 2p^2 = \frac{1}{4}(a^2 - 8p^2)$.

2. Zu berechnen die Volumina der durch den Schnitt E'F'G'H' entstehenden Teile des Tetraeders. Aufl. Der kleinere derselben besteht aus zwei regulären Tetraedern, deren jede Seite s_2 ist, und einem Prismatoid, dessen eine Grundfläche das Rechteck E'F'G'H' ist und dessen andere Grundfläche zu einer Geraden zusammengeschrumpft ist. Das Volumen desselben ist $\frac{1}{6}s_2^3\sqrt{2} + \frac{1}{48}(a^3\sqrt{2} - 24ap^2\sqrt{2} + 64p^3) = \frac{1}{24}a^3\sqrt{2} - \frac{1}{4}a^2p + \frac{2}{3}p^3$. Der größere Teil ist ein Prismatoid, dessen Volumen gleich $\frac{1}{24}a^3\sqrt{2} + \frac{1}{4}a^2p - \frac{2}{3}p^3$ ist.

3. Wie groß sind diese Volumina, wenn E'F'G'H' Mittelschnitt zwischen EFGH und AB ist? Aufl. $\frac{5}{384}a^3\sqrt{2}$ und $\frac{9}{128}a^3\sqrt{2}$.

Wie weit muß der Schnitt E'F'G'H' vom Mittelschnitt EFGH entfernt sein, damit

4. $s_1 = 2s_2$ ist? Aufl. $p = \frac{1}{12}a\sqrt{2}$.

5. $s_1 = ns_2$ ist? Aufl. $p = \frac{a(n-1)}{2\sqrt{2}\,(n+1)}$.

6. Rechteck E'F'G'H' die Hälfte des Mittelschnittes ist? Aufl. $p = \frac{1}{4}a$.

b) Dreieckige Schnitte.

Die Grundfläche ABC eines regulären Tetraeders ABCD sei durch $EF \parallel AB$ halbiert; der Schnitt durch D und EF halbiert alsdann das Tetraeder; zu berechnen ist

7. $\triangle DEF$. Aufl. $EF^2 = \frac{1}{2}a^2$, also $EF = CE = CF = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Es sei noch $DG \perp AC$ und $DH \perp EF$; dann ist $DE^2 = DG^2 + EG^2 = \frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}$, und $DH^2 = DE^2 - \frac{1}{4}EF^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{2} - \frac{1}{8}a^2 = \frac{11}{8}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}$. Mithin $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF \cdot DH = \frac{1}{8}a^2\sqrt{11 - 4\sqrt{2}}$.

8. der Radius r des Umkreises von DEF. Aufl. Es sei M der Mittelpunkt, so ist $ME^2 = EH^2 + (DH - DM)^2$ oder $r^2 = \left(\frac{1}{4} a \sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{11}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{2}} - r\right)^2$, also $r = \frac{a(3-\sqrt{2})}{\sqrt{2(11-4\sqrt{2})}}$.

9. der Radius ρ des Inkreises von DEF. Aufl. Es ist $\rho(2DE + EF) = EF \cdot DH$ oder $\rho\left(2\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} a \sqrt{2}\sqrt{\frac{11}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$; mithin $\rho = \frac{a\sqrt{11-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\left(2\sqrt{3-\sqrt{2}}+1\right)}$.

Legt man durch CD und den Mittelpunkt L von AB einen Schnitt so wird durch denselben das Tetraeder halbiert; zu berechnen ist

10. △ CDL. Aufl. $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{2}$.

11. der Radius r_1 des Umkreises von CDL. Aufl. Es sei $LK \perp CD$ und M_1 der Mittelpunkt, so ist $CM_1^2 = CK^2 + (LK - LM_1)^2$ oder $r_1^2 = \frac{1}{4} a^2 + \left(\frac{1}{2} a\sqrt{2} - r_1\right)^2$; also $r_1 = \frac{3}{8} a \sqrt{2}$.

12. der Radius ρ_1 des Inkreises von CDL. Aufl. Es ist $\rho_1(2CL + CD) = CD \cdot LK$ oder $\rho_1 (a\sqrt{2} + a) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2}$, mithin $\rho_1 = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Ein Tetraeder kann also durch zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke halbiert werden; in welchem Verhältnis stehen

13. die Inhalte beider Dreiecke? Aufl. $\frac{1}{4}\sqrt{2(11-4\sqrt{2})}$.

14. die Inhalte der Umkreise beider Dreiecke? Aufl. $16(11-6\sqrt{2}) : 9(11-4\sqrt{2})$.

15. die Inhalte der Inkreise beider Dreiecke? Aufl. $17 + 10\sqrt{2} : 4\left(13 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)$.

16. die Umfänge der Umkreise beider Dreiecke? Aufl. $4(3-\sqrt{2}) : 3\sqrt{11-4\sqrt{2}}$.

17. die Umfänge der Inkreise beider Dreiecke? Aufl. $\sqrt{11-4\sqrt{2}} : 2\left(2\sqrt{3-\sqrt{2}}+1\right)(\sqrt{2}-1)$.

Von einem regulären Tetraeder ABCD soll $\frac{1}{m}$ abgeschnitten werden durch einen Schnitt, welcher durch die Spitze D geht und sich als gleichschenkliges Dreieck darstellt. Von letzterem sollen berechnet werden die Grundlinie g, der Schenkel s und die Höhe h. Da es vier solcher Schnitte giebt, so sind dieselben noch näher zu bestimmen.

18. Der Schnitt soll noch durch die Kante BD gehen; er treffe AC in E und es sei $EF \perp BD$; dann ist $BD = g_1$, $BE = s_1$ und $EF = h_1$. Aufl. $g_1 = a$; $AE = \frac{1}{m}\,a$; $s_1^2 = a^2 + \frac{1}{m^2}\,a^2 - 2a \cdot \frac{1}{m} a \cos 60^0$, mithin $s_1 = a\sqrt{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}}$; $h_1^2 = s_1^2 - \frac{1}{4}\,a^2$, also $h_1 = a\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}}$.

19. Der Schnitt soll ABC in $EF \parallel AB$ schneiden und zwar soll $DCEF = \frac{1}{m}\,ABCD$ sein. Aufl. Es sei $DG \perp EF$ und $DH \perp AC$ dann ist $EF = g_2$, $DE = s_2$ und $DH = h_2$. Es ist $\triangle CEF = \frac{1}{m}\,ABC$ und da $ABC : EFC = AB^2 : EF^2$ oder $1 : \frac{1}{m} = a^2 : g_2^2$, so ist $g_2 = a\sqrt{\frac{1}{m}}$. Ferner $s_2^2 = \frac{3}{4}\,a^2 + \left(\frac{1}{2}\,a - g_2\right)^2$; also $s_2 = a\sqrt{1 + \frac{1}{m} - \sqrt{\frac{1}{m}}}$ und $h_2 = \sqrt{s_2^2 - \frac{1}{4}\,g_2^2} = a\sqrt{1 + \frac{3}{4m} - \sqrt{\frac{1}{m}}}$.

20. Der Schnitt soll ABC in $EF \parallel AB$ schneiden und zwar soll $DABFE = \frac{1}{m}\,ABCD$ sein. Aufl. Es sei $DG \perp EF$ und $DH \perp AC$; dann ist $EF = g_3$, $DE = s_3$ und $DG = h_3$. Es muß $ABFE = \frac{1}{m}\,ABC$ sein, also $EFC = \frac{m-1}{m}\,ABC$; mithin $1 : \frac{m-1}{m} = a^2 : g_3^2$ und $g_3 = a\sqrt{\frac{m-1}{m}}$. Ähnlich wie in 17) findet man $s_3 = a\sqrt{1 + \frac{m-1}{m} - \sqrt{\frac{m-1}{m}}}$ und $h_3 = a\sqrt{1 + \frac{3(m-1)}{4m} - \sqrt{\frac{m-1}{m}}}$.

21. Der Schnitt soll schief durch das Tetraeder gehen, aber symmetrisch gegen zwei Kanten; er möge AC in E und BC in F treffen; dann soll $CE = BF$ sein. Aufl. Es sei wieder $DG \perp EF$ und $DH \perp AC$; dann ist $EF = g_4$, $DE = s_4$ und $DG = h_4$; es sei noch $CE = BF = x$. Dann ist $\triangle ECF = \frac{1}{2}\,x\,(a - x) \sin 60^0 = \frac{1}{m}\,ABC = \frac{1}{m}\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, mithin $\frac{1}{2}\,x\,(a-x)\,\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{m}\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und hieraus $x = a\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m}}\right)$. Ferner $EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \cdot CF \cos 60^0$ oder $g_4^2 = x^2 + (a-x)^2 - x\,(a-x)$, also $g_4 = a\sqrt{1 - \frac{3}{m}}$, $s_4 = a\sqrt{1 - \frac{1}{m}}$ und $h_4 = \frac{1}{2}\,a\sqrt{3 - \frac{1}{m}}$.

c) 22. Den Winkel zu berechnen zwischen der Grundfläche des regulären Tetraeders ABCD und dem Schnitt durch die Kante BC, welcher zunächst der Grundfläche ein Drittel vom Tetraeder abschneidet. Aufl. Die Kante des Tetraeders sei 1; die durch BC gelegte Ebene schneide DA in E; ferner sei AH⊥BC und die von D und E auf ABC gefällten Senkrechten seien DG und EF; dann ist $DG = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $EF = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $FH = \frac{7}{18}\sqrt{3}$; mithin $\operatorname{tg} EHA = \frac{2\sqrt{2}}{7}$; also $\angle EHA = 22^0\ 0'\ 5''$.

23. Durch einen in einer Kante eines regulären Tetraeders durch seinen Abstand b von einer Ecke gegebenen Punkt soll eine Ebene so gelegt werden, daß die Schnittfläche ein Dreieck ist und sowohl die Volumina als auch die Oberflächen der beiden Tetraederstücke sich wie m : n verhalten. Aufl. Die Kante sei a, die von den Kanten abgeschnittenen Stücke seien b, x, y. Die Seitenflächen des abgeschnittenen Tetraeders seien s_1, s_2, s_3, die Schnittfläche s; dann ist $\frac{bxy}{a^3} = \frac{m}{m+n}$ (1), also ist xy bekannt. Ferner ist $\frac{s+s_1+s_2+s_3}{a^2\sqrt{3}+s-s_1-s_2-s_3} = \frac{m}{n}$ oder $(m+n)(s_1+s_2+s_3) = (m-n)\,s + ma^2\sqrt{3}$ (2). Nun ist $s_1 = \frac{1}{4}by\sqrt{3}$; $s_2 = \frac{1}{4}bx\sqrt{3}$; $s_3 = \frac{1}{4}xy\sqrt{3}$. Die Seiten von s sind $\sqrt{x^2+y^2-xy}$, $\sqrt{y^2+b^2-by}$, $\sqrt{b^2+x^2-bx}$, daher $s = \frac{1}{4}\sqrt{x^2y^2+b^2y^2+b^2x^2}\sqrt{3}$. Folglich geht (2) über in $(m+n)(xy+by+bx) = (m-n)\sqrt{x^2y^2+b^2y^2+b^2x^2}+ma^2$; dies ist eine quadratische Gleichung für $x+y$, wenn man aus (1) den für xy gefundenen Wert einsetzt.

§ 8.

Reguläres Oktaeder.

Bezeichnet man die Kante mit a, die Höhe einer Seitenfläche mit h, die Diagonale mit d, den Inhalt einer Seitenfläche mit F, den Inhalt einer Diagonalebene mit E und das Volumen des Oktaeders mit V, so sind die fehlenden Stücke zu berechnen, wenn gegeben

1. a. Aufl. $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $d = a\sqrt{2}$; $F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; $E = a^2$; $V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

2. h. Aufl. $a = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$; $d = \frac{2}{3}h\sqrt{6}$; $F = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$; $E = \frac{4}{3}h^2$; $V = \frac{8}{27}h^3\sqrt{6}$.

3. d. Aufl. $a = \frac{1}{2} d \sqrt{2}$; $h = \frac{1}{4} d \sqrt{6}$; $F = \frac{1}{8} d^2 \sqrt{3}$; $E = \frac{1}{2} d^2$; $V = \frac{1}{6} d^3$.

4. F. Aufl. $a = 2 \sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}$; $h = \sqrt{F \sqrt{3}}$; $d = 2 \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}}$; $E = \frac{4}{3} F \sqrt{3}$; $V = \frac{8}{9} F \sqrt{2F \sqrt{3}}$.

5. E. Aufl. $a = \sqrt{E}$; $h = \frac{1}{2} \sqrt{3E}$; $d = \sqrt{2E}$; $F = \frac{1}{4} E \sqrt{3}$; $V = \frac{1}{6} E \sqrt{2E}$.

6. V. Aufl. $a = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}}}$; $h = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9V \sqrt{\frac{8}{2}}}$; $d = \sqrt[3]{6V}$; $F = \frac{8}{8} \sqrt[6]{48 V^4}$; $E = \frac{1}{2} \sqrt[3]{36 V^2}$.

Wie groß ist die Kante eines regulären Oktaeders, wenn

7. die Oberfläche desselben und eines anderen, dessen Kante n mal so groß ist, zusammen gleich b ist? Aufl. $\sqrt{\frac{b}{2 \sqrt{3} (1 + n^2)}}$.

8. eine Vergrößerung der Kante um b eine Vergrößerung der Oberfläche um c herbeiführt? Aufl. $\frac{c - 2b^2 \sqrt{3}}{4b \sqrt{3}}$.

9. eine Verkleinerung der Kante um b eine Verkleinerung des Volumens um c herbeiführt? Aufl. $\frac{1}{2} \left(b + \sqrt{\frac{12c - b^3 \sqrt{3}}{3b \sqrt{2}}} \right)$.

10. der Unterschied zwischen einer Diagonale und einer Kante m ist? Aufl. $m (\sqrt{2} + 1)$.

11. die Summe einer Diagonale und einer Kante s ist? Aufl. $s (\sqrt{2} - 1)$.

12. der Unterschied zwischen dem Inhalt einer Diagonalebene und einer Seitenfläche d ist? Aufl. $2 \sqrt{\frac{1}{18} . d (4 + \sqrt{3})}$.

13. die Summe des Inhaltes einer Diagonalebene und einer Seitenfläche s ist? Aufl. $2 \sqrt{\frac{1}{15} . s (4 - \sqrt{3})}$.

§ 9.

Schnitte durch das reguläre Oktaeder und Berechnung der dadurch entstandenen Körper.

Das Oktaeder sei ABCDEF, so daß AC, BD, EF die drei Diagonalen desselben sind; sein Mittelpunkt sei M.

a) Die Schnitte mögen parallel den Seitenflächen ABE und CDF sein; eine Senkrechte von M auf ABE treffe diese in G und CDF

in H, so ist GH der Durchmesser der Inkugel des Oktaeders, also $MG = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$ (§ 29,3).

Ein Schnitt durch M schneidet ein regelmäßiges Sechseck aus, dessen Seite $\frac{1}{2} a$ ist; mithin ist sein Umfang $3a$ und sein Inhalt $\frac{3}{8} a^2 \sqrt{3}$, also gleich $\frac{3}{2}$ mal einer Seitenfläche. Nun möge der Schnitt in der Entfernung $p = MJ$ von M geführt werden; er wird das Oktaeder in einem Sechseck schneiden, in welchem je drei nicht zusammenstoßende Seiten gleich sind. Die Schnitte durch M und J parallel zu ABE mögen ABF resp. in KL und $NO = s_1$ und BCF resp. in LP und $OQ = s_2$ schneiden, so ist $KL = LP = \frac{1}{2} a$.

Die Höhe von F auf AB treffe KL in R, NO in S und AB in T, und es sei $RS = x$, so verhält sich in dem Trapez RTGM (die parallelen Seiten sind MR und GT) $MG : MJ = RT : RS$ oder $\frac{1}{6} a \sqrt{6} : p = \frac{1}{4} a \sqrt{3} : x$, mithin $x = \frac{3}{4} p \sqrt{2}$. Ferner ist $AB : FT = NO : FS$ oder $a : \frac{1}{2} a \sqrt{3} = s_1 : \frac{1}{4} a \sqrt{3} + \frac{3}{4} p \sqrt{2}$, also $s_1 = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} p \sqrt{6}$. Auf ähnliche Weise findet man $s_2 = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} p \sqrt{6}$. Mithin ist der Umfang des sechseckigen Schnittes $3 s_1 + 3 s_2 = 3a$ also gleich dem einer Seitenfläche und dem des regelmäßigen Sechseckes.

Berechnung des Inhaltes des sechseckigen Schnittes. MR ist der kleine Radius des regelmäßigen Sechseckes also $= \frac{1}{4} a \sqrt{3}$. Fällt man nun von S die Senkrechte SU auf MR und bezeichnet die Höhe MS des Dreiecks MNO mit h_1, so ist $SR^2 = SU^2 + UR^2$ oder $x^2 = p^2 + \left(\frac{1}{4} a \sqrt{3} - h_1\right)^2$ oder $\frac{9}{8} p^2 = p^2 + \left(\frac{1}{4} a \sqrt{3} - h_1\right)^2$, mithin $h_1 = \frac{1}{4} a \sqrt{3} - \frac{1}{4} p \sqrt{2}$. Die Höhe des Dreiecks MOQ wird ebenso berechnet; man findet $h_2 = \frac{1}{4} a \sqrt{3} + \frac{1}{4} p \sqrt{2}$. Mithin ist der Inhalt des sechseckigen Schnittes $= \frac{3}{2} h_1 s_1 + \frac{3}{2} h_2 s_2 = \frac{3}{8} \sqrt{3} (a^2 - 2p^2)$.

Zwischen ABE und CDF sind Schnitte parallel zu diesen Ebenen zu führen, welche Sechsecke ausschneiden; welche Entfernung p müssen dieselben vom Mittelpunkt M des Oktaeders haben, damit der Inhalt des Sechseckes

1. gleich $\frac{1}{6}$ des Mittelschnittes ist? Aufl. $p = \frac{1}{6} a \sqrt{15}$.
2. gleich $\frac{7}{6}$ von $\triangle$ ABE ist? Aufl. $p = \frac{1}{8} a$.
3. die mittlere Proportionale zwischen dem Mittelschnitt und $\triangle$ ABE ist? Aufl. $p = a \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{6}}$.
4. $s_2 = \frac{1}{8} s_1$ ist. Aufl. $p = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$.

In den Aufgaben 1 bis 4 sind die Seiten des Sechseckes zu berechnen; ferner die Volumina der Pyramiden, deren Grundfläche das

Sechseck ist und deren Spitzen in M und in dem Mittelpunkt von $\triangle$ ABE liegen.

5. Wie verhalten sich die Inhalte derjenigen regelmäßigen Figuren zu einander, durch welche ein Oktaeder halbiert werden kann. Aufl. Die Figur kann entweder ein Quadrat mit der Seite a oder ein regelmäßiges Sechseck sein; mithin Quadrat: Sechseck $= 8 : 3\sqrt{3}$.

Von einem regulären Oktaeder schneidet man die Ecken weg durch Ebenen, welche durch die Mitten derjenigen Kanten gehen, welche von der abzuschneidenden Ecke auslaufen. Zu berechnen ist

6. die Oberfläche des Restkörpers. Aufl. Der Restkörper wird begrenzt von sechs Quadraten, deren Seite $\frac{1}{2}$ a und deren Inhalt $\frac{1}{4}a^2$ ist, und von acht gleichseitigen Dreiecken, deren jede Seite $\frac{1}{2}$ a und deren Inhalt $\frac{1}{16}a^2\sqrt{3}$ ist; also ist die Oberfläche des Restkörpers $\frac{1}{2}a^2(3+\sqrt{3})$. Anmerkung. Die Oberfläche des Restkörpers ist halb so groß wie die eines Restkörpers, welchen man in ähnlicher Weise aus einem Würfel erhalten hat. (§ 3, 34).

7. das Volumen des Restkörpers. Aufl. Die Grundfläche einer abgeschnittenen Pyramide ist $\frac{1}{4}a^2$, die Höhe $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$; also Restkörper $= \frac{1}{8}a^3\sqrt{2} - \frac{1}{8}a^3\sqrt{2} = \frac{5}{24}a^3\sqrt{2}$; also $\frac{5}{8}$ von dem Volumen des Oktaeders. Anmerkung. Das Verhältnis des Volumens des Restkörpers zu demjenigen des Restkörpers, welchen man in ähnlicher Weise aus einem Würfel erhalten hat, ist $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (§. 3, 35).

§ 10.

Cylinder.

a) Berechnung des geraden Cylinders aus Bestimmungsstücken.

1. Von einem geraden Cylinder (r, h) kennt man das Volumen V und den Mantel M; r und h sind zu berechnen. Aufl. $r = \frac{2V}{M}$; $h = \frac{M^2}{4\pi V}$.

2. Wie groß ist die Höhe h eines geraden Cylinders, dessen Grundflächen Radius r und in welchem die Summe der beiden Grundflächen nmal so groß wie der Mantel ist? Aufl. $h = \frac{r}{n}$.

3. Von einem geraden Cylinder (r, h) kennt man $r - h = d$ und den Mantel M; r und h sind zu berechnen. Aufl. $r = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{d^2 + \frac{2M}{\pi}}\right)$, $h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + \frac{2M}{\pi}} - d\right)$.

4. Von einem geraden Cylinder (r, h) kennt man $r + h = s$ und das Volumen V; r und h sind zu berechnen. Aufl. $r^3 - sr^2 + \frac{V}{\pi} = 0$.

5. Durch einen geraden Cylinder (r, h) vom specifischen Gewicht s wird ein anderer Cylinder (x, h) vom specifischen Gewicht s' so geschoben, daß die Achsen beider zusammenfallen. Wie groß muß der Radius x des letzteren sein, wenn der Körper in Wasser gelegt zur Hälfte einsinken soll? Aufl. Ist p das Gewicht des ersten Cylinders und p' das des zweiten, so ist $p = \pi h(r^2 - x^2)\, s$ und $p' = \pi x^2 h s'$; da nun $p + p' = \frac{1}{2}\pi r^2 h$, so ist $x = r\sqrt{\frac{1 - 2s}{2(s' - s)}}$.

Wie groß ist bei gegebenem Volumen V der Radius x und die Höhe y eines geraden Cylinders, wenn

6. die Summe aus dem Mantel und einer Grundfläche ein Minimum werden soll? Aufl. $\text{Min} = 2\pi xy + \pi x^2 = \frac{2V}{x} + \pi x^2$; daher $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = y$.

7. die Gesamtoberfläche ein Minimum werden soll? (Zweckmäßigste Form für Münzen) Aufl. $\text{Min} = 2\pi xy + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$; also $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \frac{1}{2}y$.

8. Wie groß ist bei gegebener Gesamtoberfläche F, der Radius x und die Höhe y eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt ein Maximum werden soll? Aufl. Da $y = \frac{F - 2\pi x^2}{2\pi x}$, so ist $\text{Max} = \pi x^2 y = \frac{1}{2}x\,(F - 2\pi x^2)$; mithin $x = \sqrt{\frac{F}{6\pi}}$ und $y = \sqrt{\frac{2F}{3\pi}}$, also $x = \frac{1}{2}y$.

b) Die geraden Cylinder, welche durch Rotation eines Rechteckes erzeugt sind.

Wenn ein Rechteck mit den Seiten a und b um a rotiert, so werde von dem so erzeugten Cylinder das Volumen mit V, der Mantel mit M und die Gesamtoberfläche mit F bezeichnet; rotiert es dagegen um b, so werde das Volumen des Cylinders mit V_1, der Mantel mit M_1

und die Gesamtoberfläche mit F_1 bezeichnet. a und b sind zu berechnen, wenn gegeben

9. V, V_1. Aufl. $a = \frac{V_1}{\sqrt[3]{\pi V V_1}}$; $b = \frac{V}{\sqrt[3]{\pi V V_1}}$.

10. F, F_1. Aufl. $a+b = \sqrt{\frac{F+F_1}{2\pi}}$; $a = \frac{F_1}{\sqrt{2\pi(F+F_1)}}$; $b = \frac{F}{\sqrt{2\pi(F+F_1)}}$.

11. $V+V_1 = s$, $F+F_1 = s'$ Aufl. $a+b\sqrt{\frac{s'}{2\pi}}$; $ab = \sqrt{\frac{2s^2}{\pi s'}}$; daher sind a und b Wurzeln der Gleichung $x^2 - \sqrt{\frac{s'}{2\pi}}\,x + \sqrt{\frac{2s^2}{\pi s'}} = 0$.

12. $V+V_1 = s$, M. Aufl. $a+b = \frac{2s}{M}$ und $ab = \frac{M}{2\pi}$; daher sind a und b Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{2s}{M}x + \frac{M}{2\pi} = 0$.

13. $V-V_1 = d$, M. Aufl. $b-a = \frac{2d}{M}$, $ab = \frac{M}{2\pi}$; daher $b = \frac{d}{M} + \sqrt{\frac{d^2}{M^2} + \frac{M}{2\pi}}$ und $a = -\frac{d}{M} + \sqrt{\frac{d^2}{M^2} + \frac{M}{2\pi}}$.

c) Berechnung eines Hohlcylinders. Das Volumen des inneren Cylinders werde mit V, das des äußeren mit V_1 und das der Röhre mit J bezeichnet; ferner der Inhalt der ringförmige Grundfläche mit g, der Mantel des inneren Cylinders mit M, der des äußeren mit M_1, der Inhalt der Gesamtoberfläche mit F und die Wanddicke mit d. Bezeichnet man noch den Radius des inneren Cylinders mit r, den des äußeren mit r_1 und die Höhe mit h, so sind die fehlenden Stücke zu berechnen, wenn gegeben

14. V_1, V, d. Aufl. $h = \frac{(\sqrt{V_1} - \sqrt{V})^2}{\pi d^2}$; $r = \frac{d\sqrt{V}}{\sqrt{V_1} - \sqrt{V}}$.

15. V_1, V, g. Aufl. $h = \frac{V_1 - V}{g}$.

16. V_1, V, F. Aufl. $2\sqrt{\pi}\,(\sqrt{V_1} + \sqrt{V})\,h\sqrt{h} + 2(V_1 - V) = Fh$.

17. M_1, M, d. Aufl. $h = \frac{M_1 - M}{2\pi d}$.

18. M_1 M, g. Aufl. $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1^2 - M}{\pi g}}$.

19. M_1, M, J. Aufl. $h = \frac{M_1^2 - M^2}{4\pi J}$.

20. J, g, M. Aufl. $h = \frac{J}{g}$; $r = \frac{gM}{2\pi J}$; $r_1 = \frac{\sqrt{g(4\pi J^2 + gM)}}{2\pi J}$.

21. J, g, F. Aufl. $h = \frac{J}{g}$; $r_1 + r = \frac{g(F-2g)}{2\pi J}$ und $r_1 - r = \frac{2J}{F-2g}$.

22. J, g, d. Aufl. $h = \frac{J}{g}$; $r_1 - r = d$; $r_1 + r = \frac{g}{\pi d}$.

23. J, h, F (21).
24. g, h, F (21).
25. J, h, d (22).
26. g, h, d (22).

27. F, d, h. Aufl. $r_1 - r = d$; $r_1 + r = \frac{F}{2\pi(d+h)}$.

28. F, r, r_1. Aufl. $h = \frac{F - 2\pi(r_1^2 - r^2)}{2\pi(r_1 + r)}$.

29. F, d, g. Aufl. $r_1 - r = d$, $r_1 + r = \frac{g}{\pi d}$; $h = \frac{d(F-g)}{2g}$.

Ist $M_1 = M + 2g$ d. h. der Mantel des äußeren Cylinders gleich dem des inneren und den beiden ringförmigen Grundflächen, so ist $2\pi r_1 h = 2\pi r h + 2\pi(r_1^2 - r^2)$, mithin $h = r_1 + r$.

30. $M_1 = M + 2g$, h, r. Aufl. $r_1 = h - r$.

31. $M_1 = M + 2g$, r_1, r. Aufl. $h = r_1 + r$.

32. $M_1 = M + 2g$, r, J. Aufl. $h^3 - 2rh^2 - \frac{J}{\pi} = 0$.

33. $M_1 = M + 2g$, h, g. Aufl. $r_1 + r = h$, $r_1 - r = \frac{g}{\pi h}$.

34. $M_1 = M + 2g$, h, d. Aufl. $r_1 + r = h$, $r_1 - r = d$.

35. $M_1 = M + 2g$, h, J. Aufl. $r_1 + r = h$, $r_1 - r = \frac{J}{\pi h^2}$.

36. $M_1 = M + 2g$, h, g. Aufl. wie 35, da $gh = J$.

37. $M_1 = M + 2g$, J, g (35)

38. $M_1 = M + 2g$, d, J. Aufl. $h = \sqrt{\frac{J}{\pi d}}$; $r_1 + r = h$, $r_1 - r = d$.

39. $M_1 = M + 2g$, V_1, V. Aufl. $r_1 = \frac{\sqrt{V_1}}{\sqrt[3]{\pi(\sqrt{V_1} + \sqrt{V})}}$;

$r = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt[3]{\pi(\sqrt{V_1} + \sqrt{V})}}$.

40. Der Radius des äußeren Cylinders betrage r_1 *cm* und die Höhe h *cm* Wie dick ist die Röhre, wenn sie p *gr* wiegt und aus einem Stoff vom specifischen Gewicht s besteht. Aufl. $p = [\pi r_1^2 h - \pi h(r_1 - d)^2]s$; mithin $d^2 - 2r_1 d + \frac{p}{\pi hs} = 0$.

d) Berechnung eines cylindrischen Bechers.

Das Volumen des äußeren Cylinders werde mit V_1 bezeichnet, das

des Hohlraums mit V, das Volumen des Bechers mit J, so daß also $V_1 - V = J$ ist; die Wand- und Bodendicke sei d. Ferner werde der Mantel des äußeren Cylinders mit M_1, seine Höhe mit h_1, und sein Radius mit r_1 bezeichnet; der Mantel des inneren Cylinders mit M, seine Höhe mit h und sein Radius mit r; die ringförmige obere Grundfläche mit g und die Gesamtoberfläche mit F. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen, wenn gegeben

41. M_1, M, d. Aufl. $2\pi dr^2 + (2\pi d^2 + M - M_1)\, r + Md = 0$.

42. F, d, r. Aufl. $F = 2\pi\,[r^2 + 2rh + (3r + h)\, d + 2d^2]$, woraus h zu berechnen ist.

43. F, d, h. Aufl. Aus der Formel in 42) ergiebt sich eine quadratische Gleichung für r.

44. F, r, h. Aufl. Aus der Formel in 42) ergiebt sich eine quadratische Gleichung für d.

45. J, d, h. Aufl. $J = \pi\,[rd\,(2h + r) + (h + 2r)\, d^2 + d^3]$, woraus sich eine quadrabratische Gleichung für r ergiebt.

46. J, d, r. Aufl. Aus der Formel in 45) ist h zu berechnen.

47. J, F, d. Aufl. $r = \frac{Fd - 2J}{2\pi d^2}$; dann ist h wie in 42) zu berechnen.

48. J, F, r. Aufl. $Fd - 2J = 2\pi rd^2$, also $d^2 - \frac{F}{2\pi r}\, d + \frac{J}{\pi r} = 0$; dann ist h wie in 42) zu berechnen.

e) Cylinderhufe. Von einem Körper, welcher von dem Halbkreise SRQ (SR Durchmesser und M Mittelpunkt), einer Ebene PRS (P ein Punkt des Mantels) und dem Cylindermantel RSPQ begrenzt wird, ist der Radius QM = r und die Höhe PQ = h gegeben; berechnet werden soll

49. die krumme Oberfläche O. Aufl. In den Halbkreis werde ein Teil eines regelmäßigen Polygons konstruiert, von dem eine Seite z. B. AB = s sein möge; legt man dann durch diese Seiten Normalebenen zur Grundfläche, so entstehen Trapeze wie z. B. ABUT mit der Mittellinie KG. Endlich lege man durch AT, GK, BU Normalebenen zu MQ, welche den Grundkreis in den Parallelen AD, GH und BC treffen und setze HM = x, KG = HL = y, so ist Trapez $UBAT = sy = \frac{shx}{r}$. Fällt man $AE \perp BC$ und setzt BE = z, GM = p, so ist $x = \frac{pz}{s}$, also $ABUT = \frac{phz}{r}$. Bezeichnet man nun die z der verschiedenen Trapeze mit $z_1, z_2, \ldots$, so ist die Oberfläche des Prismas, wenn dieses 2n Seitenflächen hat: $O = \frac{2ph}{r}$

$(z_1 + z_2 + \ldots z_n) = 2ph$. Je größer n wird, desto mehr nähert sich p dem Radius r, also ist $O = 2rh$.

50. das Volumen V. Aufl. Legt man durch M und die einzelnen Prismenkanten Ebenen, durch welche der Körper in pyramidale Stücke zerschnitten wird, deren gemeinsame Höhe r und deren Grundflächen die Trapeze sind, welche das Prisma begrenzen, so ist $V = \frac{2}{3} r^2 h$.

§ 11.

Kegel.

a) Das Volumen V eines geraden Kegels zu berechnen

1. aus der Grundfläche G und dem Mantel M. Aufl. $r^2 = \frac{G}{\pi}$; $h = \sqrt{\frac{M^2 - G^2}{\pi G}}$; also $V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{G(M^2 - G^2)}{\pi}}$.

2. aus der Gesamtoberfläche $G + M = a$, wenn derselbe gleichseitig ist. Aufl. $r = \sqrt{\frac{a}{3\pi}}$; $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$; $V = \frac{a}{18}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

3. aus dem Mantel M und der Seitenlinie s. Aufl. $V = \frac{M^2 \sqrt{\pi^2 s^4 - M^2}}{3\pi^2 s^3}$.

4. wenn der abgewickelte Mantel ein Sektor mit dem Radius s und Centriwinkel α ist. Aufl. $r = \frac{s\alpha}{360^0}$ und $V = \frac{1}{3}\pi s^3 \left(\frac{\alpha}{360^0}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360^0}\right)^2}$. Ist der Sektor ein Quadrant, also $\alpha = 90^0$, so ist $V = \frac{\pi s^3 \sqrt{15}}{192}$.

5. wenn der abgewickelte Mantel ein Sektor von dem Inhalt M und dem Centriewinkel α ist. Aufl. $s = \sqrt{\frac{M}{\pi} \cdot \frac{360}{\alpha}}$; $r = \sqrt{\frac{M}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{360}}$; $V = \frac{M}{3}\sqrt{\frac{M}{\pi}}\sqrt{\frac{\alpha}{360}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{360}\right)^2\right)}$. Ist $\alpha = 90^0$, so ist $s = 2\sqrt{\frac{M}{\pi}}$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{\pi}}$; $V = \frac{M}{24}\sqrt{\frac{15M}{\pi}}$.

Einen geraden Kegel (x, y) zu berechnen, dessen Volumen ein Maximum werden soll, wenn gegeben

6. der Mantel M. Aufl. $x = \sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$; $y = \sqrt{\frac{2M}{\pi\sqrt{3}}}$.

7. die Seitenlinie s. Aufl. $y = \frac{s}{\sqrt{3}}$; $x = s\sqrt{\frac{2}{3}}$.

8. die Gesamtoberfläche F. Aufl. $y = \sqrt{\frac{2F}{\pi}}$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

Einen geraden Kegel (x, y) zu berechnen, dessen Volumen V gegeben ist, wenn ein Minimum werden soll

9. sein Mantel. Aufl. $x = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; $y = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$.

10. seine Seitenlinie Aufl. $y = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$; $x = \sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{2}}{\pi}}$.

11. seine Gesamtoberfläche. Aufl. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$; $y = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$.

12. Aus einem durch den Radius s gegebenen Kreis soll ein Sektor so geschnitten werden, daß wenn der Rest zu einem Kegelmantel zusammengebogen wird, das Volumen des Kegels (y, z) ein Maximum wird. Aufl. Wird der konvexe Centriwinkel, welcher nach dem Ausschneiden des Sektors übrig bleibt, mit $2\pi x$ bezeichnet, so ist $y = xs$; also $\text{Max} = \frac{1}{3}\pi x^2 s^2\sqrt{s^2 - x^2 s^2}$, woraus sich für den Fall des Maximums $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ergiebt; daher $y = s\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $z = s\sqrt{\frac{1}{3}}$.

13. Den Mantel eines gleichseitigen Kegels aus dem Volumen V desselben zu berechnen. Aufl. Ist x der Radius der Grundfläche, so ist die Seitenlinie $2x$ und die Höhe $x\sqrt{3}$. Also $M = 2\sqrt[3]{3\pi V^2}$.

14. Einen geraden Kegel (x, y) zu berechnen, dessen Volumen V gegeben ist, wenn sein Mantel n mal so groß wie seine Grundfläche ist. Aufl. Die Seitenlinie z ist $= nx$; $x = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{n^2-1}}}$; $y = \sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{n^2-1}}{\pi}}$.

15. Einen geraden Kegel (x, y) zu berechnen aus dem Volumen V und dem Mantel M. Aufl. $y^3 - \frac{M^2}{3V\pi}y^2 + \frac{3V}{\pi} = 0$.

16. Einen geraden Kegel (x, y) zu berechnen aus dem Volumen V und der Seitenlinie s. Aufl. $y^3 - s^2 y + \frac{3V}{\pi} = 0$.

In den folgenden Aufgaben soll der Inhalt desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, welches man durch einen Achsenschnitt des geraden Kegels erhält, mit A bezeichnet werden.

Einen geraden Kegel zu berechnen aus

17. A und dem Volumen V. Aufl. $r = \frac{3V}{\pi A}$, $h = \frac{\pi A^2}{3V}$.

18. A und dem Mantel M. Aufl. $r = \sqrt[4]{\frac{M^2 - \pi^2 A^2}{\pi^2}}$; $h = \frac{A}{r}$.

19. A und der Oberfläche F. Aufl. $r = \sqrt{\frac{F^2 - \pi^2 A^2}{2\pi F}}$; $h = \frac{A}{r}$.

b) Berechnung der geraden Kegel, welche durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um seine Seiten entstehen. (vergl. § 13, b.)

Das rechtwinklige Dreieck sei ABC; die Katheten BC und AC werden resp. mit a und b ($a > b$), die Hypotenuse AB mit c bezeichnet, die Höhe CD mit h, BD mit p, AD mit q; $\angle B = ACD$ mit φ und der Inhalt mit Δ.

Rotiert das Dreieck um a, so werde das Volumen des geraden Kegels mit V_a, sein Mantel mit M_a, seine Oberfläche mit F_a bezeichnet.

Bei der Rotation um b sei das Volumen V_b, der Mantel M_b, die Oberfläche F_b.

Bei der Rotation um c sei das Volumen V_c, das Volumen des durch Rotation des Dreiecks BDC erzeugten Kegels V_p und sein Mantel M_p; das Volumen des durch Rotation des Dreiecks ADC erzeugten Kegels V_q und sein Mantel M_q. Dann ist

$$V_a = \tfrac{1}{3}\pi ab^2 = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi^2 \cos\varphi.$$

$$V_b = \tfrac{1}{3}\pi a^2 b = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi \cos\varphi^2.$$

$$V_c = \tfrac{1}{3}\pi ch^2 = \tfrac{1}{3}\pi abh = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}} = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2.$$

$$V_p = \tfrac{1}{3}\pi h^2 p = \frac{\pi a^4 b^2}{3c^3} = \frac{\pi a^4 b^2}{3(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi^2 \cos\varphi^4.$$

$$V_q = \tfrac{1}{3}\pi h^2 q = \frac{\pi a^2 b^4}{3c^3} = \frac{\pi a^2 b^4}{3(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \tfrac{1}{3}\pi c^3 \sin\varphi^4 \cos\varphi^2.$$

$$M_a = \pi bc = \pi b\sqrt{a^2+b^2} = \pi c^2 \sin\varphi.$$

$$M_b = \pi ac = \pi a\sqrt{a^2+b^2} = \pi c^2 \cos\varphi.$$

$$M_p = \pi ah = \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi c^2 \sin\varphi \cos\varphi^2.$$

$$M_q = \pi bh = \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi c^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi.$$

$$M_c = \pi h(a+b) = \frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi c^2 \sin\varphi \cos\varphi (\sin\varphi + \cos\varphi).$$

$$F_a = \pi b\left(b + \sqrt{a^2+b^2}\right) = \pi c^2 \sin\varphi(1+\sin\varphi).$$

$$F_b = \pi a\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) = \pi c^2 \cos\varphi(1+\cos\varphi).$$

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

20. V_a, V_b. Aufl. $\pi ab = \sqrt{9\pi V_a V_b}$; daher $a = \frac{3V_b}{\sqrt[3]{9\pi V_a V_b}}$; $b = \frac{3V_a}{\sqrt[3]{9\pi V_a V_b}}$.

21. V_a, V_c. Aufl. $a = \sqrt[3]{\frac{3V_a V_c^2}{V_a^2 - V_c^2}}$; $b = \sqrt[6]{\frac{9V_a^2(V_a^2 - V_c^2)}{V_c^2}}$.

22. V_p, V_q. Aufl. $a = \sqrt[6]{\frac{9V_p(V_p+V_q)^3}{V_q^2}}$; $b = \sqrt[6]{\frac{9V_q(V_p+V_q)^3}{V_p^2}}$.

23. M_a, M_b. Aufl. $a = \frac{M_b}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{M_a^2+M_b^2}}$; $b = \frac{M_a}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{M_a^2+M_b^2}}$.

Oder: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_a}{M_b}$; $c = \sqrt{\frac{M_a}{\pi \sin\varphi}}$.

24. F_a, F_b. Aufl. Wird $a = bz$ und $\frac{F_a}{F_b} = n$ gesetzt, so ergiebt sich $z = \frac{(n+1)^2 + (n-1)\sqrt{(n+1)^2+4n}}{4n}$, $b = \sqrt{\frac{F_a}{\pi(1+\sqrt{z^2+1})}}$; $a = bz$. Oder $\sin(45^0 - \varphi) = \frac{F_b - F_a}{(F_b+F_a)\sqrt{2}}$, auch $\sin 2\varphi = \frac{4F_aF_b}{(F_b+F_a)^2}$ und $c = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{\frac{F_b}{2\pi\cos\varphi}}$.

25. M_p, M_q. Aufl. $a = \sqrt[4]{\frac{M_p^2(M_p^2+M_q^2)}{\pi^2 M_q^2}}$, $b = \sqrt[4]{\frac{M_q^2(M_p^2+M_q^2)}{\pi^2 M_p^2}}$.

26. M_a, M_c. Aufl. Wird $\frac{M_a}{M_c} = n$ und $\frac{b}{a} = z$ gesetzt, so ist $z = \frac{1}{2}(n \pm \sqrt{n^2+4n-4})$; $a = \sqrt{\frac{M_a}{\pi z\sqrt{1+z^2}}}$. Oder $\cos(2\varphi - 45^0) = \frac{2M_c - M_a}{M_a\sqrt{2}}$.

27. c, $V_a + V_b = s$. Aufl. Wird $ab = x$ gesetzt, so ist $x^3 + \frac{c^2}{2}x^2 + \frac{9s^2}{2\pi^2} = 0$.

28. $a + b = s'$, $V_a + V_b = s$. Aufl. $ab = \frac{3s}{\pi s'}$.

29. c, V_c. Aufl. $a^2 + b^2 = c^2$, $ab = \sqrt{3cV_c}$.

30. c, $M_a + M_b = s$. Aufl. $a + b = \frac{s}{\pi c}$, $a^2 + b^2 = c^2$.

31. $a + b = s'$, $M_a + M_b = s$. Aufl. $c = \frac{s}{\pi s'}$.

32. c, M_c. Aufl. Wird $ab = x$ gesetzt, so ist $x^3 + \frac{c^2}{2} x^2 - \frac{c^2 M_c^2}{2\pi^2} = 0$.

33. M_c, $a + b = s$. Aufl. Wird $ab = x$ gesetzt, so ist $x^2 + \frac{2M_c^2}{\pi^2 s^2} x - \frac{M_c^2}{\pi^2} = 0$.

34. c, $F_a + F_b = s$. Aufl. $\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{s}{\pi c^2} - 1$.

35. $F_a + F_b = s$, $a + b = s'$. Aufl. Wird $\sin\varphi + \cos\varphi = x$ gesetzt, so ergiebt sich $x^2 - \frac{\pi s'^2}{s} x - \frac{\pi s'^2}{s} = 0$.

36. $\triangle$, V_c. Aufl. $ab = 2\triangle$ und $a^2 + b^2 = \frac{16\pi^2 \triangle^4}{9 V_c^2}$. Oder $c^2 \sin 2\varphi = 4\triangle$ und $c^3 \sin 2\varphi^2 = \frac{12 V_c}{\pi}$; daher $\sin 2\varphi = \frac{9 V_c^2}{4\pi^2 \triangle^3}$.

37. $\triangle$, V_a. Aufl. $b = \frac{3 V_a}{2\pi\triangle}$.

38. $\triangle$, M_a. Aufl. $b = \sqrt[4]{\frac{M_a^2}{\pi^2} - 4\triangle^2}$. Oder $\cos\varphi = \frac{2\pi\triangle}{M_a}$.

39. $\triangle$, M_c. Aufl. $x = 2M_c \sqrt{\frac{\triangle}{M_c - 4\pi^2\triangle^2}}$. Oder $\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{M_c}{2\pi\triangle}$.

40. F_a, $\triangle$. Aufl. $b = \sqrt{\frac{F_a^2 - 4\pi^2\triangle^2}{\pi F_a}}$. Oder $F_a \cos\varphi - 2\pi\triangle \sin\varphi = 2\pi\triangle$.

41. $\triangle$, $V_a + V_b = s$. Aufl. $ab = 2\triangle$ und $a + b = \frac{3s}{2\pi\triangle}$.

42. $\triangle$, $M_a + M_b = s$. Aufl. $c^4 + 4\triangle c^2 - \frac{s^2}{\pi^2} = 0$. Oder $\sin 2\varphi^2 - \frac{16\pi^2\triangle^2}{s^2} \sin 2\varphi - \frac{16\pi^2\triangle^2}{s^2} = 0$.

§ 12.

Abgestumpfter Kegel.

Das Volumen des abgestumpften geraden Kegels werde mit v, sein Mantel mit M, die Höhe mit h, die Seitenlinie mit s bezeichnet, die Radien der Grundflächen seien r und ρ, und die Summe der Grundflächen $\pi r^2 + \pi\rho^2 = \pi a^2$.

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen, wenn gegeben

1. v, πa^2, h. Aufl. $r+\rho=\sqrt{\frac{6v}{\pi h}-a^2}$; $r\rho=\frac{3v}{\pi h}-a^2$.

2. M, s, h. Aufl. $r+\rho=\frac{M}{\pi s}$; $r-\rho=\sqrt{s^2-h^2}$.

3. M, s, πa^2. Aufl. $r+\rho=\frac{M}{\pi s}$; $r^2+\rho^2=a^2$.

4. s, h, πa^2. Aufl. $r-\rho=\sqrt{s^2-h^2}$; $r^2+\rho^2=a^2$.

5. v, s, h. Aufl. $r\rho=\frac{v}{\pi h}-\frac{s^2-h^2}{3}$; $r-\rho=\sqrt{s^2-h^2}$.

6. v, M, h. Aufl. $s^4-\left(h^2+\frac{12v}{\pi h}\right)s^2+\frac{3M^2}{\pi^2}=0$.

7. M, h, πa^2. Aufl. $s^4-(2a^2+h^2)\,s^2+\frac{M^2}{\pi^2}=0$.

8. v, M, s. Aufl. $h^3-\left(\frac{3M^2}{\pi^2 s^2}+s^2\right)h+\frac{12v}{\pi}=0$.

9. v, s, πa^2. Aufl. $h^3-(s^2-3a^2)h-\frac{6v}{\pi}=0$.

Einen abgestumpften Kegel, welcher durch die Radien r und ρ der Grundflächen und die Höhe h gegeben ist, durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene

10. zu halbieren. Aufl. Ist x der Radius des Querschnittes, y die Höhe des an der größeren Grundfläche liegenden Teiles, z die Höhe des Ergänzungskegels, so ist $z=\frac{h\rho}{r-\rho}$, $y=\frac{h(r-x)}{r-\rho}$; und $x=\sqrt[3]{\frac{r^3+\rho^3}{2}}$.

11. im Verhältnis p:q zu teilen. Aufl. (Bezeichnungen wie in Nr. 10). Wird der an der größeren Grundfläche liegende Teil mit I, der an der kleineren mit II bezeichnet, so ist $I:I+II=p:p+q$; mithin $x=\sqrt[3]{\frac{qr^3+p\rho^3}{p+q}}$.

Den Mantel eines abgestumpften geraden Kegels, welcher durch die Radien r und ρ der Grundflächen und die Seitenlinie s gegeben ist, durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene

12. zu halbieren. Aufl. x sei der Radius des Querschnittes, y die Seitenlinie des an der größeren Grundfläche liegenden Stückes und z die des Ergänzungskegels; dann ist $z=\frac{\rho s}{r-\rho}$; $y=\frac{s(r-x)}{r-\rho}$ und $x=\sqrt{\frac{r^2+\rho^2}{2}}$.

13. im Verhältnis p : q zu teilen. Aufl. (Bezeichnungen wie in Nr. 12). Wird der Mantel des an der größeren Grundfläche liegenden Kegels mit I, der des an der kleineren Grundfläche liegenden mit II bezeichnet, so ist $I : I + II = p : p + q$; woraus sich $x = \sqrt{\frac{qr^2 + p\rho^2}{p+q}}$ ergiebt.

14. Wie groß ist die Höhe eines abgestumpften geraden Kegels, dessen Grundflächenradien r und ρ sind, und in welchem der Mantel gleich der Summe der Grundflächen ist. Aufl. $h = \frac{2r\rho}{r+\rho}$.

15. Gegeben ein abgestumpfter Kegel (r, ρ, h). In welcher Entfernung von der Grundfläche πr^2 muß ein Schnitt parallel den Grundflächen gelegt werden, damit derselbe mittlere Proportionale zwischen den beiden Grundflächen ist. Aufl. $\frac{h\sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{\rho}}$.

§ 13.

Schnitte durch den Kegel. Kegel und abgestumpfter Kegel.

a) Durch einen Achsenschnitt werde aus einem geraden Kegel das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe CG geschnitten. Eine Ebene parallel der Grundfläche schneide AC in D und CG in F. Es werde nun CG mit h, AG mit r, AC mit s, CF mit x, DF mit y und CD mit z bezeichnet. Da sich $x : y : z = h : r : s$ verhält, so werde, um nur eine Unbekannte einzuführen, $x = ht$, $y = rt$, $z = st$ gesetzt. Es soll t berechnet werden, wenn zwei der Stücke h, r, s gegeben sind und außerdem

1. *Keg* AGC = 2 *Keg* DFC. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
2. *Mant* CA = 2 *Mant* CD. Aufl. $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
3. *Obst.* DFC = *Obst.* AGFD. Aufl. $t = \sqrt{\frac{s+r}{2s}}$.
4. *Kreis* FD = *Mant* AD. Aufl. $t = \sqrt{\frac{s}{r+s}}$.
5. *Kreis* FD + *Kreis* GA = *Mant* AD. Aufl. $t = \sqrt{\frac{s-r}{s+r}}$.
6. *Kreis* FD : *Mant* AD = *Mant* AD : *Kreis* GA. Aufl. $t = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2s}$.

7. *Mant* CD : *Kreis* FD = *Kreis* FD : *Mant* AD. Aufl. $t = \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}}$.

b) Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\angle A = 90^0$), in welchem $AD \perp BC$ und $DE \parallel CA$ ist, rotiert um AB, so daß also ein gerader Kegel entsteht (vergl. § 11, b). Gegeben ist die Höhe des Kegels $AB = h$ und $BE = q$; zu berechnen

8. *Mant* BD. Aufl. $\pi q \sqrt{h(h-q)}$.

9. *Mant* CD. Aufl. $\frac{\pi (h^2 - q^2) \sqrt{h(h-q)}}{q}$.

10. *Mant* BC. Aufl. $\frac{\pi h^2 \sqrt{h(h-q)}}{q}$.

11. *Obfl.* BDE. Aufl. $\pi q (h - q + \sqrt{h(h-q)})$.

12. *Obfl.* BCA. Aufl. $\frac{\pi h^2 (h - q + \sqrt{h(h-q)})}{q}$.

13. *Obfl.* CAED. Aufl. $\frac{\pi (h-q)(h^2 + q^2 + (h+q)\sqrt{h(h-q)})}{q}$.

14. *Keg* BED. Aufl. $\frac{1}{3} \pi q^2 (h - q)$.

15. *Keg* BCA. Aufl. $\frac{\pi h^3 (h-q)}{3q}$.

16. *Abgest. Keg* CAED. Aufl. $\frac{\pi (h-q)(h^3 - q^3)}{3q}$.

Gegeben ist $BA = h$; berechnet werden soll $BE = x$, wenn

17. *Mant* BD = n *Mant* CD. Aufl. $x = h \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Beisp. $n = \frac{16}{9}$; $x = \frac{4}{5} h$.

18. *Mant* BD = n *Mant* BC. Aufl. $x = h \sqrt{n}$. Beisp. $n = \frac{9}{16}$, $x = \frac{3}{4} h$.

19. *Mant* BD = n. *Obfl.* BDE. Aufl. $x = \frac{2n-1}{n^2} h$. Beisp. $n = \frac{8}{5}$, $x = \frac{5}{9} h$.

20. *Mant* BD = n *Kreis* DE. Aufl. $x = \frac{n^2 - 1}{n^2} h$. Beisp. $n = \frac{8}{2}$, $x = \frac{5}{9} h$.

21. *Mant* CD = n *Mant* BC. Aufl. $x = h \sqrt{1 - n}$. Beisp. $n = \frac{11}{36}$, $x = \frac{5}{6} h$.

22. *Mant* CD = *Kreis* AC. Aufl. $x = \frac{1}{2} h (\sqrt{5} - 1)$; also ist AB in E stetig zu teilen, so daß BE der größere Abschnitt ist.

23. *Mant* BC = n *Obſl.* BCA. Aufl. $x = \frac{2n-1}{n^2} h$.

24. *Obſl.* BDE = n *Obſl.* BCA. Aufl. $x = h\sqrt{n}$.

25. *Obſl.* BDE = n *Kreis* ED. Aufl. $x = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} h$.

26. *Keg* BDE = n *Keg* BCA. Aufl. $x = h\sqrt[3]{n}$.

27. *Keg* BDE = n *Vol* ACDE. Aufl. $x = h\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}$.

28. *Keg* BCA = n *Vol* ACDE. Aufl. $x = h\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}$.

c) Ein gerader Kegel, deſſen Achſenſchnitt ein gleichſeitiges Dreieck iſt, wird durch eine Ebene parallel der Grundfläche ſo durchſchnitten, daß ſich die Mäntel der beiden Teile wie 1:2 verhalten. Wie verhält ſich der Mantel des abgeſtumpften Kegels

29. zur Summe der beiden Grundflächen, wenn der kleinere Mantel der Spitze zunächſt liegt. Aufl. Der Radius der Grundfläche ſei r, der des Schnittes ρ; dann iſt der Mantel des ganzen Kegels $= 2\pi r^2$ und der des abgeſchnittenen $2\pi\rho^2$; und da $2\pi\rho^2 = \frac{2}{3}\pi r^2$, ſo iſt $\rho = \frac{r}{\sqrt{3}}$; mithin der Mantel des abgeſchnittenen Kegels $= \frac{2}{3}\pi r^2$ und der Mantel des abgeſtumpften Kegels $= \frac{4}{3}\pi r^2$. Die Summe der beiden Grundflächen iſt $\pi r^2 + \pi\rho^2 = \frac{4}{3}\pi r^2$, alſo gleich dem Mantel des abgeſtumpften Kegels.

30. zu ſeiner oberen Grundfläche, wenn der größere Mantel der Spitze zunächſt liegt. Aufl. Es iſt $2\pi\rho^2 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^2$, alſo $\rho = r\sqrt{\frac{2}{3}}$; der Mantel des abgeſchnittenen Kegels $\frac{4}{3}\pi r^2$ und der des abgeſtumpften Kegels $\frac{2}{3}\pi r^2$, alſo gleich der oberen Grundfläche desſelben.

Auf derſelben Grundfläche mit dem Radius r ſtehen ein gerader Kegel und ein abgeſtumpfter gerader Kegel; beide haben dieſelbe Höhe. Wie groß iſt der Radius ρ der oberen Grundfläche des abgeſtumpften Kegels,

31. wenn ſein Volumen doppelt ſo groß iſt, wie das des geraden Kegels? Aufl. $\rho = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; alſo iſt ρ der größere Abſchnitt des ſtetig geteilten Radius r.

32. wenn ſich ſein Volumen zu dem des Kegels wie p:q verhält? Aufl. $\rho = \frac{r}{2}\left(\sqrt{\frac{4p-3q}{q}} - 1\right)$.

d) In einen geraden Kegel (r, h), dessen Achsenschnitt das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe CD ist, soll ein gerader Kegel so konstruiert werden, daß seine Spitze in D fällt, während die Grundfläche den Mantel des gegebenen Kegels berührt; der Achsenschnitt des letzteren sei BDB'; BB' treffe CD in E. Wird nun CE mit x, BE mit y bezeichnet, so können wir $x = ht$, $y = rt$ setzen. Dann sollen x und y berechnet werden, wenn

33. *Keg* DBC:*Keg* ADC = m:n. Aufl. $t = \sqrt{\frac{m}{n}}$;

daher $x = h\sqrt{\frac{m}{n}}$, $y = r\sqrt{\frac{m}{n}}$.

34. *Keg* BED:*Keg* ADC = m:n. Aufl. $t^3 - t^2 + \frac{m}{n} = 0$.

35. *Vol* ADB:*Keg* BED = m:n. Aufl. $1 - t^2 : t^2(1-t) = m:n$;

daher $t^2 - \frac{n}{m}t - \frac{n}{m} = 0$.

36. *Keg* BED soll ein Maximum werden. Aufl. $y = \frac{2}{3}r$; $x = \frac{2}{3}h$.

§ 14.

Kugel und Kugelsektor.

a) Berechnung einer Hohlkugel.

Eine metallene Hohlkugel von dem äußeren Durchmesser 2r und der Wandstärke a soll zu einer anderen Hohlkugel so umgegossen werden, daß

1. der äußere Durchmesser 2ρ ist; wie groß ist die Wandstärke x?

Aufl. $x = \rho - \sqrt[3]{(r-a)^3 - r^2 + \rho^3}$.

2. die Wandstärke b ist; wie groß ist der äußere Durchmesser 2x?

Aufl. $2x = b - \sqrt{b^2 + \frac{4\,(r^3 - (r-a)^3 - b^3)}{3b}}$.

3. Wie groß ist die Wandstärke einer Hohlkugel, wenn ihr äußerer Durchmesser 2r ist, dieselbe aus einem Stoff vom specifischen Gewicht s besteht und in Wasser gelegt zur Hälfte einsinkt? Aufl. $s\left[\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-x)^3\right] = \frac{2}{3}\pi r^3$; $x = r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2s-1}{2s}}\right)$.

b) Berechnung eines Kugelsegmentes.

4. Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius r und ein Punkt, welcher vom Mittelpunkt die Entfernung a hat; wie groß ist die Kalotte, welche man von demselben überblicken kann? Aufl. $\frac{2\pi r^2(a-r)}{a}$.

5. Wie weit muß man sich von der Oberfläche einer Kugel, deren Radius r ist, entfernen, um eine Kalotte vom Inhalt c überblicken zu können? Aufl. $x = \frac{cr}{2\pi r^2 - c}$.

6. Die Kugelfläche wird durch eine Ebene in zwei Kalotten geteilt, von denen die eine n mal so groß ist wie die andere. Wie groß sind die Höhen derselben? Aufl. $\frac{2r}{n+1}$ und $\frac{2nr}{n+1}$.

Der Durchmesser 2r einer Kugel ist in zwei Teile geteilt, von denen der eine n mal so groß ist wie der andere. Durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zu dem Durchmesser gelegt; wie groß sind

7. die beiden Kalotten, in welche die Kugelfläche geteilt wird? Aufl. $4\pi r^2 \frac{1}{n+1}$ und $4\pi r^2 \frac{n}{n+1}$.

8. die beiden Segmente, in welche die Kugel geteilt wird? Aufl. $\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3n+1}{(n+1)^3}$ und $\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{n^2(n+3)}{(n+1)^3}$.

9. Über einem Kreise vom Radius r ist eine Halbkugel konstruiert; in welcher Entfernung x von der Grundfläche ist ein Schnitt parallel zu derselben zu legen, damit die Kalotte gleich der Summe der Zone und Grundfläche ist? Aufl. Es ist $2\pi r(r-x) = 2\pi rx + \pi r^2$; mithin $x = \frac{1}{4}r$.

Der Durchmesser einer Kugel ist stetig geteilt und durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zum Durchmesser gelegt. Wie groß sind

10. die beiden Kalotten? Aufl. $2\pi r^2(\sqrt{5}-1)$ und $2\pi r^2(3-\sqrt{5})$.

11. die beiden Segmente? Aufl. $\frac{2}{3}\pi r^3(17-7\sqrt{5})$ und $\frac{2}{3}\pi r^3(7\sqrt{5}-15)$.

Der Radius r einer Kugel ist stetig geteilt und durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht zum Radius gelegt. Wie groß sind

12. die Kalotten, wenn der größere Abschnitt dem Mittelpunkt zunächst liegt? Aufl. $\pi r^2(3-\sqrt{5})$ und $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$.

13. die Segmente, wenn der größere Abschnitt dem Mittelpunkt zunächst liegt? Aufl. $\frac{\pi}{6}r^3(3-\sqrt{5})$ und $\frac{\pi}{6}r^3(5+\sqrt{5})$.

14. die Kalotten, wenn der größere Abschnitt Höhe der einen Kalotte ist? Aufl. $\pi r^2(\sqrt{5}-1)$ und $\pi r^2(5-\sqrt{5})$.

15. die beiden Segmente, wenn der größere Abschnitt Höhe des einen Segmentes ist? Aufl. $\frac{\pi}{6}r^3(13-5\sqrt{5})$ und $\frac{\pi}{6}r^3(5\sqrt{5}-5)$.

16. Wie groß sind die Zonen der Erde, wenn der Erdradius r = 859,5 Meilen und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$ gerechnet

wird? Aufl. Jede kalte Zone $= 4\pi r^2 \sin\frac{\varepsilon^2}{2} = 383677{,}3$ qMl.; jede gemäßigte Zone $= 2\sqrt{2}\,\pi r^2 \cos(45^0 + \varepsilon) = 2\,410\,255$ qMl.; die heiße Zone $= 4\pi r^2 \sin\varepsilon = 3\,695\,510$ qMl.

17. Die Höhe eines Kugelsegmentes zu berechnen, wenn sein Volumen V und der Kugelradius r gegeben sind. Aufl. $h^3 - 3rh^2 + \frac{3V}{\pi} = 0$.

18. Eine Halbkugel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene zu halbieren. Aufl. Die Höhe h des Segmentes wird gefunden aus der Gleichung $h^3 - 3rh^2 + r^3 = 0$.

19. Eine Kugel ist durch eine Ebene in zwei Segmente geteilt, von denen das eine nmal so groß ist wie das andere. Wie groß sind die Höhen beider? Aufl. Zur Berechnung der Höhe des einen dient die Gleichung $h^3 - 3rh^2 + \frac{4r^3}{n+1} = 0$.

20. Wie tief sinkt eine Kugel vom Radius r und dem specifischen Gewicht s in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewicht s' ein? Aufl. Die Höhe x des eintauchenden Segmentes ist zu berechnen aus der Gleichung

$$x^3 - 3rx^2 + \frac{4r^3 s}{s'} = 0.$$

Die Höhe h des Kugelsegmentes zu berechnen aus

21. V und dem Radius ρ der Grundfläche. Aufl. $h^3 + 3\rho^2 h - \frac{6V}{\pi} = 0$.

22. V und der Kalotte C. Aufl. $h^3 - \frac{3C}{2\pi}h + \frac{3V}{\pi} = 0$.

23. V und der Oberfläche F des Segmentes. Aufl. $h^3 - \frac{3F}{\pi}h + \frac{12V}{\pi} = 0$.

24. der Kalotte C und dem Radius ρ der Grundfläche. Aufl. $h = \sqrt{\frac{C - \pi\rho^2}{\pi}}$; $r = \frac{C}{2\sqrt{\pi(C - \pi\rho^2)}}$.

c) Berechnung eines Kugelsektors.

Der Kugelradius sei r, die Höhe des Kugelsegmentes h, der Radius der Grundfläche des Segmentes sei ρ, das Volumen des Sektors V, das des Segmentes S, des Kegels K, der Inhalt der Kalotte C, des Kegelmantels M, die Oberfläche des Sektors sei F, des Segmentes F_1 und des Kegels F_2. Dann ist

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$

$S = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$

$K = \frac{1}{3}\pi h (2r - h)(r - h).$

$C = 2\pi rh$

$M = \pi r \sqrt{h(2r - h)}.$

$F = \pi r (2h + \sqrt{h(2r - h)}).$

$F_1 = \pi h (4r - h).$

$F_2 = \pi r \sqrt{h(2r - h)} + \pi h (2r - h).$

Mit Hülfe dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

25. V, C. Aufl. $r = \frac{3V}{C}$; $h = \frac{C^2}{6\pi V}$.

26. V, M. Aufl. $r^3 - \frac{M^2}{3\pi V} r^2 - \frac{3V}{4\pi} = 0.$

27. S, K. Aufl. Wird $r = hz$ gesetzt, so ist $\frac{3z - 1}{(2z - 1)(z - 1)} = \frac{S}{K}$, mithin $z = \frac{3(K + S) \pm \sqrt{(K + S)(9K + S)}}{4S}$.

28. C, M. Aufl. $rh = \frac{C}{2\pi}$ und $\frac{r}{h} = \frac{4M^2 + C^2}{2C^2}$; mithin $r = \sqrt{\frac{4M^2 + C^2}{4\pi C}}$ und $h = \sqrt{\frac{C^3}{\pi (4M^2 + C^2)}}$.

29. r und es soll $S = K$ sein. Aufl. $h = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, also $r - h = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$ d. h. gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Radius.

In den Aufgaben 30 bis 37 soll $\frac{K}{S} = \frac{30}{19}$ sein; dann ist $\frac{r}{h} = \frac{7}{2}$. Zur Lösung ist es zweckmäßig, wenn $r = 7t$, $h = 2t$ gesetzt wird.

Außer $K : S = 30 : 19$ ist noch gegeben

30. r. Aufl. $h = \frac{2}{7} r.$

31. h. Aufl. $r = \frac{7}{2} h.$

32. ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2\sqrt{6}}.$

33. V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{196\pi}}.$

34. C. Aufl. $t = \sqrt{\frac{C}{28\pi}}.$

35. M. Aufl. $t = \sqrt[4]{\frac{M^2}{1176\pi^2}}.$

36. F. Aufl. $t = \sqrt{\frac{F}{14\pi(2 + \sqrt{6})}}.$

37. der Radius e der Inkugel. Aufl. $e = \frac{r\rho}{r + \rho} = \frac{r\sqrt{h(2r - h)}}{r + \sqrt{h(2r - h)}}$; mithin $t = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{14\sqrt{6}} e.$

Anmerkung. Folgende Zahlen für $\frac{K}{S}$ liefern noch rationale Zahlen für $\frac{r}{h}$.

Für $\frac{K}{S}$ =	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{75}{17}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{65}$	$\frac{105}{23}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{30}{19}$	$\frac{22}{27}$
ist $\frac{r}{h}$ =	2	$\frac{4}{3}$	4	6	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	8	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$

38. r und es soll $M = C$ sein. Aufl. $h = \frac{2}{3} r$.

In den Aufgaben 39 bis 45 soll $\frac{M}{C} = \frac{m}{n}$ sein. Zur Lösung ist es, wie sich aus 39) ergiebt, zweckmäßig, wenn $r = (4m^2 + n^2)t$ und $h = 2n^2 t$ gesetzt wird. Außer $M:C = m:n$ ist noch gegeben

39. r. Aufl. $h = \frac{2n^2 r}{4m^2 + n^2}$.

40. h. Aufl. $r = \frac{(4m^2 + n^2)h}{2n^2}$.

41. ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{4mn}$.

42. V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi n^2 (4m^2 + n^2)^2}}$.

43. K. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3K}{16\pi m^2 n^2 (4m^2 - n^2)}}$.

44. S. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi n^4 (12m^2 + n^2)}}$.

45. Der Radius e der Inkugel. Aufl. $t = \frac{(2m + n)^2}{4mn(4m^2 + n^2)} e$.

46. Wie groß ist die Höhe h des zu einem Kugelsektor gehörenden Segmentes, wenn derselbe aus einem Stoff vom specifischen Gewicht s bestehend in Wasser gesetzt gerade mit dem Segment einsinkt? Aufl. Es ist $\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) = \frac{2}{3}\pi r^2 hs$, also $h = \frac{1}{2} r(3 - \sqrt{9 - 8s})$.

§ 15.

Kugel in einer Halbkugel und in einem Segment.

a) $AB = 4r$ sei ein Durchmesser der Halbkugel, C ihr Mittelpunkt. Die Senkrechte auf AB in C treffe die Halbkugel in G; über $CG = 2r$ als Durchmesser ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt M beschrieben. Die Ebene AGB schneidet also aus der Halbkugel den Halbkreis AGB und aus der Kugel einen Kreis mit dem Durchmesser CG. Durch den Punkt D auf CG werde eine Perpendikularebene zu CG gelegt, welche den Kreis in E und E', den Halbkreis in F und F' trifft. Wird nun GD mit x, DE mit y und DF mit z bezeichnet, so ist, wenn x gegeben, zu berechnen

1. *Sgm* EDG. Aufl. $\frac{1}{8}\pi x^2(3r-x)$.

2. *Sgm* EDC. Aufl. $\frac{1}{8}\pi(2r-x)^2(r+x)$.

3. *Sgm* FDG. Aufl. $\frac{1}{8}\pi x^2(6r-x)$.

4. *Kugelsch* ACDF. Aufl. $\frac{1}{6}\pi(2r-x)(12r^2+3z^2+(2r-x)^2) = \frac{1}{8}\pi(2r-x)(8r^2+4rx-x^2)$.

5. *Vol* FEG. Aufl. $\pi r x^2$.

6. *Vol* ACEF. Aufl. $\frac{16}{8}\pi r^3 - \frac{4}{8}\pi r^3 - \pi r x^2 = \pi r(4r^2-x^2)$.

7. *Ring* EF. Aufl. $\pi(z^2-y^2) = 2\pi r x$.

In den folgenden Aufgaben ist x zu berechnen, wenn

8. *Sgm* FDG : *Sgm* EDG $= m:n$. Aufl. $x = \frac{3r(m-2n)}{m-n}$. Bedingung $4n > m > n$.

9. *Kugelsch* ACDF : *Smg* EDC $= m:n$. Aufl. $x = \frac{m-4n+\sqrt{3(m-4n)(3m-4n)}}{2(m-n)}r$. Bedingung $m > 4n$.

10. *Vol* FEG $=$ *Vol* ACEF. Aufl. $x = r\sqrt{2}$.

11. *Ring* FE $=$ *Kal* CE. Aufl. $x = r$.

12. *Ring* FE $=$ *Zone* AF. Aufl. $x = \frac{4}{3}r$.

13. *Ring* FE $=$ *Kal* CE $+$ *Zone* AF. Aufl. $x = \frac{3}{2}r$.

14. *Ring* FE $+$ *Kreis* CA $=$ *Kal* CE $+$ *Zone* AF. Aufl. $x = r$.

15. *Sgm* FDG $=$ *Sgm* EDC. Aufl. $2x^3 - 9rx^2 + 4r^3 = 0$.

b) Über einem Kreise (Radius r) ist eine Halbkugel konstruiert und in dieselbe eine Vollkugel mit dem Radius $\frac{1}{2}r$; nun sind in die Halbkugel

16. vier Kugeln konstruiert, deren Mittelpunkte Ecken eines Quadrats sind und welche die Halbkugel, die Vollkugel und die Ebene berühren. Wie groß ist der Radius x einer Kugel? Aufl. Wird die Senkrechte, welche vom Mittelpunkt einer kleinen Kugel auf den auf der Ebene senkrechten Radius der Vollkugel gefällt ist, mit p bezeichnet, so ist $p^2 = \left(\frac{r}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{r}{2}-x\right)^2 = 2rx$ und $p^2 = (r-x)^2 - x^2 = r^2 - 2rx$; mithin $x = \frac{1}{4}r$.

17. vier Kugeln konstruiert, deren Mittelpunkte Ecken eines Quadrats sind und von denen jede eine der vier Kugeln in Nr. 16, die Halbkugel und die Ebene berührt. Wie groß ist der Radius y einer Kugel? Aufl. Wird die Senkrechte, welche vom Mittelpunkt einer kleinen Kugel auf den zur Ebene senkrechten Radius der benachbarten Kugel, deren Radius x ist, mit q bezeichnet, so ist $q^2 = (x+y)^2 -$

$(x-y)^2 = 4xy$. Verbindet man den Mittelpunkt der Halbkugel mit dem Mittelpunkt einer kleinen Kugel, so ist $(r-y)^2 + y^2 = (p+q)^2$; mithin $\frac{1}{2}r - 3y = \sqrt{2ry}$ und $y^2 - \frac{5}{9}ry + \frac{1}{36}r^2 = 0$, also $y = \frac{1}{18}r$.

e) Vergl. § 41, e. In ein Kugelsegment ist die größte Berührungskugel konstruiert, welche mithin die Grundfläche des Segmentes in ihrem Mittelpunkt berührt. Der Radius der großen Kugel werde mit r, das Volumen des Segmentes mit V, seine Kalotte mit C, seine Oberfläche mit F, seine Grundfläche mit G, der Radius derselben mit ρ und seine Höhe mit h bezeichnet, das Volumen der Berührungskugel mit K und ihre Oberfläche mit A. In den folgenden Aufgaben ist nun h oder r zu berechnen, wenn gegeben

18. $V : K = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{6nr}{m+2n}$.

19. $V : K = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{h(m+2n)}{6n}$.

20. $V : K = m : n$, $C - G = d$. Aufl. $h = \sqrt{\frac{d}{\pi}}$; dann wie 19.

In den Aufgaben 21 bis 23 setze man $h = 6nt$, $r = (m+2n)t$.

21. $V : K = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2\sqrt{3n(m-n)}}$.

22. $V : K = m : n$, C. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{3\pi n(m+2n)}}$.

23. $V : K = m : n$, F. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{3\pi n(2m+n)}}$.

24. $C : A = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{2nr}{m}$.

In den Aufgaben 25 bis 27 setze man $h = 2nt$, $r = mt$.

25. $C : A = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2\sqrt{n(m-n)}}$.

26. $C : A = m : n$, V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi n^2(3m-2n)}}$.

27. $C : A = m : n$, F. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi n(2m-n)}}$.

28. $C : G = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{2(m-n)r}{m}$.

29. $C : G = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{mh}{2(m-n)}$.

30. $C : G = m : n$, V. Aufl. $h = \sqrt[3]{\frac{6V(m-n)}{\pi(m+2n)}}$.

31. $G : A = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{2nr}{m+n}$.

32. $G : A = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{h(m+n)}{2n}$.

In den Aufgaben 33 bis 35 setze man $h = 2nt$; $r = (m+n)t$.

33. $G : A = m : n$, C. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{\pi n(m+n)}}$.

34. $G : A = m : n$, F. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi n(2m+n)}}$.

35. $G : A = m : n$, V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi n^2(3m+n)}}$.

36. $F : A = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{4nr}{m+n}$.

37. $F : A = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{h(m+n)}{4n}$.

In den Aufgaben 38 bis 40 setze man $h = 4nt$, $r = (m+n)t$.

38. $F : A = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2\sqrt{2n(m-n)}}$.

39. $F : A = m : n$, C. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{2\pi n(m+n)}}$.

40. $F : A = m : n$, V. Aufl. $t = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi n^2(3m-n)}}$.

§ 16.

Zwei und mehrere Kugeln.

a) Das Volumen und die Oberfläche des von zwei gleichen Kugeln mit dem Radius r gebildeten linsenförmigen Stückes zu berechnen, wenn ihre Mittelpunkte

1. den Abstand r haben. Aufl. $Vol = \frac{5}{12}\pi r^3$; $Obfl. = 2\pi r^2$.

2. den Abstand 2a haben. Aufl. $Vol = \frac{1}{8}\pi(r-a)^2(2r+a)$; $Obfl. = 4\pi r(r-a)$.

3. Gegeben sind zwei sich schneidende Kugeln mit den Radien r und r_1; ihre Centrale sei d; man soll von dem hierdurch entstehenden linsenförmigen Stück das Volumen V, die Oberfläche F und den Durchmesser 2ρ berechnen. Aufl. $V = \frac{\pi d^2(12rr_1 - 4(r+r_1)d + d^2)}{12(r+r_1-d)}$;

$F = \frac{\pi d(4rr_1 - (r+r_1)d)}{r+r_1-d}$; $\rho^2 = \frac{d(2r_1-d)(2r-d)(2(r+r_1)-d)}{4(r+r_1-d)^2}$.

b) Auf einer Ebene liegen vier gleich große sich zu je zweien berührende Kugeln, deren Radius r ist, so daß ihre Mittelpunkte A, B, C, D ein Quadrat bilden; auf den vier Kugeln ruht eine fünfte ebenso große mit dem Mittelpunkt E, welche alle vier berührt. Zu berechnen ist

4. die Entfernung x des Punktes E von der Ebene, auf welcher die vier Kugeln liegen. Aufl. Von E sei auf ABCD die Senkrechte EF gefällt; so ist $EF = \sqrt{EA^2 - AF^2} = r\sqrt{2}$; mithin $x = r(\sqrt{2} + 1)$.

5. der Radius y der Kugel, welche alle fünf Kugeln einschließend berührt. Aufl. Der Mittelpunkt derselben liegt in F, da alle Centralen durch diesen Punkt gehen müssen; daher $y = EF + r = r(\sqrt{2} + 1)$.

6. wie tief die obere Kugel einsinkt. Aufl. Der Punkt der Kugelfläche, welcher der Ebene ABCD zunächst liegt, hat von letzterer den Abstand $r(\sqrt{2} - 1)$; also ist die Höhe des einsinkenden Kugelabschnittes $r(2 - \sqrt{2})$.

7. der Radius z der Kugel, welche alle fünf Kugeln von außen berührt. Aufl. Der Mittelpunkt liegt ebenfalls in F und es ist $z = r(\sqrt{2} - 1)$.

8. der Raum der großen Kugel in 5), soweit er nicht von den fünf gleichen Kugeln und der Kugel in 6) ausgefüllt wird. Aufl. $12\pi r^3$.

9. Auf einer Ebene liegen n gleiche Kugeln, deren Radius r ist, so daß sie sich zu je zweien berühren und ihre Mittelpunkte ein reguläres neck bilden. Wie tief sinkt eine Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R ein, wenn sie alle berührt. Aufl. Eine Seite des regulären necks ist 2r, der zugehörige Centriwinkel $2\varphi = \frac{360^0}{n}$; dann ist der Radius des um das neck beschriebenen Kreises $= \frac{r}{\sin\varphi}$. Die von M auf die Ebene gefällte Senkrechte sei $MA = y$, sie treffe die Kugel M in B und die Ebene, welche die n Kugeln oben berührt in C; wird noch die Höhe BC, bis zu welcher die Kugel einsinkt mit x bezeichnet, so ist $(y - r)^2 + \left(\frac{r}{\sin\varphi}\right)^2 = (R + r)^2$, also $y = r + \sqrt{(R+r)^2 - \frac{r^2}{\sin\varphi^2}}$; $AB = r - R + \sqrt{(R+r)^2 - \frac{r^2}{\sin\varphi^2}}$ und $x = 2r - AB = R + r - \sqrt{(R+r)^2 - \frac{r^2}{\sin\varphi^2}}$.

c) Auf einer Ebene liegen drei gleich große sich zu je zweien berührende Kugeln, deren Radius r ist, so daß ihre Mittelpunkte ABC

ein gleichseitiges Dreieck bilden; auf den drei Kugeln ruht eine vierte ebenso große mit dem Mittelpunkt E, welche alle drei berührt. Zu berechnen ist

10. die Entfernung x des Punktes E von der Ebene, auf welcher die drei Kugeln liegen. Aufl. Ist von E auf ABC die Senkrechte EF gefällt, so ist $EF = \frac{2}{3} r \sqrt{6}$; mithin $x = \frac{1}{3} r (2\sqrt{6} + 3)$.

11. der Radius y der Kugel, welche alle vier Kugeln einschließend berührt. Aufl. Der Mittelpunkt ist F und $y = \frac{1}{2} r(\sqrt{6} + 2)$.

12. wie tief die obere Kugel einsinkt. Aufl. Die Höhe des einsinkenden Kugelabschnittes ist $\frac{1}{3} r (2\sqrt{6} - 3)$.

13 der Radius z der Kugel, welche alle vier Kugeln von außen berührt. Aufl. $z = \frac{1}{2} r(\sqrt{6} - 2)$.

14. der Raum der großen Kugel in 11), soweit er nicht von den vier gleichen Kugeln und der Kugel in 12) ausgefüllt wird. Aufl. $\frac{28}{3} \pi r^3$.

15. der Ring zwischen der großen Kugel in 11) und der kleinen in 13). Aufl. $\frac{44}{3} \pi r^3$.

d) In eine Kugel mit dem Radius r sind acht kleinere sich gegenseitig und die große berührende Kugeln so konstruiert, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines Würfels bilden. Zu berechnen ist

16. der Radius x einer der acht Kugeln. Aufl. Eine Würfelkante ist 2x; eine bis zur großen Kugel verlängerte Würfeldiagonale ist Durchmesser derselben; mithin $2r = 2x\sqrt{3} + 2x$, also $x = \frac{1}{2} r(\sqrt{3} - 1)$.

17. der Radius y einer Kugel, welche innerhalb der acht Kugeln liegt und sie alle berührt. Aufl. $2y + 2x = 2x\sqrt{3}$, mithin $y = x(\sqrt{3} - 1) = r(2 - \sqrt{3})$.

18. der Raum, welcher von der großen Kugel übrig bleibt, wenn die neun Kugeln fortgenommen werden. Aufl. $4\pi r^3 (3\sqrt{3} - 5)$.

19. das Verhältnis dieses Raumes zur Summe der acht gleichen Kugeln. Aufl. $\frac{3}{2}$.

e) In eine Kugel mit dem Radius r sind vier kleinere sich gegenseitig und die größere berührende Kugeln so konstruiert, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines regulären Oktaeders bilden. Zu berechnen ist

20. der Radius x einer der sechs Kugeln. Aufl. $x = r(\sqrt{2} - 1)$.

21. der Radius y einer Kugel, welche innerhalb der sechs Kugeln liegt und sie alle berührt. Aufl. $y = r(\sqrt{2} - 1)^2$.

22. das Verhältnis der Radien der gegebenen Kugel und der in 21). Aufl. $(\sqrt{2} + 1)^2$.

23. das Verhältnis des Raumes, welcher von der großen Kugel übrig bleibt, wenn man die sieben Kugeln fortnimmt zu der Summe der sechs gleichen Kugeln. Aufl. Der übrig bleibende Raum ist $\frac{82}{3}\pi x^3$ und die Summe der sechs gleichen Kugeln $8\pi x^3$; daher ist das gesuchte Verhältnis $\frac{4}{3}$.

f) In eine Kugel mit dem Radius r sind vier kleinere sich gegenseitig und die größere berührende Kugeln so konstruiert, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Zu berechnen ist

24. der Radius x einer der vier Kugeln. Aufl. Die Kante des Tetraeders ist $2x$, also seine Höhe $h = \frac{2}{3}x\sqrt{6}$. Nun ist $r = \frac{3}{4}h + x = \frac{1}{2}x\sqrt{6} + x$, also $x = r(\sqrt{6} - 2) = r\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

25. der Radius y einer Kugel, welche innerhalb der vier Kugeln liegt und sie alle berührt. Aufl. $x + y = \frac{3}{4}h$; $y = r(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

26. das Verhältnis der Radien der gegebenen Kugel und der in 25). Aufl. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.

27. der Raum, welcher zwischen der gegebenen Kugel und der in 25) liegt. Aufl. $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3(\sqrt{3} - \sqrt{2})^6 = \frac{88}{3}\pi r^3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 = \frac{44}{3}\pi x^3$ (vergl. 15).

28. der Raum, welcher von der großen Kugel übrig bleibt, wenn die fünf Kugeln fortgenommen werden. Aufl. Von dem in 27) gefundenen Raum muß noch $\frac{16}{3}\pi r^3 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$ fortgenommen werden; man erhält $\frac{56}{3}\pi r^3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 = \frac{28}{3}\pi x^3$ (vergl. 14).

29. das Verhältnis dieses Raumes zu der Summe der vier Kugeln. Aufl. $\frac{7}{4}$.

g) In eine Kugel mit dem Radius r sind sechs kleinere sich gegenseitig und die größere berührende Kugeln so konstruiert, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines dreiseitigen gleichkantigen geraden Prismas bilden. Zu berechnen ist

30. der Radius x einer der vier Kugeln. Aufl. Der Mittelpunkt der größeren Kugel liegt in dem Mittelpunkt der Geraden, welche die Mittelpunkte der beiden Grundflächen verbindet. Bezeichnen wir die Höhe der Grundfläche mit h, die Gerade, welche den Kugelmittelpunkt mit einer Ecke verbindet, mit p, so ist $h = x\sqrt{3}$ und $p^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x^2$; also $p = x\sqrt{\frac{7}{3}}$. Nun ist $r = x + p = x + x\sqrt{\frac{7}{3}}$; also $x = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

31. der Radius y einer Kugel, welche innerhalb der sechs Kugeln liegt und sie alle berührt. Aufl. $y + x = p$, also $y = \frac{r(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ $= \frac{1}{2} r(5 - \sqrt{21})$.

32. das Verhältnis des Radius der gegebenen Kugel und der in 31). Aufl. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1}{2} r(5+\sqrt{21})$.

33. der Raum, welcher zwischen der gegebenen Kugel und der in 31) liegt. Aufl. $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^3 = 8\pi r^3 (2\sqrt{21} - 9)$ $= \frac{64}{3}\pi x^3$.

34. der Raum, welcher von der großen Kugel übrig bleibt, wenn die sieben Kugeln fortgenommen werden. Aufl. $8\pi r^3 (2\sqrt{21} - 9) - 3\pi r^3 \sqrt{3}\ (2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) = 5\pi r^3 (2\sqrt{21} - 9) = \frac{40}{3}\pi x^3$.

35. das Verhältnis dieses Raumes zu der Summe der sechs Kugeln. Aufl. $\frac{5}{3}$.

§ 17.

Prisma und Pyramide.

1. Eine gerade dreiseitige Pyramide ist durch die Grundkante a und die Höhe h gegeben; von den Schwerpunkten der Seitenflächen sind Senkrechte auf die Grundfläche gefällt, welche ein gerades dreiseitiges Prisma bilden, dessen Volumen zu berechnen ist. Aufl. Die Grundkante des Prismas ist $\frac{1}{3}$ a, also seine Grundfläche $\frac{1}{36} a^2 \sqrt{3}$; die Höhe des Prismas ist $\frac{1}{3}$ h, also *Vol Prisma* $= \frac{1}{108} a^2 h \sqrt{3}$. Da das Volumen der Pyramide $\frac{1}{12} a^2 h \sqrt{3}$ ist, so ist *Vol Pyr* $= 9$ *Vol Prisma*. Anm. Beim regulären Tetraeder ist *Vol Prisma* $= \frac{1}{108} a^3 \sqrt{2}$.

2. Eine gerade dreiseitige Pyramide ist durch die Grundkante a und die Höhe h gegeben. In dieselbe ist ein gerades dreiseitiges Prisma konstruiert, dessen eine Grundfläche auf die der Pyramide fällt, während die Ecken der anderen Grundfläche auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Die Grundkante x und die Seitenkante y des Prismas ist zu berechnen, wenn die Summe seiner Seitenflächen gleich der der Grundflächen ist. Aufl. Es ist $3xy = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{3}$, also $x = 2y\sqrt{3}$. Ferner ist $a : x = h : h - y$, mithin $y = \frac{ah}{a + 2h\sqrt{3}}$ und $x = \frac{2ah\sqrt{3}}{a + 2h\sqrt{3}}$.

3. Zwei gleiche reguläre Tetraeder mit der Kante a sind mit zwei Seitenflächen zusammengelegt und bilden so eine Doppelpyramide; die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen desselben nimmt man zu Ecken eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen Volumen zu berechnen ist. Aufl. Die Grundkante des Prismas ist $\frac{1}{3}$ a; ist h die Höhe der Doppelpyramide, so ist $h = \frac{2}{3} a \sqrt{6}$; da nun die halbe Höhe des Prismas $\frac{1}{6} h = \frac{1}{9} a \sqrt{6}$, so ist die Höhe des Prismas $\frac{2}{9} a \sqrt{6}$ und seine Grundfläche $\frac{1}{36} a^2 \sqrt{3}$; mithin *Vol Prisma* $= \frac{1}{54} a^3 \sqrt{2}$. Da nun das Volumen der Doppelpyramide $= \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$, so ist *Vol* Doppelpyramide $= 9$ *Vol Prisma.*

4. Gegeben ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit der Höhe h, die Grundflächen sind Quadrate mit der Seite a; über denselben sind im Innern des Prismas zwei Pyramiden konstruiert, deren Spitzen in den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Grundflächen liegen. Das den beiden Pyramiden gemeinschaftliche Stück ist zu berechnen. Aufl. Das gemeinschaftliche Stück besteht aus einer Doppelpyramide, die gemeinschaftliche Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}$ a, während die Höhe der Doppelpyramide h ist; mithin *Vol* Doppelpyramide $= \frac{1}{12} a^2 h$. Da das Volumen des Prismas $a^2 h$ ist, so ist *Vol Prisma* $=$ 12 mal dem Volumen des gemeinschaftlichen Stückes.

Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a ist ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide konstruiert; beide haben dieselbe Höhe. Die Höhe h ist zu berechnen, wenn

5. die Seitenflächen des Prismas n mal so groß wie die der Pyramide sind. Aufl. Eine Seitenfläche des Prismas ist ah; eine Seitenfläche der Pyramide $\frac{1}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} a^2}$; mithin $ah = \frac{1}{2} na \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} a^2}$;

also $h = \frac{na\sqrt{3}}{6\sqrt{4 - n^2}}$. Daher muß $n < 2$ sein.

6. die Seitenflächen des Prismas gleich denen der Pyramide sind. Aufl. $h = \frac{1}{6} a$.

7. Wie groß ist n beim regulären Tetraeder? Aufl. $n = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

8. Dieselbe Aufgabe wie 5, nur soll die Grundfläche ein regelmäßiges Polygon mit der Seite s und dem Radius ρ des Inkreises sein. Aufl. Es ist $hs = \frac{1}{2} ns \sqrt{h^2 + \rho^2}$; mithin $h = \frac{n\rho}{\sqrt{4 - n^2}}$.

In ein reguläres Tetraeder von der Kante a ist ein gerades dreiseitiges Prisma so beschrieben, daß eine Grundfläche desselben auf eine

Tetraederfläche zu liegen kommt. Wie groß ist eine Kante x des Prismas, wenn die Ecken der oberen Grundfläche

9. auf den Kanten des Tetraeders liegen. Aufl. Ist h die Höhe des Tetraeders, so ist $h : h - x = a : x$; da nun $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, so ist $x = a(\sqrt{6} - 2)$.

10. auf den Mittellinien der Seitenflächen des Tetraeders liegen. Aufl. Wird das durch eine Ecke der oberen Grundfläche auf der Mittellinie abgeschnittene Stück derselben, welches der Spitze des Tetraeders zunächst liegt, mit y bezeichnet, so ist $\frac{1}{2} a\sqrt{3} : \frac{1}{2} a = y : x$, also $y = x\sqrt{3}$. Ferner verhält sich $h : h - x = \frac{1}{2} a\sqrt{3} : x\sqrt{3}$, und da $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, so ist $x = \frac{1}{5} a (4 - \sqrt{6})$.

11. die Seiten des gleichseitigen Dreiecks, welches durch Verlängerung der oberen Grundfläche aus dem Tetraeder geschnitten wird, im Verhältnis m : n teilen. Aufl. Wird die Seite des ausgeschnittenen Dreiecks mit y bezeichnet, so sind die beiden Teile derselben $\frac{my}{m+n}$ und $\frac{ny}{m+n}$, mithin ist $x^2 = \frac{m^2y^2}{(m+n)^2} + \frac{n^2y^2}{(m+n)^2} - \frac{2mny^2}{(m+n)^2} \cos 60^0$, also $y = \frac{x(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2-mn}}$. Nun ist $a : y = h : h - x$, und daher $x = \frac{a\sqrt{2(m^2+n^2-mn)}}{(m+n)\sqrt{2} + \sqrt{3(m^2+n^2-mn)}}$. Auch ergiebt sich die Relation $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{a} \frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2-mn}}$.

§ 18.

Prisma und Kugel.

1. Um ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Kanten sämtlich gleich a sind (fünfflächiger archimedischer Körper), ist eine Kugel beschrieben; wie groß ist der Radius r derselben? Aufl. $r^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{3} a^2$, also $r = \frac{1}{6} a\sqrt{21}$.

2. Um ein gerades dreiseitiges Prisma, in welchem eine Grundkante a und die Summe der Seitenflächen gleich der der Grundflächen ist, ist eine Kugel beschrieben. Wie groß ist der Radius r derselben? Aufl. Die Seitenkante sei x; dann ist $3ax = \frac{1}{2} a^2\sqrt{3}$, also

$x = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$. Mithin $r^2 = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} a^2 = \frac{1}{48} a^2 + \frac{1}{8} a^2$; also $r = \frac{1}{12} a \sqrt{51}$.

In eine Kugel vom Radius r ist ein gerades dreiseitiges Prisma konstruiert, dessen Grund- und Seitenkanten gleich sind. Wie groß ist

3. das Volumen des Prismas? Aufl. Ist x eine Kante des Prismas, so ist der Durchmesser des Umkreises einer Grundfläche gleich $\frac{2}{3} x \sqrt{3}$. Nun ist $\frac{4}{3} x^2 + x^2 = 4r^2$, also $x = 2r\sqrt{\frac{3}{7}}$ und $Vol\ Prisma = \frac{18}{7\sqrt{7}} r^3$.

4. die krumme Oberfläche und das Volumen des Segmentes, welches man durch Verlängerung einer Grundfläche erhält? Aufl. Die Höhe des Segmentes ist $h = r - \frac{1}{2} x = r\left(1 - \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$; mithin $Kal = 2\pi r^2\left(1 - \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ und $Sgm = \frac{2}{3}\pi r^3\left(1 - \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.

5. die krumme Oberfläche und das Volumen des Segmentes, welches man durch Verlängerung einer Seitenfläche erhält? Aufl. Die Höhe des Segmentes ist $h = r\left(1 - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$; mithin $Kal = 2\pi r^2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$ und $Sgm = \frac{2}{3}\pi r^3\left(1 - \frac{10}{7}\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$.

In einem geraden dreiseitigen Prisma ist eine Grundkante a und die Summe der Seitenflächen doppelt so groß wie die der Grundflächen; wie groß ist

6. der Radius r der Umkugel. Aufl. Eine Seitenkante sei x, so ist $3ax = a^2\sqrt{3}$, also $x = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$; mithin $r^2 = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{3} a^2 = \frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{3} a^2$, also $r = \frac{1}{6} a\sqrt{15}$.

7. der Radius ρ der Inkugel. Aufl. In das Prisma läßt sich eine Kugel beschreiben, da $\frac{1}{2} x = \frac{1}{6} a\sqrt{3}$ ist; mithin $\rho = \frac{1}{6} a\sqrt{3}$.

In eine Kugel mit dem Radius r soll ein gerades Prisma konstruiert werden, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, (seine Seite werde mit y bezeichnet), während zugleich eine alle Flächen berührende Kugel, deren Radius mit x bezeichnet werden möge, hineingelegt werden kann. Zu berechnen ist das Volumen

8. der hineingelegten Kugel. Aufl. Die Höhe des Prismas ist 2x, die der Grundfläche 3x; mithin $\frac{3}{4} y^2 = 9x^2$, und $y^2 = 12x^2$. Da beide Kugeln denselben Mittelpunkt haben, so ist in dem Dreieck (Mittelpunkt der Kugel, Mittelpunkt einer Grundfläche und eine Ecke derselben Grundfläche) $4x^2 + x^2 = r^2$, also $x = \frac{r}{\sqrt{5}}$ und $y^2 = \frac{12}{5} r^2$. Mithin Vol Kugel $= \frac{4}{75}\pi r^3\sqrt{5}$.

9. des Prismas. Aufl. $Vol\,Prisma = 2x \cdot \frac{y^2}{4}\sqrt{3} = \frac{6}{25} r^3 \sqrt{15}$.

10. des durch eine verlängerte Grundfläche abgeschnittenen Segmentes. Aufl. $Sgm = \frac{1}{8}\pi(r-x)^2(3\rho - r + x) = \frac{2}{75}\pi r^3\left(25 - 7\sqrt{5}\right)$.

11. Die Grundfläche eines geraden vierseitigen Prismas ist ein Rhombus, dessen Diagonalen sich wie 4:3 verhalten. In welchem Verhältnis müssen die Grund- und Seitenkanten stehen, wenn sich in das Prisma eine Kugel beschreiben läßt? Aufl. Die Grundkante werde mit x, die Seitenkante mit y bezeichnet, die Diagonalen der Grundfläche mit e und f; dann ist $f = \frac{3}{4}e$, $e = \frac{8}{5}x$, $f = \frac{6}{5}x$. Wird der Radius der Kugel mit r bezeichnet, so ist $r = \frac{12}{25}x$ und $r = \frac{1}{2}y$; mithin $x : y = 25 : 24$.

12. Wie verhält sich eine Grundfläche G zu einer Seitenfläche S? Aufl. $G = 2xr$; $S = xy$; mithin $G : S = 2r : y = y : y$. Daher muß die Grundfläche gleich der Seitenfläche sein.

§ 19.

Würfel und Kugel.

Gegeben ist ein Würfel mit der Kante a. Wie groß ist der Radius

1. der Umkugel? Aufl. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

2. der Kanten berührenden Kugel? Aufl. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

3. der Inkugel? Aufl. $\frac{1}{2}a$.

Wie verhalten sich von den drei Kugeln, von denen die eine um den Würfel beschrieben ist, die zweite die Kanten berührt und die dritte in den Würfel beschrieben ist

4. die Oberflächen? Aufl. wie 3:2:1.

5. die Volumina? Aufl. wie $3\sqrt{3} : 2\sqrt{2} : 1$.

Gegeben eine Kugel mit dem Radius r; wie groß ist die Kante desjenigen Würfels

6. welcher um die Kugel beschrieben ist? Aufl. 2r.

7. dessen Kanten die Kugel berühren? Aufl. $r\sqrt{2}$.

8. welcher in die Kugel beschrieben ist? Aufl. $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

Wie verhalten sich von den drei Würfeln, von denen der eine um die Kugel beschrieben ist, der zweite die Kugel mit den Kanten berührt, der dritte in die Kugel beschrieben ist

9. die Oberflächen. Aufl. wie 6:3:2.

10. die Volumina. Aufl. wie $6\sqrt{6} : 3\sqrt{3} : 2\sqrt{2}$.

Die Oberflächen und Volumina derjenigen beiden Kugelsegmente sowie die zugehörigen Kugelsektoren zu berechnen, welche man erhält, wenn man

11. eine Würfelfläche verlängert bis sie die Umkugel schneidet. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{2}a(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{2}a(\sqrt{3}-1)$; daher die beiden Kalotten $\pi a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ und $\pi a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ und die Kugelsegmente $\frac{1}{12}\pi a^3(3\sqrt{3}+4)$ und $\frac{1}{12}\pi a^3(3\sqrt{3}-4)$. Die zugehörigen Kugelsektoren $\frac{1}{4}\pi a^3(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{4}\pi a^3(\sqrt{3}-1)$.

12. die Kugel konstruiert, welche die Kanten des Würfels berührt, und welche durch eine Würfelfläche von der Kugel abgeschnitten werden. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{2}a(\sqrt{2}+1)$ und $\frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$; daher sind die beiden Kalotten $\frac{1}{2}\pi a^2(2+\sqrt{2})$ und $\frac{1}{2}\pi a^2(2-\sqrt{2})$, die beiden Kugelsegmente $\frac{1}{24}\pi a^3(4\sqrt{2}+5)$ und $\frac{1}{24}\pi a^3(4\sqrt{2}-5)$, und die zugehörigen Kugelsektoren $\frac{1}{6}\pi a^3(\sqrt{2}+1)$ und $\frac{1}{6}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$.

13. Gegeben ist ein Würfel W mit der Kante a; in denselben ist eine Kugel konstruiert, in diese ein Würfel, in letztere wieder eine Kugel u. s. w. in inf. Gesucht wird die Summe aller Kugeln und die aller Würfel. Aufl. Die Kugeln seien K_1, K_2, K_3 u. s. w. und die in diese konstruierten Würfel W_1, W_2, W_3 u. s. w. Dann ist $W = a^3$, $K_1 = \frac{\pi a^3}{6}$, $W_1 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$, $K_2 = \frac{\pi a^3}{6}\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $W_2 = \frac{a^3}{27}$, $K_3 = \frac{\pi a^3}{6}\frac{1}{27}$; $W_3 = \frac{a^3}{81\sqrt{3}}$; $K_4 = \frac{\pi a^3}{6}\cdot\frac{1}{81\sqrt{3}}$ u. s. w. Mithin

$$K_1+K_2+K_3+\ldots = \frac{\pi a^3}{6}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81\sqrt{3}}+\ldots\right)$$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2(3\sqrt{3}-1)}.$$ Ferner

$$W+W_1+W_2+\ldots = a^3\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81\sqrt{3}}+\ldots\right) = \frac{3a^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}.$$

14. Man hat eine Kugel, welche gleich einem gegebenen Würfel mit der Kante a ist; in diese wird ein Würfel konstruiert, in diesen wieder eine Kugel u. s. w. Gesucht wird die Summe aller Würfel und die Summe aller Kugeln. Aufl. Die Kugeln seien K_1, K_2, K_3 u. s. w. und die Würfel W_1, W_2, W_3 u. s. w. Dann ist $K_1 = a^3$, also ihr

Radius $r_1 = a\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$; $W_1 = \frac{2a^3}{\pi\sqrt{3}}$; $r_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ also $K_2 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$

$W_2 = \frac{2a^3}{\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}$; $r_3 = \frac{a}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$, also $K_3 = \frac{a^3}{27}$; $W_3 = \frac{2a^3}{\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{27}$

u. s. w. Daher $W_1 + W_2 + W_3 + \ldots = \frac{2a^3}{\pi\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{27}\right.$

$\left. + \frac{1}{81\sqrt{3}} + \ldots\right) = \frac{6a^3}{\pi(3\sqrt{3}-1)}$. Ferner $K_1 + K_2 + K_3 + \ldots$

$= a^3\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{27} + \ldots\right) = \frac{3a^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}$.

15. Um einen Würfel von der Kante a ist eine Kugel K mit dem Radius r konstruiert. Ferner sind zwei Kugeln K′ und K″ mit den Radien r′ und r″ konstruiert, von denen jede die Umkugel und außerdem dieselbe Würfelfläche in ihrem Mittelpunkt berührt. Gesucht werden die Radien der drei Kugeln, ihre Volumina und die Summe der beiden inneren Kugeln. Aufl. $r = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $r' = \frac{1}{4}a(\sqrt{3}+1)$; $r'' = \frac{1}{4}a(\sqrt{3}-1)$; $K = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$; $K' = \frac{1}{24}\pi a^3(3\sqrt{3}+5)$; $K'' = \frac{1}{24}\pi a^3(3\sqrt{3}-5)$; $K' + K'' = \frac{1}{4}\pi a^3\sqrt{3} = \frac{1}{2}K$.

Wie groß sind die Radien zweier Kugeln, welche in einen Würfel mit der Kante a konstruiert sind, sich gegenseitig berühren und von denen jede drei Würfelflächen berührt, wenn

16. die beiden Kugeln gleich sind. Aufl. Der Radius der gesuchten Kugeln sei r, ihre Mittelpunkte seien K und K′ und mögen auf der Würfeldiagonale BH liegen, deren Mitte M sei; ferner sei $KL \perp HF$, so ist $HK = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - r$, ferner $HK = r\sqrt{3}$, da $HK : HB = KL : BF$; folglich $r\sqrt{3} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - r$ und $r = \frac{1}{4}a(3-\sqrt{3})$.

17. die eine Kugel die Inkugel ist. Aufl. Ist ρ der Radius der Inkugel, ρ′ der der zweiten Kugel, so ist $\rho:\rho' = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \rho - \rho'$; und da $\rho = \frac{1}{2}a$, so ist $\rho' = \frac{1}{2}a(2-\sqrt{3})$.

18. die Radien der beiden Kugeln sich wie 1:n verhalten. Aufl. Bezeichnung wie in 16, nur seien r und r′ die Radien, mithin $r' = nr$; ferner $K'L' \perp BD$. Dann ist $\triangle HKL \sim BK'L'$, also $HK:BK' = r:r' = 1:n$, also $BK' = nHK$. Daher $HK(n+1) = a\sqrt{3} - r - nr$ und $HK = \frac{a}{n+1}\sqrt{3} - r = r\sqrt{3}$, also $r = \frac{a\sqrt{3}}{(n+1)(\sqrt{3}+1)} =$

$\frac{a}{n+1}\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ und $r' = \frac{na}{n+1}\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Anmerk. Zwischen beiden Kugeln findet die geringste Verschiedenheit statt, wenn beide Kugeln gleich sind, d. h. wenn $n = 1$ ist; dann ist $r = \frac{1}{4}a(3-\sqrt{3})$ wie in 16. Dagegen findet die größte Verschiedenheit statt, wenn K die Inkugel, also $r = \frac{1}{2}a$ ist; dann ist K′ wie in 17 in eine Würfelecke konstruiert; es ist demnach $\frac{1}{2}a = \frac{a}{n+1}\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, also $n = 2-\sqrt{3}$; daher $r' = \frac{1}{2}a(2-\sqrt{3})$.

19. den Radius x der Kugel zu berechnen, welche drei in einer Ecke zusammenstoßende Würfelflächen und außerdem in der dieser Ecke gegenüberliegenden Ecke die Umkugel berührt. Aufl. Ist a die Würfelkante, so ist $a\sqrt{3} : a = a\sqrt{3} - x : x$; mithin $x = \frac{1}{2}a(3-\sqrt{3})$.

Auf dem Boden eines Würfels liegen vier gleich große Kugeln, von denen jede je drei Würfelflächen und die beiden benachbarten Kugeln berührt. Wie groß ist

20. der Radius ρ einer der vier Kugeln K. Aufl. $\rho = \frac{1}{4}a$.

21. der Radius ρ′ derjenigen Kugel K′, welche durch die Öffnung zwischen diesen vier Kugeln gerade hindurch fallen kann. Aufl. $2\rho' = a\sqrt{2} - 2\rho - 2\rho\sqrt{2} = a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, also $\rho' = \frac{1}{4}a(\sqrt{2}-1)$.

22. der Radius ρ″ derjenigen Kugel K″, welche die vier Kugeln und die untere Würfelfläche berührt. Aufl. Verbindet man K″ mit K und fällt von K auf die Linie, welche die Mitten der oberen und unteren Grundfläche verbindet, die Senkrechte KR, so ist $K''K^2 = KR^2 + K''R^2$, mithin $(\rho+\rho'')^2 = \left(\frac{1}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + (\rho-\rho'')^2$, also $4\rho\rho'' = \frac{1}{8}a^2$; da $\rho = \frac{1}{4}a$, so ist $\rho'' = \frac{1}{8}a$.

23. der Radius ρ‴ derjenigen Kugel K‴, welche die vier Kugeln und die obere Würfelfläche berührt. Aufl. Verbindet man K‴ mit K und fällt von K auf die Linie, welche die Mitten der oberen und unteren Grundfläche verbindet, eine Senkrechte KR, so ist $K'''K^2 = KR^2 + K'''R^2$ oder $(\rho+\rho''')^2 = \left(\frac{1}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a-\rho'''\right)^2$, oder $\left(\frac{1}{4}a+\rho'''\right)^2 - \left(\frac{3}{4}a-\rho'''\right)^2 = \frac{1}{8}a^2$, also $a\left(2\rho''' - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{8}a^2$, mithin $\rho''' = \frac{5}{16}a$.

§ 20.

Würfel und reguläres Tetraeder.

In zwei gegenüberliegenden Würfelflächen sind die nicht parallelen Diagonalen gezogen; die Endpunkte derselben sind die Ecken eines regulären Tetraeders. Zu berechnen ist

1. das Volumen des Tetraeders. Aufl. Eine Kante des Tetraeders ist $a\sqrt{2}$, mithin sein Volumen $= \frac{1}{8}a^3$, also $\frac{1}{8}$ von dem des Würfels.

2. der Radius ρ der Inkugel des Tetraeders. Aufl. $\rho = \frac{1}{12}a\sqrt{2}\sqrt{6} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$ also $\frac{1}{6}$ der Würfeldiagonale.

3. das Volumen einer der vier gleichen Pyramiden, welche man erhält, wenn man den Würfel so durchschneidet, daß das Tetraeder übrig bleibt. Aufl. Eine Pyramide hat zur Grundfläche $\frac{1}{2}a^2$ und zur Höhe a, mithin ist ihr Volumen $\frac{1}{6}a^3$.

4. der Radius ρ_1 der in eine solche Pyramide beschriebenen Kugel. Aufl. Das Volumen der Pyramide ist $\frac{1}{3}\rho_1\left(\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{1}{6}a^3$; mithin $\rho_1 = \frac{a}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{6}a\left(3-\sqrt{3}\right)$.

Zusatz: $\rho + \rho_1 = \frac{1}{2}a$.

In ein gegebenes reguläres Tetraeder ABCD mit der Kante a ist ein Würfel so konstruiert, daß eine Fläche auf ABC zu liegen kommt, die vier anderen Ecken KLPQ liegen in den drei anderen Flächen, und zwar KL in ABD, P in BCD und Q in ACD; zu berechnen ist

5. die Kante x des Würfels. Aufl. KLPQ verlängert schneide aus dem Tetraeder das gleichseitige Dreieck MNO. Bezeichnen wir die Höhe des Tetraeders mit H, so ist $H - x : MN = H : a$, oder $a\sqrt{\frac{2}{3}} - x : MN = \sqrt{2} : \sqrt{3}$, mithin $MN = \frac{a\sqrt{2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Im Dreieck MNO verhält sich ferner $MN : x = \frac{1}{2}MN\sqrt{3} : \frac{1}{2}MN\sqrt{3} - x$, also $MN = \frac{x\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}}$. Durch Gleichsetzung der beiden Werte von MN ergiebt sich $x = \frac{a\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$.

Anmerk. Man kann dem Resultat auch eine andere Form geben. Es ist nämlich $\frac{1}{x} = \frac{1}{a}\frac{3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)$. Da nun $H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, also $\frac{a}{H} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, also $\frac{a}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ist, so ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{H} + \frac{a}{h} + \frac{a}{a}\right) = \frac{1}{H} + \frac{1}{h} + \frac{1}{a}$.

6. die Kante des durch Verlängerung der oberen Würfelfläche

abgeschnittenen regulären Tetraeders. Aufl. $MN = a - x\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2a(2+\sqrt{3})}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}$.

7. In ein gegebenes reguläres Tetraeder ABCD mit der Kante a ist ein Würfel so konstruiert, daß vier nicht zusammenhängende Würfelkanten in den vier Tetraederflächen liegen; zwei gegenüberliegende Würfelflächen mögen parallel den Kanten AB und CD sein, sie werden von resp. AB und CD gleich weit abstehen; die Kante x des Würfels ist zu berechnen. Aufl. E sei die Mitte von CD, F die von AB; dann ist $EF = d = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Eine Ebene durch DCF schneidet aus dem Würfel ein Quadrat; die F zunächst liegende Seite sei GL, FE treffe GL in J; dann ist $FG : GL = FD : CD$ oder $FG : x = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : a$, also $FG = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$ und $FG = \sqrt{FJ^2 + GJ^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}x)^2 + \frac{1}{4}x^2}$; durch Gleichsetzung der beiden Werte von FG ergiebt sich $x = d(\sqrt{2}-1) = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Anmerk. Dem Resultat kann man auch folgende Form geben: $\frac{1}{x} = \frac{1}{d(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{d} = \frac{\sqrt{2}}{d} + \frac{1}{d} = \frac{2}{a} + \frac{1}{d}$.

In einen Würfel ist ein reguläres Tetraeder ABCD so konstruiert, daß eine Ecke D desselben in eine Würfelecke, die drei anderen Ecken dagegen auf die drei Flächendiagonalen EG, EH, EJ zu liegen kommen, welche von der D gegenüberliegenden Würfelecke E ausgehen (A auf EG, B auf EH, C auf EJ). Zu berechnen ist

8. die Kante x des Tetraeders. Aufl. $AB \parallel GH$, daher $AE = AB = x$; im $\triangle AGD$ ist daher $AD^2 = AG^2 + GD^2$ oder $x^2 = (a\sqrt{2} - x)^2 + a^2$; also $x = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$, mithin $\frac{3}{4}$ einer Flächendiagonale.

9. die Höhe $DF = h$ des Tetraeders. Aufl. $h = x\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Also ist F die Mitte der Würfeldiagonale DE.

10. das Volumen des Tetraeders. Aufl. $Vol = \frac{9}{64}a^3$; dasselbe ist gleich dem des Tetraeders ABCE.

Gegeben ist ein Würfel ABCDabcd (Aa, Bb u. s. w. sind Kanten); auf der Verlängerung der Diagonale Ac über c ist ein Punkt P so zu bestimmen, daß, wenn man von P durch d, b und C die Kanten PE, PF und PG legt, EFGP ein reguläres Tetraeder mit der Höhe PA ist. Zu berechnen ist

11. $Pc = x$. Aufl. $dP : db = EP : EF$, mithin $dP = a\sqrt{2}$. Ferner fällen wir von d auf AP die Höhe dK, so ist $cK^2 = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ und $dK^2 = cK \cdot AK = \frac{2}{3}a^2$; ferner $PK^2 + dK^2 = Pd^2$, oder $\left(x + \frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$, also $x = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$; mithin ist Pc ein Drittel der Würfeldiagonale.

12. die Seite y des Tetraeders. Aufl. Die Höhe des Tetraeders ist $y\sqrt{\frac{2}{3}}$ und auch $\frac{4}{3}a\sqrt{3}$, mithin $y = 2a\sqrt{2}$.

13. das Volumen des Tetraeders. Aufl. $\frac{8}{3}a^3$.

§ 21.

Würfel und Pyramide.

In eine gerade vierseitige Pyramide mit den Grundkanten a und der Höhe h ist ein Würfel so konstruiert, daß eine Würfelfläche auf die Grundfläche der Pyramide zu liegen kommt. Die Kante x des Würfels ist zu berechnen, wenn

1. die Ecken der oberen Würfelfläche in die Seitenkanten der Pyramide fallen. Aufl. Eine Ebene durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten schneidet die obere Würfelfläche in der Diagonale $x\sqrt{2}$; wir erhalten daher $a\sqrt{2} : x\sqrt{2} = h : h - x$; mithin $x = \frac{ah}{a + h}$.

2. die Ecken der oberen Grundfläche in die Höhen der Seitenflächen fallen. Aufl. Legt man durch die Höhen zweier gegenüberliegender Seitenflächen eine Ebene, so erhält man $\frac{1}{2}a\sqrt{2} : x = h : h - x$, also $x = \frac{ah}{a + h\sqrt{2}}$.

3. die Diagonalen der Grundfläche des Würfels mit den Grundkanten der Pyramide $\angle \alpha$ bilden. Aufl. Die Diagonale einer Würfelfläche ist $\frac{a}{\sin\alpha}$; eine Ebene durch die Spitze der Pyramide und diese Diagonale liefert ähnliche Dreiecke und es ist $\frac{a}{\sin\alpha} : x\sqrt{2} = h : h - x$, mithin $x = \frac{a}{a + h\sqrt{2}\sin\alpha}$.

4. eine Kante des Würfels in die Grundfläche der Pyramide zu liegen kommt, die ihr gegenüberliegende zwei gegenüberliegende Seitenflächen der Pyramide verbindet und die beiden anderen diesen parallelen

Kanten in die beiden anderen gegenüberliegenden Seitenflächen zu liegen kommen. Aufl. $a : h = x : h - x\sqrt{2}$; mithin $x = \frac{ah}{a\sqrt{2}+h}$.

Dieselben Aufgaben wie vorher, nur sollen die Grund- und Seitenkanten der Pyramide gleich sein und jede gleich a.

5. $x = a(\sqrt{2} - 1)$.

6. $x = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$.

7. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4\left[\cos\left(45^0 - \frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2}$.

8. $x = \frac{1}{3} a$.

Über zwei gegenüberliegende Würfelflächen werden Pyramiden konstruiert, deren Spitzen in den Mittelpunkten dieser Würfelflächen liegen. Wie groß ist das Volumen

9. des den beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Stückes. Aufl. Dasselbe ist ein Oktaeder und besteht aus zwei Pyramiden, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}$ a und deren Höhe $\frac{1}{2}$ a ist; mithin $Vol = \frac{1}{12} a^3$.

10. der abgestumpften Pyramide, deren eine Grundfläche eine Würfelfläche und deren andere die gemeinschaftliche Grundfläche der Doppelpyramide ist. Aufl. $\frac{7}{24} a^3$.

11. des Prismatoids, dessen eine Grundfläche eine Würfelfläche und dessen andere Grundfläche eine Kante der Grundfläche der Doppelpyramide ist. Aufl. Die Höhe des Prismatoids ist $\frac{1}{4}$ a, die eine Grundfläche ist a^2, die andere 0 und der Mittelschnitt ist ein Rechteck mit den Seiten $\frac{1}{2}$ a und $\frac{3}{4}$ a, also $= \frac{3}{8} a^2$; mithin *Vol* Prismatoids $= \frac{5}{48} a^3$.

§ 22.

Würfel und reguläres Oktaeder.

Gegeben ist ein Würfel mit der Kante a; die Mitten der Seitenflächen desselben sind die Ecken eines regulären Oktaeders; zu berechnen ist

1. die Kante des Oktaeders. Aufl. $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$.

2. das Volumen des Oktaeders. Aufl. $\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

3. das Verhältnis des Würfels zum Oktaeder. Aufl. $6\sqrt{2}$.

Gegeben ist ein Oktaeder mit der Kante a; in dasselbe ist ein Würfel beschrieben, dessen Ecken auf den Oktaederkanten liegen; zu berechnen ist

4. die Kante x des Würfels. Aufl. Ein durch zwei gegenüberliegende Oktaederkanten gehender quadratischer Schnitt sei ABCD, aus dem Würfel werde dadurch das Rechteck EFGH geschnitten, und zwar seien $EH = FG = x$ zwei Würfelkanten (E auf AB, H auf AD u. s. w.); dann ist $EF = x\sqrt{2}$; $AE = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$, $BE = x$, also $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + x = a$; $x = a(2 - \sqrt{2})$.

5. das Volumen des Würfels. Aufl. $2a^3(10 - 7\sqrt{2})$.

6. das Verhältnis des Oktaeders zum Würfel. Aufl. $\frac{5\sqrt{2} - 7}{3}$.

7. das Verhältnis der Oberflächen des Oktaeders und Würfels. Aufl. $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6}$.

In das Oktaeder ist ein Würfel beschrieben, dessen Ecken auf den von zwei gegenüberliegenden Oktaederecken ausgehenden Höhen der Oktaederflächen liegen; zu berechnen ist

8. die Kante x_1 des Würfels. Aufl. ABCD sei der durch zwei gegenüberliegende Höhen geführte Schnitt; er schneide aus dem Würfel das Rechteck EFGH (E auf AB, H auf AD, $EH = x_1$); M sei die Mitte des Oktaeders, BM treffe EF in J; dann ist $AC:BM = EF:BJ$, also $a:\frac{1}{2}a\sqrt{2} = x_1\sqrt{2}:\frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}x_1$; mithin $x_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$.

9. das Verhältnis, in welchem eine Höhe durch die in ihr liegende Würfelecke geteilt wird. Aufl. Es sei $AE = y$ und $EB = y_1$; dann ist $x_1 : a\sqrt{2} = y:\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, also $y = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$ und $y_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{6}a\sqrt{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$; also $y_1 : y = 2:1$; mithin ist E Schwerpunkt einer Seitenfläche.

10. das Volumen des Würfels. Aufl. $\frac{2}{27}a^3\sqrt{2}$.

11. das Verhältnis des Oktaeders zum Würfel. Aufl. $\frac{9}{2}$.

12. das Verhältnis der Oberflächen des Oktaeders und Würfels. Aufl. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. das Verhältnis der Würfel in 5) und 9). Aufl. $27(5\sqrt{2} - 7)$.

14. Gegeben ein reguläres Oktaeder O mit der Kante a; die Schwerpunkte der Flächen desselben werden zu Ecken eines neuen Körpers W_1 genommen; die Schwerpunkte der Flächen dieses Körpers zu Ecken eines neuen O_1, u. s. w. in inf. Zu berechnen ist das Ver-

hältnis $\frac{O}{W_1 + O_1 + W_2 + O_2 + \ldots\ldots}$. Aufl. Es ist $O = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$; W_1 ist ein Würfel (vergl. 8 und 9) $= \frac{2}{27} a^3 \sqrt{2}$ (vergl. 10) $= \frac{2}{3^3} O$; O_1 ist ein Oktaeder mit der Kante $\frac{1}{2} x_1 \sqrt{2} = \frac{1}{3} a$, also $O_1 = \frac{1}{3^3} a^3 \sqrt{2} = \frac{1}{3^3} O$; ferner $W_2 = \frac{2}{3^3} O$, $O_2 = \frac{1}{3^6} O$ u. s. w. Also $W_1 + O_1 + W_2 + O_2 + \ldots\ldots = \frac{2}{3^3} O + \frac{2}{3^5} O + \frac{2}{3^6} O + \ldots\ldots + \frac{1}{3^3} O + \frac{1}{3^6} O' + \frac{1}{3^9} O + \ldots\ldots = \frac{6}{26} O + \frac{1}{26} O = \frac{7}{26} O$; mithin ist das gesuchte Verhältnis $\frac{26}{7}$.

15. Durch ein reguläres Oktaeder mit der Kante a sind zwei gleiche und parallele quadratische Schnitte ABCD und A'B'C'D' gelegt; in jedes dieser Quadrate ist ein neues Quadrat EFGH und E'F'G'H' (E auf AB, F auf BC u.s.w.) so beschrieben, daß sich AE:EB $=$ m:n verhält und E, F, G, H, E', F', G', H' Ecken eines Würfels sind, dessen Kante EF $=$ x zu berechnen ist. Aufl. $EB = \frac{n}{m} AE$, also $x^2 = AE^2 + \frac{n^2}{m^2} AE^2$ und $AE = \frac{mx}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, $EB = \frac{nx}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, $AB = \frac{x(m+n)}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Nun sei J der Mittelpunkt der Quadrate ABCD und EFGH, ferner K die über J liegende Oktaederecke, so ist $JA = \frac{x(m+n)}{\sqrt{2(m^2+n^2)}}$ und $JK = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2}$; da nun JA $=$ JK, so ist $\frac{x(m+n)}{\sqrt{2(m^2+n^2)}} = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2}$, also $x = \frac{a\sqrt{2(m^2+n^2)}}{(m+n)\sqrt{2} + \sqrt{m^2+n^2}}$.
Beispiele. 1) $m = n = 1$, $x = \frac{1}{3} a\sqrt{2}$. 2) $m = 7$, $n = 1$; $x = \frac{5}{13} a\sqrt{2}$.

16. Wie verhält sich das um eine Kugel beschriebene regelmäßige Oktaeder zu dem in dieselbe Kugel beschriebenen Würfel. Aufl. Der Radius der Kugel sei r, die Kante des Oktaeders a und die des Würfels b; dann ist $a = r\sqrt{6}$ und $b = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$ (§ 19,8); also *Vol Okt* $= 4r^3\sqrt{3}$ und *Vol Würfel* $= \frac{8}{9} r^3 \sqrt{3}$; mithin *Okt*: *Würfel* $= 9:2$.

17. Wie verhält sich der um eine Kugel beschriebene Würfel zu dem in dieselbe Kugel beschriebenen regulären Oktaeder? Aufl. Der Radius der Kugel sei r, die Kante des Würfels a und die des Oktaeders b. Dann ist $a = 2r$ und $b = r\sqrt{2}$; also *Vol Würfel* $= 8r^3$ und *Vol Okt* $= \frac{4}{3} r^3$; also *Würfel:Okt* $= 6:1$.

§ 23.

Würfel, Pyramide und Kugel.

Ein Würfel ABCDEFGH wird in sechs Pyramiden zerlegt, deren Spitzen im Mittelpunkt M des Würfels liegen und deren Grundflächen die sechs Würfelflächen sind; in jede Pyramide legt man eine Kugel, welche die fünf Flächen der Pyramide berührt. Zu berechnen ist

1. der Radius r und das Volumen K einer Kugel. Aufl. Legt man durch die Mitten J von AD und L von BC eine Ebene senkrecht zu ABCD, so schneidet diese aus der Pyramide MABCD $\triangle$ JML und aus der Kugel den in JML beschriebenen Kreis; fällt man noch MN $\perp$ JL, so ist $\frac{1}{2}\,a : \frac{1}{2}\,a\sqrt{2} = r : \frac{1}{2}\,a - r$, daher $r = \frac{1}{2}\,a\,(\sqrt{2}-1)$ und $K = \frac{1}{6}\,\pi a^3\,(5\sqrt{2}-7)$.

2. der Radius ρ der Kugel, welche innerhalb der sechs Kugeln liegt und sie alle berührt. Aufl. $\rho = \frac{1}{2}\,a\,(3-2\sqrt{2})$.

3. das Volumen des Körpers, dessen Ecken die Mittelpunkte der sechs Kugeln sind. Aufl. Der Körper ist ein reguläres Oktaeder, dessen Kante $2r = a\,(\sqrt{2}-1)$ ist; mithin $V = \frac{1}{3}\,a^3\sqrt{3}\,(5\sqrt{2}-7)$.

§ 24.

Würfel und Cylinder.

a) Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH (A und E u. s. w. liegen übereinander) mit der Kante a; ein Cylinder ist so um denselben konstruiert, daß die Ecken A, D, H, B, C, G auf dem Mantel desselben liegen. Zu berechnen ist

1. die Höhe. Aufl. $AH = BG = a\sqrt{2}$.

2. der Radius r der Grundfläche. Aufl. CF treffe BG in K und DE treffe AH in J; dann ist die Grundfläche des Cylinders gleich dem um das Rechteck DCKJ beschriebenen Kreise. Es ist $4r^2 = DK^2 = DC^2 + CK^2 = a^2 + \frac{1}{2}\,a^2$, also $r = \frac{1}{4}\,a\sqrt{6}$.

3. das Volumen. Aufl. $\frac{3}{8}\,\pi a^3\sqrt{2}$.

4. der Mantel. Aufl. $\pi a^2\sqrt{3}$.

5. das Verhältnis des Volumens des Cylinders zu dem Volumen der Kugel, welche die Kanten berührt. Aufl. $\frac{9}{8}$.

b) Um den Würfel ABCDEFGH mit der Kante a ist ein Cylinder so zu beschreiben, daß die Ecken B, G, E, A, C, H auf dem

Mantel desselben liegen, die Grundflächen also die um die Dreiecke BGE und ACH beschriebenen Kreise sind. Zu berechnen ist

6. der Radius r der Grundfläche. Aufl. $r = \frac{1}{8} a \sqrt{6}$.

7. die Höhe h des Cylinders. Aufl. Nach § 3, b steht die Würfeldiagonale FD senkrecht auf BGE und ACH und wird durch die beiden Ebenen in drei gleiche Teile geteilt; mithin $h = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$.

8. das Volumen. Aufl. $\frac{2}{9} \pi a^3 \sqrt{3}$.

9. der Mantel. Aufl. $\frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{2}$.

10. das Verhältnis des Volumens des Cylinders zu dem Volumen der um den Würfel beschriebenen Kugel. Aufl. $\frac{9}{4}$.

11. das Verhältnis der Radien der Grundflächen in 2. und 6. Aufl. $\frac{3}{4}$.

12. das Verhältnis der Höhen in 1. und 7. Aufl. $\sqrt{6}$.

13. das Verhältnis der Volumina in 3. und 8. Aufl. $\frac{9\sqrt{6}}{16}$.

14. das Verhältnis der Mäntel in 4. und 9. Aufl. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

c) In einen gegebenen Würfel ist ein Cylinder so konstruiert, daß seine Grundflächen die sechs Würfelflächen in ihren Mitten berühren. Zu berechnen ist

15. der Radius r der Grundfläche. Aufl. r ist der Radius des um ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Kreises, dessen Ecken in den Mitten dreier in einer Ecke zusammenstoßender Würfelflächen liegen; die Seite desselben ist $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, mithin $r = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$.

16. die Höhe h. Aufl. Wie in 7. ist $h = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$.

17. der Mantel. Aufl. $\frac{1}{3} \pi a^2 \sqrt{2}$.

18. das Volumen. Aufl. $\frac{1}{18} \pi a^3 \sqrt{3}$.

19. das Verhältnis des Volumens der Umkugel des Würfels zu dem Volumen des Cylinders in 18. Aufl. 9.

20. das Verhältnis des Volumens des Cylinders in 8. zu dem Volumen des Cylinders in 18. Aufl. 4.

21. Das Volumen eines Cylinders zu berechnen, dessen Grundflächen die in zwei gegenüberliegende Würfelflächen beschriebenen Kreise sind. Aufl. $r = \frac{1}{2} a$, $h = a$, also $Vol = \frac{1}{4} \pi a^3$.

22. das Verhältnis der Cylinder-Volumina in 18. und 21. Aufl. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

23. das Verhältnis des Cylinders in 21. zu der Inkugel des Würfels. Aufl. $\frac{3}{2}$.

§ 25.

Würfel und Kegel.

1. In einen geraden Kegel (r, h) soll ein Würfel so gestellt werden, daß eine Fläche desselben auf der Grundfläche ruht, die vier anderen Ecken dagegen auf dem Mantel liegen; wie groß ist die Kante desselben? Aufl. Legt man durch die Spitze des Kegels und durch die Diagonale der auf der Grundfläche liegenden Würfelfläche einen Schnitt, so ist $h - x : x\sqrt{2} = h : 2r$, daher $x = \frac{2rh}{2r + h\sqrt{2}}$.

In zwei gegenüberliegende Würfelflächen sind die berührenden Kreise konstruiert und über diesen gerade Kegel, deren Spitzen in den Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen liegen, wodurch ein Doppelkegel und ein Körper in Form eines Stundenglases entsteht. Zu berechnen ist

2. die Oberfläche des Doppelkegels. Aufl. Die Höhe des halben Doppelkegels ist $\frac{1}{2}a$, der Radius seiner Grundfläche $\frac{1}{4}a$, seine Seitenlinie $\frac{1}{4}a\sqrt{5}$; mithin Oberfläche des Doppelkegels $= 2\pi \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}a\sqrt{5} = \frac{1}{8}\pi a^2\sqrt{5}$.

3. das Volumen des Doppelkegels. Aufl. $Vol = \frac{2}{3}\pi\frac{1}{16}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{48}\pi a^3$.

4. die Oberfläche des Stundenglases. Aufl. Das Stundenglas besteht aus zwei abgestumpften Kegeln; die Höhe eines derselben ist $\frac{1}{2}a$, die Radien seiner Grundflächen sind $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{4}a$ und seine Seitenlinie ist $\frac{1}{4}a\sqrt{5}$; mithin Oberfläche $= 2\pi \cdot \frac{1}{4}a\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{8}\pi a^2\sqrt{5}$.

5. das Volumen des Stundenglases. Aufl. $Vol = \frac{2}{3}\pi\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^2\right) = \frac{7}{48}\pi a^3$.

6. das Verhältnis der Oberfläche des Doppelkegels zu der des Stundenglases. Aufl. $\frac{1}{3}$.

7. das Verhältnis des Volumens des Doppelkegels zu dem des Stundenglases. Aufl. $\frac{1}{7}$.

8. das Verhältnis des Volumens des Doppelkegels zu dem des Stundenglases zu dem der Inkugel des Würfels. Aufl. $1 : 7 : 8$.

9. der Radius der Inkugel des Doppelkegels. Aufl. $\frac{1}{10}a\sqrt{5}$.

In einem Würfel sind zwei gerade Kegel konstruiert; der Umfang der Grundfläche des einen geht durch die Mitten dreier in einer Ecke

zusammenstoßender Würfelflächen, während seine Spitze in die gegenüberliegende Ecke fällt; der andere hat in Bezug auf die beiden Würfelecken die entgegengesetzte Lage. Es entstehen so ein Doppelkegel A, ein abgestumpfter Doppelkegel B und ein Stundenglas C. Die Grundfläche jedes Kegels ist der Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ ist; also ist der Radius des Umkreises $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$ und die Höhe $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$; also die Seitenlinie $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Zu berechnen ist

10. die Oberfläche von A. Aufl. Die Hälfte des Doppelkegels ist ein gerader Kegel, dessen Radius $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}a\sqrt{6}=\frac{1}{8}a\sqrt{6}$ und dessen Seitenlinie $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{6}=\frac{3}{8}a\sqrt{6}$ ist; mithin ist die Oberfläche $\frac{9}{16}\pi a^2$.

11. das Volumen von A. Aufl. Der Radius eines Kegels ist $\frac{1}{8}a\sqrt{6}$ und die Höhe $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}a\sqrt{3}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; mithin Volumen $A=\frac{1}{32}\pi a^3\sqrt{3}$.

12. der Mantel von B. Aufl. Die Hälfte des abgestumpften Doppelkegels ist ein abgestumpfter gerader Kegel, dessen Radien $\frac{1}{8}a\sqrt{6}$ und $\frac{1}{12}a\sqrt{6}$ sind und dessen Seitenlinie $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{6}=\frac{1}{8}a\sqrt{6}$ ist; mithin Mantel $B=\frac{5}{16}\pi a^2$.

13. die Gesamtoberfläche von B. Aufl. $\frac{19}{48}\pi a^2$.

14. das Volumen von B. Aufl. $\frac{19}{864}\pi a^3\sqrt{3}$.

15. der Mantel von C. Aufl. Das Stundenglas besteht aus zwei abgestumpften geraden Kegeln; die Radien eines Kegels sind $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$ und $\frac{1}{8}a\sqrt{6}$, die Seitenlinie $\frac{1}{8}a\sqrt{6}$ und die Höhe $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$; mithin Mantel $C=\frac{7}{16}\pi a^2$.

16. die Gesamtoberfläche von C. Aufl. $\frac{37}{48}\pi a^2$.

17. das Volumen von C. Aufl. $\frac{37}{864}\pi a^3\sqrt{3}$.

18. das Verhältnis der Mäntel von A, B, C. Aufl. 9 : 5 : 7.

19. das Verhältnis der Gesamtoberflächen von A, B, C. Aufl. 27 : 19 : 37.

20. das Verhältnis der Volumina von A, B, C. Aufl. 27 : 19 : 37; also dasselbe wie das der Gesamtoberflächen.

Gesucht wird das Verhältnis der Oberfläche der Umkugel des Würfels zu

21. der Oberfläche von A. Aufl. $\frac{16}{3}$.

22. dem Mantel von B. Aufl. $\frac{48}{5}$.

23. der Gesamtoberfläche von B. Aufl. $\frac{144}{19}$.

24. dem Mantel von C. Aufl. $\frac{48}{7}$.

25. der Gesamtoberfläche von C. Aufl. $\frac{144}{87}$.

Gesucht wird das Volumen der um den Würfel beschriebenen Kugel zu

26. dem Volumen von A. Aufl. 16.

27. dem Volumen von B. Aufl. $\frac{432}{19}$.

28. dem Volumen von C. Aufl. $\frac{432}{87}$.

29. Über einem Quadrat von der Seite a ist ein gerades Prisma konstruiert und über dem Umkreise der Grundfläche ein gerader Kegel von derselben Höhe; wie groß ist letztere, wenn der Kegelmantel n mal so groß wie die Seitenfläche des Prismas ist? Aufl. Die Höhe sei x; dann ist $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und $s^2 = x^2 + \frac{1}{2}a^2$; mithin $\pi \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} = n \cdot 4ax$, also $x = \frac{\pi a}{\sqrt{64n^2 - 2\pi^2}}$.

§ 26.

Würfel, Kegel und Kugel.

a) In die sechs Würfelflächen sind die Inkreise konstruiert und über denselben sechs Kegel, deren Spitzen im Mittelpunkt des Würfels liegen. Zu berechnen ist

1. das Volumen und der Mantel eines Kegels. Aufl. $Vol = \frac{1}{24}\pi a^3$; Mantel $= \frac{1}{4}\pi a^2\sqrt{2}$.

2. der Radius x der Inkugel eines Kegels. Aufl. $\frac{1}{2}a - x = x\sqrt{2}$; $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{2} - 1)$.

3. das Stück des Würfels, welches übrig bleibt, wenn die sechs Kegel herausgeschnitten werden. Aufl. $\frac{1}{4}a^3(4 - \pi)$.

4. der Radius der größten Kugel, welche man aus einem der acht übrig gebliebenen Eckstücke herausschneiden kann. Aufl. Man lege durch zwei parallele Diagonalen AC und EG zweier gegenüberliegende Würfelflächen eine Ebene, welche aus dem auf ABCD stehenden Kegel $\triangle$ PMN und aus der in der Ecke A liegenden Kugel einen Kreis ausschneidet, dessen Mittelpunkt K auf AM liegt, der AP in L und MP in J berührt; der Kugelradius KL = KJ sei r. Dann ist $(MA - AK)^2 = r^2 + (MP - PL)^2$. Nun ist $AK = r\sqrt{3}$, $AL = r\sqrt{2}$ und $PL = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a - r\sqrt{2}$; mithin $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3} - r\sqrt{3}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}a + r\sqrt{2}\right)^2$ und hieraus $r = \frac{1}{14}a\left(3 - \sqrt{2}\right)$.

b) Auf dem Boden eines Würfels liegen 4 gleich große Kugeln, so daß jede drei Würfelflächen und zwei Kugeln berührt (vergl. § 19, 20); zwischen diesen 4 Kugeln soll, alle berührend, ein Kegel konstruiert werden,

5. dessen Spitze in der Mitte der oberen Grundfläche und dessen Grundfläche auf dem Boden des Würfels liegt. Zu berechnen ist der Radius r der Grundfläche, das Volumen, der Mantel und die Gesamtoberfläche des Kegels. Aufl. Man lege durch zwei parallele Diagonalen AC und EG zweier gegenüberliegenden Würfelflächen eine Ebene, welche aus dem Würfel das Rechteck ACGE, aus dem Kegel $\triangle$ QLQ' (L Mitte von EG, S Mitte von AC) und aus zwei Kegeln Kreise mit den Mittelpunkten M und M' schneidet. Kreis M berühre AC in R und LQ in P. Dann ist $LM^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{11}{16}a^2$; $LP^2 = LM^2 - MP^2 = \frac{10}{16}a^2$, also $LP = \frac{1}{4}a\sqrt{10}$. Bezeichnen wir $QP = QR$ mit x, dann ist $LQ^2 = LS^2 + QS^2$ oder $\left(\frac{1}{4}a\sqrt{10} + x\right)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{4}a\sqrt{2} - x\right)^2$, mithin $x = \frac{1}{8}a(\sqrt{10} - 2)$; $LQ = \frac{1}{8}a(3\sqrt{10} - \sqrt{2})$ und $QS = \frac{1}{8}a(3\sqrt{2} - \sqrt{10})$. Mithin $Vol = \frac{1}{48}\pi a^3(7 - 3\sqrt{5})$; $Mantel = \frac{1}{16}\pi a^2(5\sqrt{5} - 9)$; Gesamtoberfläche $= \frac{1}{8}\pi a^2(\sqrt{5} - 1)$.

6. dessen Spitze in der Mitte des Bodens und dessen Grundfläche auf der oberen Grundfläche des Würfels liegt. Zu berechnen ist der Radius r der Grundfläche, das Volumen, der Mantel und die Gesamtoberfläche des Kegels. Aufl. S sei die Mitte von AC, L die von EG; aus dem Kegel werde $\triangle$ TST' geschnitten; UV, welche die Mitten von resp. AE und CG verbindet, berühre Kreis M in R und treffe ST in Q; ST berühre Kreis M in P; dann ist $SP = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$; $QP = QR$ werde mit x bezeichnet; dann ist $\left(\frac{1}{4}a\sqrt{2} + x\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a\sqrt{2} - x\right)^2 + \frac{1}{4}a^2$, also $x = \frac{1}{8}a\sqrt{2}$; $ST = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$, $LT = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$; mithin $Vol = \frac{1}{24}\pi a^3$; $Mant = \frac{3}{8}\pi a^2$ und Gesamtoberfläche $= \frac{1}{2}\pi a^2$.

§ 27.

Reguläres Tetraeder und Kugel.

a) Gegeben ist ein reguläres Tetraeder mit der Kante a. Wie groß ist der Radius

1. der Umkugel. Aufl. $\frac{1}{4}a\sqrt{6}$.

2. der Kanten berührenden Kugel? Aufl. $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

3. der Inkugel? Aufl. $\frac{1}{12} a \sqrt{6}$.

Wie verhalten sich von den drei Kugeln, von denen die eine um das Tetraeder beschrieben ist, die zweite die Kanten berührt, und die dritte in das Tetraeder beschrieben ist

4. die Oberflächen? Aufl. 9 : 3 : 1.

5. die Volumina? Aufl. $27 : 3\sqrt{3} : 1$.

b) Gegeben eine Kugel mit dem Radius r, wie groß ist die Kante desjenigen Tetraeders,

6. welches um die Kugel beschrieben ist? Aufl. $2r\sqrt{6}$.

7. dessen Kanten die Kugel berühren? Aufl. $2r\sqrt{2}$.

8. welches in die Kugel beschrieben ist? Aufl. $\frac{2}{3} r\sqrt{6}$.

Wie verhalten sich von den drei Tetraedern, von denen das eine um die Kugel beschrieben ist, das zweite die Kugel mit den Kanten berührt und das dritte in das Tetraeder beschrieben ist

9. die Oberflächen? Aufl. 9 : 3 : 1.

10. die Volumina? Aufl. $27 : 3\sqrt{3} : 1$.

c) Die Oberflächen und Volumina derjenigen beiden Kugelsegmente, sowie die zugehörigen Kugelsektoren zu berechnen, welche man erhält, wenn man

11. eine Tetraederfläche verlängert bis sie die um das Tetraeder beschriebene Kugel schneidet. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{4} a\sqrt{6}$; die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{3} a\sqrt{6}$ und $\frac{1}{6} a\sqrt{6}$; daher die beiden Kalotten πa^2 und $\frac{1}{2}\pi a^2$; und die Kugelsegmente $\frac{5}{64}\pi a^3\sqrt{6}$ und $\frac{7}{216}\pi a^3\sqrt{6}$. Die zugehörigen Kugelsektoren sind $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{6}$ und $\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{6}$.

12. die Kugel konstruiert, welche die Kanten des Tetraeders berührt, und welche durch eine Tetraederfläche von der Kugel abgeschnitten werden. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{4} a\sqrt{2}$, die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{12} a\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{12} a\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$; daher sind die beiden Kalotten $\frac{1}{12}\pi a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{12}\pi a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$; und die beiden Kugelsegmente $\frac{1}{432}\pi a^3\sqrt{2}(9+4\sqrt{3})$ und $\frac{1}{432}\pi a^3\sqrt{2}(9-4\sqrt{3})$. Die zugehörigen Kugelsektoren sind $\frac{1}{144}\pi a^3\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{144}\pi a^3\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$.

d) Um ein reguläres Tetraeder ist eine Kugel beschrieben; dann sind noch zwei Kugeln konstruiert, von denen jede dieselbe Tetraederfläche in ihrem Mittelpunkt und die Umkugel berührt. Zu berechnen

13. die Radien der beiden Kugeln. Aufl. $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$ und $\frac{1}{12}a\sqrt{6}$.

14. die Oberflächen der beiden Kugeln. Aufl. $\frac{2}{3}\pi a^2$ und $\frac{1}{6}\pi a^2$.

15. die Volumina der beiden Kugeln. Aufl. $\frac{1}{27}\pi a^3\sqrt{6}$ und $\frac{1}{216}\pi a^3\sqrt{6}$.

16. das Verhältnis der Oberflächen der drei Kugeln. Aufl. 9 : 4 : 1; also ist die Oberfläche der Umkugel weniger der der kleineren doppelt so groß, wie die der größeren der beiden.

17. das Verhältnis der Volumina der drei Kugeln. Aufl. 27 : 8 : 1; also ist die Umkugel dreimal so groß wie die beiden anderen zusammengenommen.

18. das Verhältnis der Radien der beiden Kugeln zu den Radien der Inkugel und Umkugel. Aufl. 2 : 1 : 1 : 3.

e) In ein reguläres Tetraeder mit der Kante a sind vier gleiche Kugeln (Radius r) konstruiert, welche sich untereinander und je drei Tetraederflächen berühren; ferner eine große Kugel (Radius R), welche die vier gleichen einschließend berührt und eine kleine Kugel (Radius ρ), welche die vier gleichen von außen berührt, aber zwischen ihnen liegt. Zu berechnen ist

19. r. Aufl. Man lege durch die Kante AD des Tetraeders und die Mitte E von BC einen Schnitt, so geht dieser durch den Mittelpunkt O des Tetraeders, welcher gleichzeitig der Mittelpunkt der Kugeln mit den Radien R und ρ ist. M sei der Mittelpunkt der in der Ecke A liegenden Kugel, M_1 der der Kugel in der Ecke D, wobei zu beachten, daß AE von M, BE von M_1, AD von keiner von beiden Kugeln berührt wird; ferner sei F die Mitte von AD, $DG \perp ABC$, $MH \perp AE$ und MM_1 schneide EF in L, dem Berührungspunkt der Kugeln M und M_1. Dann ist $AO = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$, $EO = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Im $\triangle AOF$ verhält sich $AF : AO = ML : MO$ oder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a\sqrt{6} = r : r+\rho$, mithin $r+\rho = \frac{1}{2}r\sqrt{6}$ (1). Im $\triangle AOG$ verhält sich $AO : GO = AM : MH$ oder $\frac{1}{4}a\sqrt{6} : \frac{1}{12}a\sqrt{6} = \frac{1}{4}a\sqrt{6} - (r+\rho) : r$, mithin $r+\rho = \frac{1}{4}a\sqrt{6} - 3r$ (2). Aus (1) und (2) folgt $r = \frac{1}{10}a(\sqrt{6}-1)$.

20. ρ. Aufl. In 19. war $r+\rho = \frac{1}{2}r\sqrt{6}$ und $r = \frac{1}{10}a(\sqrt{6}-1)$ gefunden; daher $\rho = \frac{1}{20}a(8-3\sqrt{6})$.

21. R. Aufl. $R = 2r+\rho$; mithin unter Berücksichtigung von 19., $R = \frac{1}{20}a(4+\sqrt{6})$.

f) Ein reguläres Tetraeder soll parallel zur Grundfläche so durchschnitten werden, daß die Berührungskugel des oberen Teils und

α) der größte in den unteren Teil konstruierbare abgestumpfte Kegel

22. gleiche krumme Oberflächen haben. Aufl. Die Ebene schneide von der Tetraederkante an der Spitze das Stück x ab, so ist der Radius der Berührungskugel $\frac{1}{12} x \sqrt{6}$, mithin die Oberfläche $\frac{1}{6}\pi x^2$. Die Höhe des abgestumpften Kegels ist $h = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,(a-x)$; der Radius seiner unteren Grundfläche $r = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$, der seiner oberen $\rho = \frac{1}{6} x \sqrt{3}$ und die Seitenlinie $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(a-x)$; mithin sein Mantel $\frac{1}{4}\pi\,(a^2 - x^2)$. Daher $x = a\sqrt{\frac{3}{5}}$. Das Volumen der Kugel ist dann $\frac{1}{120}\pi a^3 \sqrt{\frac{2}{5}}$ und das des abgestumpften Kegels $\frac{1}{108}\pi a^3 \sqrt{6}\left(1 - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

23. gleiches Volumen haben. Aufl. $x = a\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Die Oberfläche der Kugel ist dann $\frac{1}{6}\pi a^2 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ und der Mantel des abgestumpften Kegels $\frac{1}{4}\pi a^2\left(1 - \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$.

β) der größte in den unteren Teil konstruierbare gerade Cylinder

24. gleiche krumme Oberflächen haben. Aufl. Wie in 22. ist die Oberfläche der Kugel $\frac{1}{6}\pi x^2$, die Höhe des Cylinders $\frac{1}{3}\sqrt{6}\,(a-x)$, sein Radius $\frac{1}{6} x \sqrt{3}$, mithin sein Mantel $\frac{1}{3}\pi x \sqrt{2}\,(a-x)$ und daher $x = \frac{2a\,(4-\sqrt{2})}{7}$. Das Volumen der Kugel ist dann $\frac{\pi x^2 a \sqrt{3}\,(2\sqrt{2}-1)}{378}$ und das des Cylinders $\frac{\pi x^2 a \sqrt{6}\,(2\sqrt{2}-1)}{252}$; daher verhält sich das Volumen der Kugel zu dem des Cylinders $= \sqrt{2} : 3$.

25. gleiches Volumen haben. Aufl. $x = \frac{6}{7} a$. Die Oberfläche der Kugel ist dann $\frac{6}{49}\pi a^2$ und der Mantel des Cylinders $\frac{2}{49}\pi a^2 \sqrt{2}$; daher verhält sich die Oberfläche der Kugel zu dem Mantel des Cylinders $= 3 : \sqrt{2}$.

g) In ein reguläres Tetraeder mit der Höhe h ist die Inkugel K (Radius ρ) konstruiert, darauf in einer Tetraederecke eine zweite Kugel K_1 (Radius ρ_1), welche die erste und drei Tetraederflächen berührt; ferner eine dritte kleinere Kugel K_2 (Radius ρ_2), welche wieder K_1 berührt und drei Tetraederflächen u. s. w. in inf. Zu berechnen ist

26. die Summe aller Kugeln. Aufl. Es ist $\rho = \frac{1}{4} h$, mithin $K = \frac{1}{48}\pi h^3$; ferner $h_1 = h - 2\rho = \frac{1}{2} h$, also $\rho_1 = \frac{1}{4} h_1 = \frac{1}{8} h$; mithin

$K_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{48} \pi h^3$; ebenso $\rho_2 = \frac{1}{16} h$ und $K_2 = \frac{1}{8^3} \cdot \frac{1}{48} \pi h^3$ u. s. w. Folglich $K + K_1 + K_2 + \ldots = \frac{1}{42} \pi h^3$.

27. die Summe aller Kugeln mit Ausnahme von K. Aufl. $K_1 + K_2 + \ldots = \frac{1}{336} \pi h^3$. Daher verhält sich die Summe aller dieser Kugeln zu K wie 1 : 7.

28. In eine Kugel K ist ein reguläres Tetraeder T konstruiert, in dieses eine zweite Kugel K_1, in diese ein zweites Tetraeder T_1 u. s. w. in inf. Wie groß ist die Summe aller Kugeln und wie groß die Summe aller Tetraeder? Aufl. Es ist $T = \frac{2K}{3\pi\sqrt{3}}$; $K_1 = \frac{1}{27} K$; $T_1 = \frac{1}{27} \frac{2K}{3\pi\sqrt{3}}$; $K_2 = \frac{1}{27^2} K$; $T_2 = \frac{1}{27^2} \frac{2K}{3\pi\sqrt{3}}$ u. s. w.; folglich $K + K_1 + K_2 + \ldots = \frac{27}{26} K$ und $T + T_1 + T_2 + \ldots = \frac{6\sqrt{3}}{26\pi} K$.

29. Den Radius x der Kugel zu berechnen, welche drei Tetraederflächen und die Umkugel berührt. Aufl. Der Mittelpunkt liegt auf der Höhe, welche von der den Flächen gemeinschaftlichen Ecke ausgeht, und die Kugel berührt die drei Tetraederflächen in Punkten, welche auf den von der Ecke ausgehenden Höhen der Seitenflächen liegen. Daher $2r - x : x = \frac{1}{2} a\sqrt{3} : \frac{1}{6} a\sqrt{3}$; also $x = \frac{1}{2} r = \frac{1}{8} a\sqrt{6}$.

30. Den Radius y der Kugel zu berechnen, welche drei Tetraederflächen und die Inkugel berührt (vgl. 26). Aufl. $\frac{1}{3} a\sqrt{6} - \frac{1}{6} a\sqrt{6} - y : y = \frac{1}{2} a\sqrt{3} : \frac{1}{6} a\sqrt{3}$, also $y = \frac{1}{24} a\sqrt{6}$.

§ 28.

Pyramide und Kugel.

1. Über der Grundfläche eines regulären Tetraeders ist eine Pyramide konstruiert, deren Spitze auf der Höhe des Tetraeders liegt und deren Seitenflächen daher gleichschenklige Dreiecke sind. Wie groß ist die Höhe der Pyramide, wenn der Radius der Inkugel derselben halb so groß wie der der Inkugel des regulären Tetraeders ist. Aufl. Die gesuchte Höhe sei h. Der Radius der Inkugel des regulären Tetraeders ist $\frac{1}{12} a\sqrt{6}$, mithin ist der Radius ρ_1 der Inkugel der Pyramide $\frac{1}{24} a\sqrt{6}$. Das Volumen der Pyramide ist $\frac{1}{3} h \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$; ferner besteht die Pyramide aus 4 anderen Pyramiden, welche sämtlich die Höhe ρ_1 haben; drei von ihnen haben die Seitenflächen der Pyramide

als Grundflächen, deren Inhalt $\frac{1}{2}\,a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$ ist, und eine die Grundfläche des Tetraeders; mithin ist $\frac{1}{4}\,ha^2\sqrt{3} = \rho_1\left(\frac{3}{2}\,a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}+\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{24}\,a\sqrt{6}\left(\frac{3}{2}\,a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}+\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}\right)$ und folglich $h = \frac{2}{21}\,a\sqrt{6}$.

2. Über einem Quadrat mit der Seite a ist eine gerade Pyramide von der Höhe h konstruiert; über derselben Grundfläche ist eine zweite gerade Pyramide konstruiert, deren Höhe h_1 zu berechnen ist, wenn der Radius ρ_1 der in dieselbe konstruierten Kugel halb so groß ist wie der Radius ρ der in die erste konstruierten. Aufl. Es ist $\rho = \frac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}}$; mithin $\rho_1 = \frac{ah}{2(a+\sqrt{a^2+4h^2})}$ und da auch $\rho_1 = \frac{ah_1}{a+\sqrt{a^2+4h_1^2}}$, so findet man $h_1 = \frac{ah\,(a+\sqrt{a^2+4h^2})}{2a^2+3h^2+2a\sqrt{a^2+4h^2}}$.

3. In 2) soll $\rho_1 = \frac{1}{n}\,\rho$ sein. Aufl. Es verhält sich $h : h_1 = \frac{n\,(a+\sqrt{a^2+4h^2})}{2a} - \frac{2h^2}{na\,(a+\sqrt{a^2+4h^2})} : 1$; oder wenn man den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche mit φ bezeichnet, so verhält sich $h:h_1 = n^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\varphi^2 : n\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\varphi^2\right)$.

4. Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a ist eine gerade Pyramide mit der Höhe $a\sqrt{2}$ konstruiert. In die Pyramide ist eine Reihe von Kugeln konstruiert, von denen die erste die Grundfläche und die Seitenflächen, die übrigen die je vorhergehende Kugel und die Seitenflächen berühren. Die Summe der Volumina der unendlich vielen Kugeln ist zu berechnen. Aufl. Die Höhe x einer Seitenfläche ist gleich $\frac{5}{6}\,a\sqrt{3}$. Nun ist $\frac{1}{8}\,\rho\left(\frac{3xa}{2}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{2}$; daher $\rho = \frac{1}{6}\,a\sqrt{2}$. Ist ρ_1 der Radius der zweiten Kugel, so verhält sich $\rho : \rho_1 = h : h-2\rho$ oder $\rho:\rho_1 = a\sqrt{2} : a\sqrt{2} - \frac{1}{8}\,a\sqrt{2} = 1 : \frac{2}{8}$, also $\rho_1 = \frac{2}{8}\,\rho$. Mithin ist die Summe der Kugeln $= \frac{4}{8}\,\pi\rho^3 + \frac{4}{8}\,\pi\rho^3\left(\frac{2}{8}\right)^3 + \frac{4}{8}\,\pi\rho^3\left(\frac{2}{8}\right)^9 + \ldots = \frac{4}{8}\,\pi\rho^3\,\frac{27}{19} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{57}$.

5. In eine gerade sechsseitige Pyramide, deren Grundkanten a und Seitenkanten $\frac{1}{2}a\sqrt{13}$ gegeben sind, ist eine Kugel beschrieben; legt man durch die Berührungspunkte derselben mit den Seitenflächen eine Ebene, so sind die Oberflächen und Volumina der entstandenen Kugelsegmente zu berechnen. Aufl. Die Höhe einer Seitenfläche ist $a\sqrt{3}$; ein ebener Schnitt durch zwei solche gegenüberliegende Höhen gelegt schneidet aus der Grundfläche einen kleinen Durchmesser $a\sqrt{3}$, das ausgeschnittene Dreieck ist also gleichseitig, die Seiten desselben sind $a\sqrt{3}$ und seine Höhen $\frac{3}{2}a$; der Radius seines Inkreises, welcher gleichzeitig Kugelradius ist, ist $\frac{1}{2}a$. Die Höhen der abgeschnittenen Segmente sind $\frac{1}{4}a$ und $\frac{3}{4}a$; folglich sind die Kalotten $\frac{1}{4}\pi a^2$ und $\frac{3}{4}\pi a^2$, die Segmente $\frac{5}{192}\pi a^3$ und $\frac{9}{64}\pi a^3$.

6. Der Radius ρ der Inkugel einer geraden fünfseitigen Pyramide, deren sämtliche Kanten a sind, soll berechnet werden. Aufl. Die Grundfläche sei ABCDE, die Spitze F und die Höhe FG; $CH \perp AE$ geht durch G; ist K der Kugelmittelpunkt und $KL \perp FH$, so ist $KL = \rho$. Nun ist $FH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $GH = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,54^0 = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, also $FG^2 = \frac{a^3(5-\sqrt{5})}{10}$. Da nun $KL:FK = GH:FH$ oder $\rho : a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} - \rho = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} : \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, so ist $\rho(\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,54^0) = \frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.

7. Über einem Quadrat, dessen Seiten die Grundfläche einer Halbkugel mit dem Radius r berühren, ist eine gerade Pyramide so konstruiert, daß ihre Seitenkanten die Oberfläche der Halbkugel berühren. Das Volumen der Pyramide ist zu berechnen, ferner die durch eine Seitenfläche abgeschnittene Kalotte. Aufl. Die Diagonale der Grundfläche ist $2r\sqrt{2}$, die Höhe der Pyramide $r\sqrt{2}$, mithin ihr Volumen gleich $\frac{4}{3}r^3\sqrt{2}$. Da eine Seitenkante $2r$ und die Höhe einer Seitenfläche $r\sqrt{3}$ ist, so ist, wenn die vom Mittelpunkt auf eine Seitenfläche gefällte Senkrechte mit x bezeichnet wird, $x:r = r\sqrt{2}:r\sqrt{3}$, also $x = \frac{1}{3}r\sqrt{6}$; daher ist die Höhe des Segmentes $= \frac{r(3-\sqrt{6})}{3}$, mithin $Kal = 2\pi r^2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

8. In den begrenzenden Kreis eines Kugelsegmentes, dessen Höhe ein Drittel des Durchmessers der Kugel ist, ist ein gleichseitiges Dreieck ge-

zeichnet und über demselben sind nach entgegengesetzten Seiten zwei Pyramiden konstruiert, deren Spitzen in den Endpunkten des auf dem Kugelkreise senkrechten Durchmessers liegen. Das Volumen der Doppelpyramide ist zu berechnen. Aufl. Ist r der Kugelradius, ρ der des Kugelkreises, so ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $r\sqrt{2}$, seine Seite $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ und sein Inhalt $\frac{2}{3}r^2\sqrt{3}$; mithin ist das Volumen der Doppelpyramide $= \frac{4}{9}r^3\sqrt{3}$.

9. In welcher Entfernung x vom Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r muß eine Ebene gelegt werden, damit, wenn in den entstandenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck und ein Quadrat gezeichnet und über diesen Figuren nach entgegengesetzter Seite gerade Pyramiden konstruiert werden, deren Spitzen auf der Kugelfläche liegen, beide Pyramiden gleich werden. Aufl. Der Radius des Kugelkreises ist $\sqrt{r^2-x^2}$, also ist der Inhalt des Seckseckes $= \frac{3(r^2-x^2)\sqrt{3}}{2}$ und der des Quadrats $= 2(r^2-x^2)$. Da nun die vierseitige Pyramide in dem größeren Kugelsegment liegen muß, so ist $\frac{1}{3}(r-x)\frac{3(r^2-x^2)\sqrt{3}}{2}$ $= \frac{2}{3}(r+x)(r^2-x^2)$; mithin $x = \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}r$.

§ 29.

Reguläres Oktaeder und Kugel.

Gegeben ist ein reguläres Oktaeder mit der Kante a. Wie groß ist der Radius

1. der Inkugel? Aufl. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.
2. der Kanten berührenden Kugel? Aufl. $\frac{1}{2}a$.
3. der Inkugel? Aufl. $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$.

Wie verhalten sich von den drei Kugeln, von denen die eine um das Oktaeder beschrieben ist, die zweite die Kanten berührt, und die dritte in das Oktaeder beschrieben ist,

4. die Oberflächen? Aufl. wie 6 : 3 : 2.
5. die Volumina? Aufl. wie $18\sqrt{2} : 9 : 2\sqrt{6}$.

Gegeben eine Kugel mit dem Radius r, wie groß ist die Kante desjenigen Oktaeders,

6. welches um die Kugel beschrieben ist? Aufl. $r\sqrt{6}$.
7. dessen Kanten die Kugel berühren? Aufl. 2r.

8. welches in die Kugel beschrieben ist? Aufl. $r\sqrt{2}$.

Wie verhalten sich von den drei Oktaedern, von denen das eine um die Kugel beschrieben ist, das zweite die Kugel mit den Kanten berührt und das dritte in das Oktaeder beschrieben ist

9. die Oberflächen? Aufl. wie $3:2:1$.

10. die Volumina? Aufl. wie $3\sqrt{3}:2\sqrt{2}:1$.

Die Oberflächen und Volumina derjenigen beiden Kugelsegmente, sowie die zugehörigen Kugelsektoren zu berechnen, welche man erhält, wenn man

11. eine Oktaederfläche verlängert bis sie die Umkugel des Oktaeders schneidet. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$; die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{6}a\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{6}a\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)$; daher die beiden Kalotten $\frac{1}{8}\pi a^2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{8}\pi a^2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)$; und die Kugelsegmente $\frac{1}{54}\pi a^3\sqrt{6}\,(3\sqrt{3}+4)$ und $\frac{1}{54}\pi a^3\sqrt{6}\,(3\sqrt{3}-4)$. Die zugehörigen Kugelsektoren sind $\frac{1}{18}\pi a^3\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+1)$ und $\frac{1}{18}\pi a^3\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-1)$.

12. die Kugel konstruiert, welche die Kanten des Oktaeders berührt und welche durch eine Oktaederfläche von der Kugel abgeschnitten werden. Aufl. Der Kugelradius ist $\frac{1}{2}a$, die Höhen der beiden Segmente sind $\frac{1}{6}a\,(3+\sqrt{6})$ und $\frac{1}{6}a\,(3-\sqrt{6})$; daher sind die beiden Kalotten $\frac{1}{6}\pi a^2\,(3+\sqrt{6})$ und $\frac{1}{6}\pi a^2\,(3-\sqrt{6})$; die beiden Kugelsegmente $\frac{1}{216}\pi a^3\sqrt{6}\,(3\sqrt{6}+7)$ und $\frac{1}{216}\pi a^3\sqrt{6}\,(3\sqrt{6}-7)$; und die zugehörigen Kugelsektoren $\frac{1}{36}\pi a^3\,(3+\sqrt{6})$ und $\frac{1}{36}\pi a^3\,(3-\sqrt{6})$.

Durch Diagonalebenen kann das reguläre Oktaeder in zwei, vier und acht gleiche Teile geteilt werden. Wie groß ist der Radius einer Kugel, welche

13. in das halbe Oktaeder beschrieben ist? Aufl. Der Radius sei ρ_1; verbindet man den Mittelpunkt der Kugel mit den fünf Oktaederecken, so erhält man fünf Pyramiden, welche zusammen gleich dem halben Oktaeder sind; mithin $\frac{1}{3}a^2\rho_1+\frac{1}{3}a^2\rho_1\sqrt{3}=\frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$, also $\rho_1=\dfrac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

14. in ein viertel Oktaeder beschrieben ist? Aufl. Der Radius sei ρ_2. Auf ähnliche Weise wie in 13. findet man $\frac{1}{3}a^2\rho_2+\frac{1}{6}a^2\rho_2\sqrt{3}=\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$; mithin $\rho_2=\dfrac{a}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

15. in ein achtel Oktaeder beschrieben ist? Aufl. Der Radius

sei ρ_3. Auf ähnliche Weise wie in 13. findet man $\frac{1}{4}a^2\rho_3 + \frac{1}{12}a^2\rho_3\sqrt{3} = \frac{1}{24}a^3\sqrt{2}$, also $\rho_3 = \frac{a}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Wie verhalten sich die Oberflächen der Kugeln, welche beschrieben sind

16. in ein halbes und ein achtel Oktaeder? Aufl. wie 3:1.

17. in ein halbes und ein viertel Oktaeder. Aufl. wie $1 : 2(2-\sqrt{3})$.

18. in ein viertel und ein achtel Oktaeder. Aufl. wie $6 : 2+\sqrt{3}$.

Wie verhalten sich die Volumina der Kugeln, welche beschrieben sind

19. in ein halbes und ein viertel Oktaeder. Aufl. wie $1 : 2(3\sqrt{3}-5)$.

20. in ein halbes und ein achtel Oktaeder. Aufl. wie $3\sqrt{3} : 2$.

21. in ein viertel und ein achtel Oktaeder. Aufl. wie $6\sqrt{3} : 3\sqrt{3}+5$.

22. In eine Kugel K ist ein reguläres Oktaeder O beschrieben, in dieses eine zweite Kugel K_1, in diese ein zweites Oktaeder O_2 u. s. w. in inf. Wie groß ist die Summe aller Kugeln und wie groß die Summe aller Oktaeder? Aufl. Es ist $O = \frac{K}{\pi}$, $K_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}K$, $O_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{K}{\pi}$, $K_2 = \frac{1}{27}K$, $O_2 = \frac{1}{27}\frac{K}{\pi}$ u. s. w. Mithin $K + K_1 + K_2 + \ldots = \frac{27+3\sqrt{3}}{26}K$ und $O + O_1 + O_2 + \ldots = \frac{27+3\sqrt{3}}{26}\frac{K}{\pi}$. Daher verhält sich die Summe aller Kugeln zur Summe aller Oktaeder $= \pi : 1$.

In ein halbes Oktaeder ist eine Reihe von Kugeln beschrieben, von denen die erste den Diagonalenschnitt und die vier Oktaederflächen, die folgenden immer die vorangehende größere und die nachfolgende kleinere Kugel berühren und außerdem die vier Oktaederflächen.

23. Wie verhalten sich die Radien zweier aufeinander folgenden Kugeln? Aufl. Es ist $\rho_1 = \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (13). Führt man einen Schnitt durch die Spitze und die Mitten zweier Grundkanten, so erhält man ähnliche Dreiecke, aus denen sich leicht $\rho_2 = \frac{1}{4}a\sqrt{2}\,(3\sqrt{3}-5)$ ergiebt; mithin $\rho_1 : \rho_2 = 1 : 2-\sqrt{3}$.

24. Die Summe aller Kugeln zu berechnen. Aufl. Es ist $K_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3$, $K_2 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3(2-\sqrt{3})^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}$, $K_3 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3(2-\sqrt{3})^6 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3\frac{1}{(2+\sqrt{3})^6}$ u. s. w.; mithin $K_1+K_2+K_3+\ldots = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3\frac{(2+\sqrt{3})^3}{(2+\sqrt{3})^3-1} = \frac{2}{15}\pi\rho_1^3(3\sqrt{3}+5) = \frac{\pi a^3}{30\sqrt{2}}$.

25. Werden auch in die andere Hälfte des Oktaeders solche Kugeln konstruiert, so ist der Raum zu berechnen, welcher bleibt, wenn man alle Kugeln von der um das Oktaeder beschriebenen subtrahiert. Aufl. $\frac{3}{10}\pi a^3\sqrt{2}$.

Um die Ecken eines regulären Oktaeders sind gleiche Kugeln beschrieben, von denen jede die vier benachbarten berührt. An je drei benachbarte Kugeln wird von außen eine berührende Ebene gelegt; diese Ebenen bilden ein reguläres Oktaeder, von dem berechnet werden soll

26. der Radius ρ_1 der Inkugel. Aufl. Der Radius jeder Kugel ist $\frac{1}{2}a$, mithin steht jede Fläche des neuen Oktaeders um $\frac{1}{2}a$ von der des gegebenen ab; also $\rho_1 = \rho + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \frac{1}{6}a\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

27. die Kante a_1 des neuen Oktaeders. Aufl. $a_1 : a = \rho_1 : \rho$ oder $a_1 : a = \rho + \frac{1}{2}a : \rho$ oder $a_1 : a = \frac{1}{6}a\sqrt{6} + \frac{1}{2}a : \frac{1}{6}a\sqrt{6}$; mithin $a_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

28. der Radius r_1 der Umkugel. Aufl. $r_1 = \frac{1}{2}a_1\sqrt{2} = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

29. Der Radius x der Kugel zu berechnen, welche vier in einer Ecke zusammenstoßende Oktaederflächen und die Umkugel berührt. Aufl. $x : a\sqrt{2} - x = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; mithin $x = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.

30. Den Radius y der Kugel zu berechnen, welche vier in einer Ecke zusammenstoßende Oktaederflächen und die Inkugel berührt. Aufl. $y : \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \rho - y = \rho : \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; mithin $y = \frac{a(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6}$.

§ 30.

Oktaeder, begrenzt von acht kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, und Kugel.

a) Die Grundkante des Oktaeders sei a, mithin der Querschnitt a^2 und die Entfernung der beiden Spitzen (Achse) sei h. Wie groß ist

1. eine Seitenkante b^2. Aufl. $\frac{1}{2}\sqrt{h^2+2a^2}$.

2. der Inhalt F eines gleichschenkligen Dreiecks? Aufl. $\frac{1}{4}a\sqrt{h^2+a^2}$.

3. das Volumen des Oktaeders? Aufl. $\frac{1}{3}a^2h$.

4. der Radius ρ der Inkugel? Aufl. Es ist $\frac{8}{3}\rho F=\frac{1}{3}a^2h$, mithin $\rho=\frac{ah}{2\sqrt{h^2+a^2}}$.

5. der Inhalt eines durch vier Seitenkanten gehenden Querschnittes? Aufl. $\frac{1}{2}ah\sqrt{2}$.

b) In ein reguläres Oktaeder, dessen Kante a ist, sind zwei gleich große Kugeln (Radien ρ) beschrieben, von denen jede je vier Oktaederflächen und die andere Kugel berührt. Man läßt nun diejenige Oktaederachse, welche durch die beiden Kugelmittelpunkte geht, von beiden Seiten so lange gleichmäßig abnehmen, bis die in das so verkürzte flachere Oktaeder in derselben Weise konstruierten Berührungskugeln einen halb so großen Radius ρ_1 haben wie die ursprünglichen. Von dem verkürzten Oktaeder ist zu berechnen

6. die Achse $2h_1$. Aufl. Nach § 29, 13 ist $\rho=\frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$, also $\rho_1=\frac{a}{2\,(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\frac{a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{8}$.

Man lege durch die Achse des Oktaeders und die Mitten A und B zweier gegenüberliegender Kanten eine Ebene, welche aus dem halben verkürzten Oktaeder $\triangle$ ACB ausschneiden möge, die halbe Achse desselben sei CG, der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel O, der Radius $OF \perp AC$. Dann ist $OF : OC = AG : AC$ oder $\rho_1 : h_1 = \frac{a}{2} : \sqrt{\frac{a^2}{4}-h_1^2}$; mithin $h_1=\frac{2a^2\rho_1}{a^2-4\rho_1^2}=a\sqrt{2}\,(3\sqrt{3}-5)$.

7. das Volumen? Aufl. $\frac{2}{3}a^2h_1=\frac{2}{3}a^3\sqrt{2}\,(3\sqrt{3}-5)$.

8. eine Seitenkante? Aufl. $a\sqrt{\frac{209-120\sqrt{3}}{2}}$.

Der Radius einer der beiden Berührungskugeln des verkürzten Oktaeders soll $\frac{1}{n}$ von dem Radius der beiden in das Oktaeder gelegten Kugeln sein, also $\rho_1 = \frac{1}{n}\rho$. Von dem verkürzten Oktaeder ist zu berechnen

9. die Achse $2h_1$. Aufl. $\rho_1 = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4n}$; ähnlich wie in 6 findet man $h_1 = \frac{an\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(n^2-2+\sqrt{3})}$.

10. das Verhältnis der Achse des ganzen Oktaeders zu der des verkürzten. Aufl. $2h : 2h_1 = n(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{n}(\sqrt{3}-1) : 2$.

11. das Volumen. Aufl. $\frac{a^3 n\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3(n^2-2+\sqrt{3})}$.

12. eine Seitenkante. Aufl. $\frac{a}{n^2-2+\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n^4+7-4\sqrt{3}}{2}}$.

c) Um dieselbe Kugel vom Radius r ist ein von kongruenten gleichschenkligen Dreiecken begrenztes Oktaeder O_1 (spitzes) konstruiert, dessen vertikale Achse sich zur horizontalen wie 2 : 1 verhält, und ein anderes O_2 (stumpfes), dessen vertikale Achse sich zur horizontalen wie 1 : 2 verhält. In dem spitzen Oktaeder O_1 werde nun die halbe vertikale Achse mit $2x_1$ bezeichnet, dann ist die halbe horizontale Achse x_1; eine Seitenkante sei a_1, eine Grundkante b_1, eine Seitenfläche S_1, die Höhe einer Seitenfläche h_1. In dem stumpfen Oktaeder O_2 sei die halbe vertikale Achse x_2, dann ist die halbe horizontale $2x_2$; eine Seitenkante sei a_2 u. s. w. analog wie bei O_1. Gegeben ist der Radius r der in beide beschriebenen Kugeln.

Von O_1 ist zu berechnen

13. x_1. Aufl. $a_1 = x_1\sqrt{5}$; $b_1 = x_1\sqrt{2}$; $h_1^2 = 4x_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2 = \frac{9}{2}x_1^2$, also $h_1 = \frac{3}{2}x_1\sqrt{2}$; $S_1 = \frac{3}{2}x_1^2$. Mithin $O_1 = \frac{8}{3}S_1 r = 4x_1^2 r$ und $O_1 = \frac{2}{3}b_1^2 \cdot 2x_1 = \frac{8}{3}x_1^3$; folglich $x_1 = \frac{3}{2}r$.

14. a_1, b_1, h_1, S_1, O_1. Aufl. $a_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{5}$; $b_1 = \frac{3}{2}r\sqrt{2}$; $h_1 = \frac{9}{4}r\sqrt{2}$; $S_1 = \frac{27}{8}r^2$; $O_1 = 9r^3$.

Von O_2 ist zu berechnen

15. x_2. Aufl. $a_2 = x_2\sqrt{5}$; $b_2 = 2x_2\sqrt{2}$; $h_2 = x_2\sqrt{3}$; $S_2 = x_2^2\sqrt{6}$. Mithin $O_2 = \frac{8}{3}S_2 r = \frac{8}{3}x_2^2 r\sqrt{6}$ und $O_2 = \frac{2}{3}b_2^2 x_2 = \frac{16}{3}x_2^3$; folglich $x_2 = \frac{1}{2}r\sqrt{6}$.

16. a_2, b_2, h_2, S_2, O_2. Aufl. $a_2 = \frac{1}{2}\, r\sqrt{30}$; $b_2 = 2r\sqrt{3}$; $h_2 = \frac{3}{2}\, r\sqrt{2}$; $S_2 = \frac{3}{2}\, r^2\sqrt{6}$; $O_2 = 4r^3\sqrt{6}$.

Bezeichnet man noch die halbe Achse des um dieselbe Kugel beschriebenen regulären Oktaeders mit x, eine Kante desselben mit a, eine Seitenfläche mit S, die Höhe derselben mit h und das Volumen mit O, so ist $a = r\sqrt{6}$ (§ 29, 6); $x = r\sqrt{3}$; $h = \frac{3}{2}\, r\sqrt{2}$; $S = \frac{3}{2}\, r^2\sqrt{3}$; $O = 4r^3\sqrt{3}$.

In welchem Verhältnis stehen von den drei Oktaedern, dem regelmäßigen, dem spitzen und dem stumpfen

17. die vertikalen Achsen? Aufl. $x : 2x_1 : x_2 = \sqrt{3} : 3 : \frac{1}{2}\sqrt{6} = 1 : \sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

18. die horizontalen Achsen? Aufl. $x : x_1 : 2x_2 = \sqrt{3} : \frac{3}{2} : \sqrt{6} = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

19. die Seitenkanten? Aufl. $a : a_1 : a_2 = \sqrt{6} : \frac{3}{2}\sqrt{5} : \frac{1}{2}\sqrt{30} = 4\sqrt{5} : 5\sqrt{6} : 10$.

20. die Grundkanten? Aufl. $a : b_1 : b_2 = \sqrt{6} : \frac{3}{2}\sqrt{2} : 2\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3} : 2\sqrt{2}$.

21. die Höhen der Seitenflächen? Aufl. $h : h_1 : h_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} : \frac{9}{4}\sqrt{2} : \frac{3}{2}\sqrt{2} = 1 : \frac{3}{2} : 1$.

22. die Seitenflächen? Aufl. $S : S_1 : S_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} : \frac{27}{8} : \frac{3}{2}\sqrt{6} = 4 : 3\sqrt{3} : 4\sqrt{2}$.

23. die Volumina? Aufl. $O : O_1 : O_2 = 4\sqrt{3} : 9 : 4\sqrt{6} = 4 : 3\sqrt{3} : 4\sqrt{2}$.

d) Von den in c) näher beschriebenen Oktaedern O_1 und O_2 wird durch eine Tangentialebene an die Kugel mit dem Radius r eine von vier gleichschenkligen Dreiecken begrenzte Pyramide abgeschnitten, deren Volumen berechnet werden soll.

24. Von O_1 werde die Pyramide P_1 abgeschnitten durch eine Ebene, welche die vertikale Achse trifft. Aufl. Da sich ähnliche Pyramiden wie die Kuben ihrer Höhen verhalten und die Höhe der abgeschnittenen Pyramide $2x_1 - r = 2r$ ist, so ergiebt sich $P_1 : \frac{1}{2}\, O_1 = 8\, r^3 : 27\, r^3$; folglich $P_1 = \frac{4}{3}\, r^3$.

25. Von O_1 werde die Pyramide P_1' abgeschnitten durch eine Ebene, welche eine horizontale Achse trifft. Aufl. Die Höhe der ab-

geschnittenen Pyramide ist $x_1 - r = \frac{1}{2} r$; mithin $P_1' : \frac{1}{2} O_1 = \frac{1}{8} r^3 : \frac{27}{8} r^3$; also $P_1' = \frac{1}{6} r^3$.

26. Von O_2 werde die Pyramide P_2 abgeschnitten durch eine Ebene, welche die vertikale Achse trifft. Aufl. Da die Höhe der abgeschnittenen Pyramide $x_2 - r = r\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$ ist, so ist $P_2 : \frac{1}{2} O_2 = r^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)^3 : \frac{3}{4} r^3 \sqrt{6}$; mithin $P_2 = \frac{9}{8} r^3 (9\sqrt{6} - 22)$.

27. Von O_2 werde die Pyramide P_2' abgeschnitten durch eine Ebene, welche eine horizontale Achse trifft. Aufl. Da die Höhe der abgeschnittenen Pyramide $2x_2 - r = r(\sqrt{6} - 1)$ ist, so verhält sich $P_2' : \frac{1}{2} O_2 = r^3 (\sqrt{6} - 1)^3 : 6\sqrt{6}$; folglich $P_2' = \frac{1}{8} r^3 (9\sqrt{6} - 19)$.

§ 31.

Reguläres Tetraeder und Cylinder.

a) In ein reguläres Tetraeder soll ein Cylinder so konstruiert werden, daß die Grundflächen beider zusammenfallen, während die obere Grundfläche des Cylinders drei Seitenflächen des Tetraeders berührt, und

α) der Längendurchschnitt des Cylinders ein Quadrat ist; zu berechnen ist

1. der Radius x der Grundfläche des Cylinders. Aufl. Verlängert man die obere Grundfläche des Cylinders, so wird ein reguläres Tetraeder abgeschnitten, dessen Kante y sei; dann ist $y = 2x\sqrt{3}$; und die Höhe des abgeschnittenen Tetraeders ist $\frac{1}{3} y\sqrt{6} = 2x\sqrt{2}$; mithin ist die Höhe des ganzen Tetraeders $\frac{1}{3} a\sqrt{6} = 2x + 2x\sqrt{2}$; also $x = \frac{1}{6} a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$.

2. die Höhe des Cylinders. Aufl. $\frac{1}{3} a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$.

3. der Mantel. Aufl. $\frac{2}{3} \pi a^2 (3 - 2\sqrt{2})$.

4. das Volumen. Aufl. $\frac{1}{18} \pi a^3 (10\sqrt{3} - 7\sqrt{6})$.

β) der Mantel des Cylinders gleich dem Inhalt des in eine Tetraederfläche beschriebenen Kreises ist; zu berechnen ist

5. der Radius x der Grundfläche des Cylinders. Aufl. Der Inhalt des Kreises ist $\frac{1}{12} \pi a^2$. Verlängert man die obere Grundfläche des Cylinders so wird ein reguläres Tetraeder abgeschnitten; und es verhalten sich nun die Radien der in beide Grundflächen beschriebenen Kreise wie die Höhen der beiden Tetraeder; wenn wir also die Höhe

des Cylinders mit y bezeichnen, so ist $x : \frac{1}{6} a\sqrt{3} = \frac{1}{8} a\sqrt{6} - y : \frac{1}{8} a\sqrt{6}$, also $y = \frac{1}{8} a\sqrt{6} - 2x\sqrt{2}$. Nun ist $\frac{1}{12}\pi a^2 = 2\pi x\left(\frac{1}{8} a\sqrt{6} - 2x\sqrt{2}\right)$ und hieraus $x = \frac{1}{12} a\sqrt{3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

6. die Höhe y des Cylinders. Aufl. $y = \frac{1}{8} a\sqrt{6} - 2x\sqrt{2} = \frac{1}{6} a\sqrt{6}\left(1 \mp \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

7. das Volumen. Aufl. $\frac{1}{288}\pi a^3\sqrt{3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

b) Um ein reguläres Tetraeder ist ein Cylinder so konstruiert, daß alle vier Ecken des Tetraeders auf dem Mantel liegen und zwar

α) sollen zwei gegenüberliegende Kanten AD und BC des Tetraeders Durchmesser der Grundflächen des Cylinders C_1 werden. Zu berechnen ist

8. der Radius r_1 der Grundfläche und die Höhe h_1. Aufl. $r_1 = \frac{1}{2} a$; h_1 ist gleich der Entfernung der Mittelpunkte von AD und BC, also $h_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$.

9. der Mantel M_1. Aufl. $M_1 = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2}$.

10. das Volumen V_1. Aufl. $V_1 = \frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{2}$.

β) soll die Kante AD des Tetraeders ganz im Mantel liegen und zugleich Höhe des Cylinders C_2 werden. Zu berechnen ist

11. der Radius r_2 der Grundfläche. Aufl. r_2 ist Radius des um BCE beschriebenen Kreises, wo E die Mitte von AD ist; die Seiten dieses Dreiecks sind a, $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$ und $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$, und seine Höhe ist $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$; mithin ist $r_2^2 = \frac{1}{4} a^2 + \left(\frac{1}{2} a\sqrt{2} - r_2\right)^2$, also $r_2 = \frac{3}{8} a\sqrt{2}$.

12. der Mantel M_2. Aufl. $M_2 = \frac{3}{4}\pi a^2\sqrt{2}$.

13. das Volumen V_2. Aufl. $V_2 = \frac{9}{32}\pi a^3$.

14. das Verhältnis von r_1 und r_2. Aufl. $2\sqrt{2} : 3$.

15. das Verhältnis von h_1 und h_2. Aufl. $1 : \sqrt{2}$.

16. das Verhältnis von M_1 und M_2. Aufl. 2:3.

17. das Verhältnis von V_1 und V_2. Aufl. $4\sqrt{2} : 9$.

18. Ein gerader Cylinder ist so durch ein reguläres Tetraeder geschoben, daß er mit seinem Mantel fünf Tetraederkanten DA, DB, DC, AB und AC berührt, nur nicht BC. Das aus dem Tetraeder geschnittene Stück ist zu berechnen. Aufl. E sei die Mitte von BC,

so ist die Grundfläche des Cylinders der in das gleichschenklige Dreieck ADE beschriebene Kreis, dessen Mittelpunkt M sei. Da die Grundseite a, ein Schenkel $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ und die Höhe $EF = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ ist, so ist der Radius r des Cylinders $\frac{1}{4}a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)$. Verlängert man nun die Achse des Cylinders bis sie ABD in G schneidet, so muß $MG \parallel BE$ sein; mithin muß sich im Dreieck BEF verhalten $BE:GM = FE:FM$ oder $\frac{1}{2}a : GM = \frac{1}{2}a\sqrt{2} : \frac{1}{4}a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)$; folglich $GM = \frac{1}{4}a\,(\sqrt{3}-1)$. Da nun die Höhe des ganzen Cylinders $4GM$, und das innerhalb des Tetraeders liegende Stück desselben gleich der Summe der beiden außerhalb desselben liegenden Stücke ist, so ist das innerhalb des Tetraeders liegende Stück gleich $\pi r^2 \cdot 2MG = \frac{1}{8}\pi a^3(3\sqrt{3}-5)$.

19. In die Grundfläche ABC eines regulären Tetraeders ABCD ist ein Kreis K beschrieben; über demselben ist ein gerader Cylinder konstruiert, dessen Mantel die Kanten DA, DB, DC resp. in A', B', C' schneidet; in $\triangle A'B'C'$ ist ein Kreis K' konstruiert. Das Volumen des abgestumpften Kegels zu berechnen, dessen Grundflächen K und K' sind. Aufl. Fällt man A'E und DF senkrecht ABC, so ist $A'E:DF = AE:AF = \frac{1}{3}a\sqrt{3} - \frac{1}{6}a\sqrt{3} : \frac{1}{3}a\sqrt{3} = 1:2$, also ist A' die Mitte von AD und A'B'C' ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $\frac{1}{2}a$, und daher $r' = \frac{1}{12}a\sqrt{3}$; da $r = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$ und $A'E = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$, so ist *Vol* abgest. Kegel $\frac{7}{864}\pi a^3\sqrt{6}$.

20. Wie verhält sich das Volumen des abgestumpften Kegels zu den um und in das Tetraeder beschriebenen Kugeln? Aufl. Da das Volumen der um das Tetraeder beschriebenen Kugel $\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{6}$ und der eingeschriebenen $\frac{1}{216}\pi a^3\sqrt{6}$ ist, so verhält sich *abgest. Keg : umg. Kugel* = 7 : 108 und *abgest. Keg : eing. Kugel* = 7 : 4.

21. Wie groß ist der Mantel des abgestumpften Kegels? Aufl. Die Seitenlinie ist $\frac{1}{12}a\sqrt{15}$ und der Mantel $\frac{1}{16}\pi a^2\sqrt{5}$.

§ 32.

Pyramide und Kegel.

Gegeben ist ein gerader Kegel (r, h); in denselben soll eine gerade Pyramide so konstruiert werden, daß die Spitze derselben mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammenfällt, die anderen Ecken dagegen auf dem Mantel liegen.

α) Die Grundfläche soll ein regelmäßiges Dreieck mit der Seite y sein; die Höhe der Pyramide sei x und der Radius des Umkreises der Grundfläche sei z. Es soll x und y berechnet werden, wenn

1. die Pyramide ein reguläres Tetraeder ist. Aufl. Es ist $y = x\sqrt{\frac{3}{2}}$; $z = \frac{1}{3} y\sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ und $r : z = h : h - x$; mithin $x = \frac{rh\sqrt{3}}{h + r\sqrt{2}}$ und $y = \frac{rh\sqrt{3}}{h + r\sqrt{2}}$.

2. die Pyramide ein Maximum wird. Aufl. $\mathbf{Max} = \frac{1}{12} xy^2\sqrt{3}$; da $r : z = h : h - x$ und $z = \frac{1}{3} y\sqrt{3}$ ist, so ist $x = \frac{h(r\sqrt{3} - y)}{r\sqrt{3}}$, mithin $\mathbf{Max} = \frac{hy^2(r\sqrt{3} - y)}{12r}$, woraus man $y = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$ und $x = \frac{1}{3} h$ findet.

3. die Pyramide gleich der Hälfte des Kegels ist. Aufl. Es ist $xy^2\sqrt{3} = 2\pi r^2 h$; und da wie in 2) $x = \frac{h(r\sqrt{3} - y)}{r\sqrt{3}}$, so ist y zu berechnen aus $y^3 - r\sqrt{3}\, y^2 + 2\pi r^3 = 0$.

β) Die Grundfläche soll ein Quadrat sein mit der Seite y und der Diagonale 2z; die Höhe der Pyramide sei x; x und y sollen berechnet werden, wenn

4. die Pyramide die Hälfte eines regulären Oktaeders, also $x = z$ ist. Aufl. Da $r : h = z : h - z$, so ist $z = x = \frac{rh}{h + r}$ und $y = \frac{rh\sqrt{2}}{h + r}$.

5. die Pyramide ein Maximum wird. Aufl. Es ist $\mathbf{Max} = \frac{1}{3} y^2 x$: da nun $y = z\sqrt{2}$ und $r : h = z : h - x$, so ist $x = \frac{h(r\sqrt{2} - y)}{r}$ und $\mathbf{Max} = \frac{hy^2(r\sqrt{2} - y)}{3r}$, woraus sich $y = \frac{2}{3} r\sqrt{2}$ und $x = \frac{1}{3} h\sqrt{2}$, mithin $\mathbf{Max} = \frac{8}{81} r^2 h\sqrt{2}$ ergiebt.

6. die Pyramide gleich der Hälfte des Kegels ist. Aufl. Es ist $2xy^2 = \pi r^2 h$. Da wie in 5) $x = \frac{h(r\sqrt{2} - y)}{r}$, so ist y zu berechnen aus $y^3 - r\sqrt{2}\, y^2 + \frac{1}{2}\pi r^3 = 0$.

§ 33.

Reguläres Oktaeder und Cylinder.

1. Um ein reguläres Oktaeder mit der Kante a ist ein gerader Cylinder so beschrieben, daß drei Ecken desselben, welche zugleich Ecken einer Seitenfläche sind, auf dem Umfange der einen Grundfläche, die drei anderen auf dem der anderen liegen. Der Mantel und das Volumen des Cylinders sollen berechnet werden. Aufl. Der Radius der Grundfläche des Cylinders ist $\frac{1}{3}\,a\sqrt{3}$; die Höhe des Cylinders ist der Durchmesser der Inkugel des Oktaeders, also $\frac{1}{3}\,a\sqrt{6}$; mithin *Mantel Cyl* $\frac{2}{3}\,\pi a^2\sqrt{2}$; und *Vol Cyl* $= \frac{1}{9}\,\pi a^3\sqrt{6}$. Da das Volumen der Inkugel des Oktaeders $\frac{1}{27}\,\pi a^3\sqrt{6}$ ist, so ist *Vol Cyl* = 3 mal *Vol Kugel.*

2. In ein reguläres Oktaeder mit der Kante a soll ein quadratischer Cylinder so beschrieben werden, daß die Umfänge der Grundflächen desselben je vier Seitenflächen berühren. Der Mantel und das Volumen des Cylinders sollen berechnet werden. Aufl. Der Radius des Cylinders werde mit r bezeichnet. Da die Berührungspunkte auf den Höhen der Oktaederflächen liegen müssen, so ist $a : \frac{1}{2}\,a\sqrt{2} = 2r : \frac{1}{2}\,a\sqrt{2} - r$; mithin $r = \frac{1}{2}\,a\,(2-\sqrt{2})$ und $h = a\,(2-\sqrt{2})$. Also *Mantel* $= \pi a^2\,(2-\sqrt{2})^2$ und *Vol* $= \frac{1}{2}\,\pi a^3\,(10-7\sqrt{2})$.

3. In ein reguläres Oktaeder ist ein gerader Cylinder so beschrieben, daß die Umfänge seiner Grundflächen die acht Oktaederflächen in ihren Mitten brühren. Der Mantel und das Volumen desselben sollen berechnet werden. Aufl. C sei eine Ecke des Oktaeders; die Mitten zweier von C ausgehenden, nicht zusammenstoßenden Seitenflächen seien D und E, CD und CE schneiden die betreffenden Seitenkanten in A und B, $CF \perp AB$ treffe DE in G; dann ist DE der Durchmesser der Grundfläche und 2FG die Höhe des Cylinders. Da nun $DE = \frac{2}{3}\,a$ und $GF = \frac{1}{6}\,a\sqrt{2}$, so ist $r = \frac{1}{3}\,a$ und $h = \frac{1}{3}\,a\sqrt{2}$; mithin *Mantel Cyl* $= \frac{2}{9}\,\pi a^2\sqrt{2}$ und *Vol Cyl* $= \frac{1}{27}\,\pi a^3\sqrt{2}$. Da das Volumen der Umkugel des Oktaeders $\frac{1}{3}\,\pi a^3\sqrt{2}$ ist, so ist *Vol Kugel* $=$ 9 mal *Vol Cyl.*

4. In ein reguläres Oktaeder ist ein gerader Cylinder so beschrieben, daß die Umfänge seiner Grundflächen die acht Oktaederflächen in den Mittelpunkten der von zwei gegenüberliegenden Ecken ausgehenden Höhen der Seitenflächen berühren. Der Mantel und das Volumen des Cy-

linders sollen berechnet werden. Aufl. Bezeichnungen wie in 3); die Mittelpunkte von CA und CB seien H und J; CF ⊥ AB treffe HJ in L; dann ist HJ der Durchmesser der Grundfläche und 2LF die Höhe. Da nun $HJ = \frac{1}{2}a$ und $LF = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$, so ist $r = \frac{1}{4}a$ und $h = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; mithin *Mantel Cyl* $= \frac{1}{4}\pi a^2\sqrt{2}$ und *Vol Cyl* $= \frac{1}{32}\pi a^3\sqrt{2}$.

5. In ein reguläres Oktaeder ABCDEF ist ein gerader Cylinder so konstruiert, daß seine Achse auf einer vertikalen Achse EF des Oktaeders liegt; der Umfang jeder Grundfläche geht durch die Mitten von acht Höhen, welche nicht von E und F ausgehen, so daß also der Cylindermantel die acht Oktaederflächen schneidet. Der Mantel und das Volumen des Cylinders sollen berechnet werden. Aufl. In der Oktaederfläche ABE seien von A und B zwei Höhen gefällt, deren Mitten G und H seien, so ist $GH = \frac{1}{4}a$; ferner treffe EJ ⊥ AB, GH in K, so ist $JK = \frac{1}{4}EJ$. M sei die Mitte von EF und im △ EMJ sei von K zu EM die Parallele KL gezogen, so ist $ML = \frac{1}{4}EM = \frac{1}{8}a\sqrt{2}$; mithin die Höhe h des Cylinders $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$. LG ist der Radius r der Grundfläche, also $r = \sqrt{LK^2 + KG^2}$; da nun $LK = \frac{3}{4}MJ = \frac{3}{8}a$ und $GK = \frac{1}{8}a$ ist, so ist $r = \frac{1}{8}a\sqrt{10}$. Daher Mantel $= \frac{1}{8}\pi a^2\sqrt{5}$ und Volumen $= \frac{5}{128}\pi a^3\sqrt{2}$.

Zusatz. Bezeichnen wir Mantel und Volumen des Cylinders in Aufgabe 3 resp. mit M_1 und V_1, des in Aufgabe 4 resp. mit M_2 und V_2, und des in Aufgabe 5 resp. mit M_3 und V_3, so verhält sich $M_1 : M_2 : M_3 = 16\sqrt{2} : 18\sqrt{2} : 9\sqrt{5}$ und $V_1 : V_2 : V_3 = 128 : 108 : 135$.

Ein gerader Cylinder berührt mit seinem Mantel zwei Paare von Flächen eines regulären Oktaeders, also ABE und ABF, sowie CDE und CDF; und er sei so lang,

6. daß er mit den Umfängen seiner Grundflächen die beiden anderen Paare von Oktaederflächen, also ADE und ADF, sowie BCE und BCF berührt. Mantel und Volumen desselben ist zu berechnen. Aufl. Der Radius r der Grundfläche wird der Radius der in das Oktaeder beschriebenen Kugel, also $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$ sein. Nun sei G die Mitte von BC und M die von EF; wenn die Grundfläche des Cylinders BCE in H berührt und HJ ⊥ MG ist, so ist $HJ = r = \frac{1}{6}a\sqrt{6}$; da nun $HJ : JG = EM : MG = \frac{1}{2}a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a$, also $\frac{1}{6}a\sqrt{6} : JG = \sqrt{2} : 1$, so ist $JG =$

$\frac{1}{6}\,a\sqrt{3}$, mithin $MJ = \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{6}\,a\sqrt{3}$, also die Höhe h des Cylinders $a - \frac{1}{3}\,a\sqrt{3}$; mithin der Mantel $= \frac{1}{3}\,\pi a^2\sqrt{6}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ und das Volumen $= \frac{1}{6}\,\pi a^3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

7. daß seine Achse bis zu zwei gegenüberliegenden Oktaederkanten BC und AD reicht. Mantel und Volumen desselben ist zu berechnen. Aufl. Der Radius der Grundfläche ist wie in 5) $r = \frac{1}{6}\,a\sqrt{6}$ und seine Höhe $h = a$, mithin Mantel $= \frac{1}{6}\,\pi a^2\sqrt{6}$ und sein Volumen $= \frac{1}{6}\,\pi a^3$.

§ 34.

Reguläres Oktaeder und Kegel.

a) In zwei gegenüberliegende Flächen eines regulären Oktaeders mit der Kante a sind Kreise beschrieben und über denselben gerade Kegel konstruiert, deren Höhen gleich dem Abstande der beiden Seitenflächen sind. Zu berechnen ist

1. das den beiden Kegeln gemeinschaftliche Stück, welches ein Doppelkegel ist. Aufl. Der Radius der Grundfläche eines Kegels ist $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$; die Höhe desselben ist gleich dem Durchmesser der Inkugel, also $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Nun ist $V = \frac{1}{3}\,\pi\,\frac{r^2}{4}\,h = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{432}$.

2. der Mantel des Doppelkegels. Aufl. Die Seitenlinie eines Kegels ist $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Mithin Mantel $= \frac{\pi rs}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$.

3. das Volumen des von den beiden Kegeln gebildeten Stundenglases. Aufl. Das Stundenglas besteht aus zwei abgestumpften Kegeln; mithin $V = \frac{7\pi r^2 h}{3} = \frac{7\pi a^3}{432}\sqrt{6}$.

4. der Mantel des Stundenglases. Aufl. Mantel $= \frac{3}{2}\,\pi rs = \frac{3\pi a^2}{8}$.

5. das Verhältnis der Volumina in 1) und 3). Aufl. $\frac{1}{7}$.

6. das Verhältnis der Mäntel in 2) und 4). Aufl. $\frac{1}{3}$.

7. das Verhältnis des Volumens in 1) zu dem der eingeschriebenen Kugel. Aufl. $\frac{1}{16}$.

8. das Verhältnis des Volumens in 3) zu dem der eingeschriebenen Kugel. Aufl. $\frac{7}{16}$.

9. das Verhältnis des Mantels in 2) zu der Oberfläche der Inkugel. Aufl. $\frac{3}{16}$.

10. das Verhältnis des Mantels in 4) zu der Oberfläche der Inkugel. Aufl. $\frac{9}{16}$.

11. das Verhältnis des Mantels in 2) zu der Oberfläche der Umkugel. Aufl. $\frac{1}{16}$.

12. das Verhältnis des Mantels in 4) zu der Oberfläche der Umkugel. Aufl. $\frac{3}{16}$.

b) In ein reguläres Oktaeder mit der Kante a ist ein gerader Kegel konstruiert, dessen Grundfläche 4 in einer Ecke zusammenstoßende Flächen in ihren Mitten berührt, und dessen Spitze in der gegenüberliegenden Ecke liegt; außerdem ein zweiter Kegel, welcher die entgegengesetzte Lage hat.

Dann ist der Radius r der Grundfläche gleich dem Radius des um ein Quadrat beschriebenen Kreises, dessen Seite $x = \frac{1}{3} a\sqrt{2}$ ist, also $r = \frac{1}{2} x\sqrt{2} = \frac{1}{3} a$; die Höhe $h = \frac{1}{2} a\sqrt{2} + \frac{1}{6} a\sqrt{2} = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$; die Seitenlinie $s = \sqrt{r^2 + h^2} = a$. Zu berechnen ist

13. das Volumen des spitzen Doppelkegels. Aufl. Die gemeinschaftliche Grundfläche ist ein Kreis, dessen Radius $\frac{3}{4} r = \frac{1}{4} a$ ist; die Höhe ist $a\sqrt{2}$, also $Vol = \frac{\pi a^3}{48}\sqrt{2}$.

14. der Mantel des Doppelkegels. Aufl. $\text{Mantel} = 2\pi \cdot \frac{3}{4} r \cdot \frac{3}{4} s = \frac{3\pi a^2}{8}$.

15. das Volumen des abgestumpften Doppelkegels. Aufl. $Vol = \frac{1}{3}\pi \frac{h}{2}\left(\frac{9}{16} r^2 + \frac{3}{8} r^2 + \frac{1}{4} r^2\right) = \frac{19}{96}\pi r^2 h = \frac{19\pi a^3}{1296}\sqrt{2}$.

16. der Mantel des abgestumpften Doppelkegels. Aufl. $\text{Mantel} = \pi \frac{s}{2}\left(\frac{3}{4} r + \frac{1}{2} r\right) = \frac{5}{8}\pi r s = \frac{5}{24}\pi a^2$.

17. die Gesamtoberfläche des abgestumpften Doppelkegels. Aufl. $GO = \frac{5}{24}\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{18} = \frac{19\pi a^2}{72}$.

18. das Volumen des Stundenglases. Aufl. $Vol = \frac{1}{3}\pi \frac{h}{2}\left(r^2 + \frac{3}{4} r^2 + \frac{9}{16} r^2\right) = \frac{37}{96}\pi r^2 h = \frac{37\pi a^3}{1296}\sqrt{2}$.

19. der Mantel des Stundenglases. Aufl. Mantel $= \pi \frac{s}{2}\left(r + \frac{s}{4} r\right) = \frac{7}{8} \pi r s = \frac{7}{24} \pi a^2$.

20. die Gesamtoberfläche des Stundenglases. Aufl. GO $= \frac{7}{24} \pi a^2 + 2\pi r^2 = \frac{37}{72} \pi a^2$.

21. das Verhältnis der Volumina in 13), 15), 18). Aufl. 27 : 19 : 37.

22. das Verhältnis der Mäntel in 14), 16), 19). Aufl. 9 : 5 : 7.

23. das Verhältnis der Gesamtoberflächen in 14), 17), 20). Aufl. 27 : 19 : 37.

§ 35.

Reguläres Dodekaeder.

1. Gegeben ist ein reguläres Dodekaeder mit der Kante a; man soll die Radien r und ρ der Umkugel resp. Inkugel sowie das Volumen berechnen. Aufl. $r = \frac{1}{4} a \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$; $\rho = \frac{1}{2} a \sqrt{10 + \frac{22}{5}\sqrt{5}}$; $V = \frac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5})$.

In ein reguläres Dodekaeder mit der Kante a ist ein Würfel so konstruiert, daß die Würfelkanten Diagonalen der Dodekaederflächen werden. Zu berechnen ist

2. die Würfelkante x. Aufl. Der große Radius einer Dodekaederfläche ist $r = \frac{1}{10} a \sqrt{10 (5 + \sqrt{5})}$ und der kleine Radius $\rho = \frac{1}{10} a \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}$; da nun $x^2 = 2r (r + \rho)$, so ist $x = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1)$. Mithin ist das Verhältnis der Dodekaederkante zur Würfelkante $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

3. das Verhältnis des Dodekaeders zum Würfel. Aufl. $\frac{5 + \sqrt{5}}{4}$.

§ 36.

Gerader Cylinder und gerader Kegel.

a) Über derselben Grundfläche ist ein gerader Cylinder (r, h) und ein gerader Kegel (r, h) konstruiert. Durch einen Achsenschnitt werde aus dem Cylinder das Rechteck AA'B'B und aus dem Kegel das

gleichschenklige Dreieck ACA' geschnitten; die Höhe sei CD. Eine zur Grundfläche parallele Ebene treffe CA und CA' resp. in E und E', AB und A'B' resp. in G und G' und CD in F. Nun möge EF mit x, CF mit y, und CE mit z bezeichnet werden; da $x:y:z = r:h:s$, so können wir, um nur eine Unbekannte einzuführen, $x = rt$, $y = ht$ und $z = st$ setzen. Dann ist

Keg EFC $= \frac{1}{3}\pi r^2 h t^3$. *Mant* CD $= \pi r s t^2$.
Keg ADFE $= \frac{1}{3}\pi r^2 h\,(1 - t^3)$. *Mant* AD $= \pi r s\,(1 - t^2)$.
Cyl GFCB $= \pi r^2 h t$. *Ring* GD $= \pi r^2\,(1 - t^2)$.
Cyl ADFG $= \pi r^2 h\,(1 - t)$. *Mant* BG $= 2\pi r h t$.
Vol GECB $= \pi r^2 h t\,(1 - \frac{1}{3}t^2)$. *Mant* AG $= 2\pi r h\,(1 - t)$.
Vol AEG $= \frac{1}{3}\pi r^2 h\,(1 - t)\,(2 - t - t^2)$.

Mit Benutzung obiger Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Cyl* GFCB : *Keg* EFC $= m : n$. Aufl. $t = \sqrt{\frac{3n}{m}}$. Bedingung: $3n < m$.

2. *Cyl* ADFG : *Keg* ADFE $= m : n$. Aufl. $t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3(4n-m)}{m}} - 1\right)$. Bedingung: $4n > m > n$. Z. B. Für $m = 2$ und $n = 1$ ist $t = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. — Wann ist $t = \frac{1}{2}$? Wenn $\sqrt{\frac{3(4n-m)}{m}} = 2$, also $\frac{m}{n} = \frac{12}{7}$ ist.

3. *Cyl* GFCB $=$ *Keg* ADFE. Aufl. $t^3 + 3t - 1 = 0$.

4. *Cyl* ADFG $=$ *Keg* EFC. Aufl. $t^3 + 3t - 3 = 0$.

5. *Vol* GECB $=$ *Vol* AEG. Aufl. $t^3 - 3t + 1 = 0$.

6. *Mant* BG : *Mant* CE $= m : n$. Aufl. $t = \frac{2nh}{ms}$. Bedingung: $\frac{m}{n} > \frac{2h}{s}$. — Für $m = n$ ist $t = \frac{2h}{s}$, daher muß $2h < s$ sein.

7. *Mant* AG : *Mant* AE $= m : n$. Aufl. $t = \frac{2nh - ms}{ms}$. Bedingung: $\frac{2h}{s} > \frac{m}{n} > \frac{h}{s}$. — Für $m = n$ ist $t = \frac{2h - s}{s}$.

8. *Mant* BG $=$ *Mant* AE. Aufl. $t = \frac{\sqrt{h^2 + s^2} - h}{s}$.

9. *Mant* AG $=$ *Mant* CE. Aufl. $t = \frac{\sqrt{h^2 + 2hs} - h}{s}$.

10. *Ring* GE : *Mant* BG $= m : n$. Aufl. $t = \frac{\sqrt{m^2h^2 + n^2r^2} - mh}{nr}$.

Für $m = n$ ist $t = \frac{s-h}{r}$ oder, wenn der Winkel an der Spitze mit 2α bezeichnet wird, $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$.

11. *Ring* GE : *Mant* CE = m : n. Aufl. $t = \sqrt{\frac{nr}{ms+nr}}$.

12. *Ring* GE : *Mant* AG = m : n. Aufl. $t = \frac{2hm-nr}{nr}$.

Bedingung: $\frac{r}{h} > \frac{m}{n} > \frac{r}{2h}$. Für $m = n$ ist $t = \frac{2h-r}{r}$; daher muß in diesem Fall $2h > r > h$ sein.

13. *Mant* CE : *Ring* GE = *Ring* GE : *Mant* AE. Aufl. $t = \frac{r}{\sqrt{s^2+r^2}}$.

14. *Ring* GE = *Mant* BG + *Mant* CE. Aufl. $t = \frac{\sqrt{s(s+r)}-h}{s+r}$.

15. *Ring* GE + *Kreis* CB = *Mant* BG + *Mant* CE. Aufl. $t = \frac{s+r-h}{s+r}$.

16. *Obfl* AEG = *Obfl* GECB. Aufl. $t = -\frac{h}{s} + \frac{1}{s}\sqrt{\frac{2h^2+2hs+s^2-rs}{2}}$. Für $s = 2r$ ist $h = r\sqrt{3}$ und $t = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Für $h = r$ ist $s = r\sqrt{2}$ und $t = \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{2}$. Für $r : h : s = 3 : 4 : 5$ ist $t = \frac{\sqrt{41}-4}{5}$.

b) In einen gegebenen geraden Kegel (r, h) soll ein gerader Kegel so konstruiert werden, daß die eine Grundfläche des Cylinders auf die des Kegels fällt, die andere den Kegelmantel berührt. Durch einen Achsenschnitt werde aus dem Kegel das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe CD und aus dem Cylinder das Rechteck BB'E'E (B und B' auf AA', E auf AC, E' auf A'C) geschnitten; CD und EE' schneiden sich in F. Wird nun AC mit s, EF mit x, CF mit y, CE mit z bezeichnet, so verhält sich $x : y : z = r : h : s$; um daher nur eine Unbekannte einzuführen, setzen wir $x = rt$, $y = ht$, $z = st$. Dann ist

Cyl BDFE $= \pi r^2 ht^2 (1 - t)$.
Keg EFC $= \frac{1}{3} \pi r^2 ht^3$.
Keg ADFE $= \frac{1}{3} \pi r^2 h (1 - t^3)$.
Vol ABE $= \frac{1}{3} \pi r^2 h (1 - t)(1 + t - 2t^2)$.
Mant CE $= \pi r s t^2$.
Mant BE $= 2\pi r h t (1 - t)$.
Mant AE $= \pi r s (1 - t^2)$.
Obfl FEC $= \pi r (s + r) t^2$
Obfl BDFE $= 2\pi r (ht - ht^2 + rt^2)$.
Ring AB $= \pi r^2 (1 - t^2)$.

Mit Benutzung obiger Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

17. *Keg* EFC : *Cyl* BDFE $= m : n$. Aufl. $t = \frac{3m}{3m + n}$.

18. *Cyl* BDFE $=$ *Vol* ABE. Aufl. $t = \frac{1 + \sqrt{21}}{10}$.

19. *Vol* ABE $= 2$ *Keg* EFC. Aufl. $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

20. *Cyl* BDFE soll ein Maximum werden. Aufl. $t = \frac{2}{3}$.

21. *Mant* CE $=$ *Mant* BE. Aufl. $t = \frac{2h}{s + 2h}$.

22. *Mant* AE : *Mant* BE $= m : n$. Aufl. $t = \frac{ns}{2mh - ns}$.

23. *Obfl* FEC $=$ *Obfl* BDFE. Aufl. $t = \frac{2h}{s - r + 2h}$.

24. *Mant* BE $=$ *Ring* AB. Aufl. $t = \frac{r}{2h - r}$.

25. *Mant* BE ist $= M$ gegeben. Aufl. $t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{M}{2\pi rh}}$.

26. *Mant* BE soll ein Maximum werden. Aufl. $t = \frac{1}{2}$.

27. *Obfl* BDFE soll ein Maximum werden. Aufl. $t = \frac{h}{2r + h}$.

c) Um einen gegebenen geraden Cylinder (r, h) soll ein gerader Kegel so konstruiert werden, daß die eine Grundfläche des Cylinders auf der des Kegels liegt, während die andere den Mantel des Kegels berührt. Durch einen Achsenschnitt werde aus dem Cylinder das Rechteck AA'B'B, aus dem Kegel das gleichschenklige Dreieck DD'C (A und A' liegen auf DD', B auf CD, B' auf CD') mit der Höhe CE geschnitten; CE und BB' schneiden sich in F. Wird nun DE mit x und CE mit y bezeichnet, so ist $x : y = x - r : h$, also $y = \frac{hx}{x - r}$, mithin $CF = y - h = \frac{rh}{x - r}$; ferner $BC = \frac{r}{x - r} \sqrt{(x - r)^2 + h^2}$; $BD = \sqrt{(x - r)^2 + h^2}$. Dann ist

Keg DEC $= \frac{1}{3}\pi\frac{hx^3}{x-r}$. *Mant* BC $= \frac{\pi r^2}{x-r}\sqrt{(x-r)^2+h^2}$.

Keg BFC $= \frac{1}{3}\pi\frac{hr^3}{x-r}$. *Mant* DB $= \pi(x+r)\sqrt{(x-r)^2+h^2}$

Mit Benutzung dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

28. *Keg* DEC $= n$. *Keg* BFC. Aufl. $x = r\sqrt[3]{n}$.

29. *Keg* DEC soll ein Minimum werden. Aufl. $x = \frac{3}{2}r$.

30. *Mant* DB $=$ *Mant* BC. Aufl. $y = r\sqrt{2}$.

d) 31. Ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel haben gleiche Oberflächen, gleiches Volumen und gleiche Höhe h. Die Radien x und y der Grundflächen sind zu berechnen. Aufl. $2\pi x^2 + 2\pi hx = \pi y^2 + \pi y\sqrt{h^2+y^2}$ (1) und $\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi y^2 h$ (2). Aus (2) $y = x\sqrt{3}$ in (1) eingesetzt und durch x dividiert (für $x = 0$ fallen der Cylinder und der Kegel mit der Höhe zusammen) giebt $8x^2 + 4hx - h^2 = 0$; mithin $x = \frac{h(\sqrt{3}-1)}{4}$ und $y = \frac{h(3-\sqrt{3})}{4}$.

32. Ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel haben gleiches Volumen und gleiche Höhe h; die Differenzen zwischen den beiden Mänteln und den beiden Grundflächen sind gleich; die Radien x und y der beiden Grundflächen sind zu berechnen. Aufl. $x = \frac{h(\sqrt{3}+1)}{4}$; $y = \frac{h(3+\sqrt{3})}{4}$.

33. Über derselben Grundfläche ist ein gerader Cylinder (r, h) und ein gerader Kegel (r, h) konstruiert. Man soll das vom Cylinder übrig bleibende Volumen durch einen um dieselbe Achse beschriebenen Cylindermantel halbieren. Der Radius x und die Höhe y dieses Cylinders ist zu berechnen. Aufl. Der Restkörper ist $\frac{2}{3}\pi r^2 h$; mithin $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi x^2 y$, und da $y:h = x:r$, so ist $y = \frac{hx}{r}$, also $r^2 h = \frac{2x^3 h}{r}$ und folglich $x = \frac{1}{2}r\sqrt[3]{4}$, $y = \frac{1}{2}h\sqrt[3]{4}$.

34. Das Volumen eines geraden Kegels soll durch einen um dieselbe Achse beschriebenen Cylindermantel halbiert werden. Der Radius x und die Höhe y desselben sind zu berechnen. Aufl. $\frac{1}{6}\pi r^2 h = \pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^2(h-y) = \frac{2}{3}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^2 h$. Da nun $x:h-y = r:h$, so ist $y = \frac{h(r-x)}{r}$, mithin $x = \frac{1}{2}r$ und $y = \frac{1}{2}h$.

35. Über derselben Grundfläche ist ein gerader Cylinder (r, h) und ein gerader Kegel (r, h) konstruiert. Ein körperlicher Ring berührt die obere Grundfläche des Cylinders und die Mäntel beider Körper. Der Radius ρ des Querschnittes, die Oberfläche und das Volumen des Ringes sind zu berechnen. Aufl. Eine durch die Achse gelegte Ebene schneide aus dem Kegel das gleichschenklige Dreieck ABC, aus dem Cylinder das Rechteck ABDE; dann ist der Querschnitt des Ringes der Inkreis von $\triangle$ AEC. Nun ist $\triangle AEC = \frac{1}{2}\rho(r+h+\sqrt{r^2+h^2}) = \frac{1}{2}rh$; mithin $\rho = \frac{rh}{r+h+\sqrt{r^2+h^2}}$. Wird der Ring gestreckt, so erhält man einen Cylinder, dessen Höhe der Umfang eines Kreises mit dem Radius $r-\rho$ ist; also Höhe $= 2\pi r\,\frac{r+\sqrt{r^2+h^2}}{r+h+\sqrt{r^2+h^2}}$;

Obfl Ring $= 4\pi^2r^2h^2\,\frac{r+\sqrt{r^2+h^2}}{(r+h+\sqrt{r^2+h^2})^2}$ und *Vol Ring* $= 2\pi^2r^3h^2\,\frac{r+\sqrt{r^2+h^2}}{(r+h+\sqrt{r^2+h^2})^3}$.

36. In einen geraden Cylinder mit dem Grundflächenradius r, der bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt ist, wird ein gerader Kegel so eingetaucht, daß die Achsen beider zusammenfallen. Ist die Spitze unten, befindet sich dieselbe also im Mittelpunkt der Grundfläche des Cylinders, so steigt die Wasserhöhe um m; ist dagegen die Grundfläche des Kegels unten, fällt dieselbe also mit der Grundfläche des Cylinders zusammen, so steigt die Wasserhöhe um n. Die Höhe u und der Grundflächenradius x des Kegels sind zu berechnen. Aufl. Der Radius des Kreises, in welchem der Kegel vom Wasserspiegel beim ersten Eintauchen geschnitten wird, sei y, beim zweiten Eintauchen z und der Öffnungswinkel des Kegels sei 2α. Dann ist $\pi r^2m = \frac{1}{3}\pi y^2(h+m)$, also $y = r\sqrt{\frac{3m}{h+m}}$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{h+m} = r\sqrt{\frac{3m}{(h+m)^3}}$. Ferner $\pi r^2n = \frac{1}{3}\pi(h+n)(x^2+xz+z^2)$ und $x-z=(h+n)\operatorname{tg}\alpha$; also $x^2+xz+z^2 = \frac{3r^2n}{h+n}$ und $x^2-2xz+z^2=(h+n)^2\operatorname{tg}\alpha^2$. Durch Subtraktion beider Gleichungen und Substitution des Wertes für z ergiebt sich $x^2-x(h+n)\operatorname{tg}\alpha = \frac{r^2n}{h+n} - \frac{1}{3}(h+n)^2\operatorname{tg}\alpha^2$, also $x = \frac{1}{2}r\left[\frac{(h+n)\sqrt{3m}}{\sqrt{(h+m)^3}} + \sqrt{\frac{4n}{h+n} - \frac{m(h+n)^2}{(h+m)^3}}\right]$. Ferner ist $u = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} = (h+n)\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{3m}\left(\frac{h+m}{h+n}\right)^3 - \frac{1}{12}}\right]$.

37. Eine gegebene Gerade $AB = a$ so in zwei Teile $AX = x$ und $BX = a - x$ zu teilen, daß, wenn man über AX ein gleichseitiges Dreieck AXC und über BX ein Quadrat XBDE konstruiert und die Figur um AB rotieren läßt, die Summe der erzeugten Flächen ein Minimum ist. Aufl. Ist $CF \perp AB$, so ist *Obfl* $ACX = 2\pi CF \cdot AC = \pi x^2 \sqrt{3}$. Ferner *Obfl* $XBDE = 2\pi EX \cdot ED + 2\pi EX^2 = 4\pi (a-x)^2$. Mithin *Min* $= \pi x^2 \sqrt{3} + 4\pi (a-x)^2$. Für den Fall des Minimums ist dann $x = \frac{4a(4-\sqrt{3})}{13}$.

§ 37.

Gerader Cylinder und Halbkugel.

a) Ein gerader Cylinder und eine Halbkugel von gleicher Höhe sind über derselben Grundfläche (Radius r) konstruiert. Durch einen Achsenschnitt werde aus dem Cylinder das Rechteck AA'B'B und aus der Halbkugel, deren Mittelpunkt M sei, der Halbkreis ACA' geschnitten. Eine der Grundfläche parallele Ebene schneide AB in D, Bogen AC in E, Sehne AC in G und CM in F. Wird nun CF mit x und EF mit y bezeichnet, so ist

Cyl $DFCB = \pi r^2 x$. *Cyl* $AMFD = \pi r^2 (r-x)$.

Sgm $EFC = \frac{1}{3}\pi x^2 (3r - x)$.

Kugelsch $AMFE = \frac{1}{6}\pi(r-x)(3r^2 + 3y^2 + (r-x)^2) = \frac{1}{3}\pi(r-x)(2r^2 + 2rx - x^2)$.

Vol $DECB = \pi r^2 x - \frac{1}{3}\pi x^2 (3r - x) = \frac{1}{3}\pi x (3r^2 - 3rx + x^2)$.

Vol $AED = \pi r^2 (r-x) - \frac{1}{3}\pi (r-x)(2r^2 + 2rx - x^2) = \frac{1}{3}\pi (r-x)^3$.

Ring $DE = \pi (r^2 - y^2) = \pi (r-x)^2$.

Ring $EG = \pi (x(2r-x) - x^2) = 2\pi x (r-x)$.

Mit Hülfe dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Cyl* DFCB : *Sgm* EFC = m : n. Aufl. $x = \frac{3}{2} r - \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{9m - 12n}{m}}$. Bedingung: $\frac{m}{n} > \frac{3}{2}$. Für $m = 2$ und $n = 1$ ist $x = \frac{1}{2} r (3 - \sqrt{3})$.

2. *Cyl* AMFD : *Kugelsch* AMFE = m : n. Aufl. $x = r - r \sqrt{\frac{3(m-n)}{m}}$. Bedingung: $\frac{3}{2} > \frac{m}{n} > 1$. Für $m = 4$ und $n = 3$ ist $x = r (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

3. *Vol* DECB = *Kugelsch* AMFE. Aufl. $x = \frac{2}{3} r$.

4. *Vol* AED = *Sgm* EFC. Aufl. $x = \frac{1}{8} r$.

5. *Vol* AED = *Vol* DECB. Aufl. $x = r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

6. *Ring* DE : *Mant* BD = m : n. Aufl. $x = \frac{m+n-\sqrt{m^2+2mn}}{n} r$.

Für $m = n$ ist $x = r(2 - \sqrt{3})$.

7. *Ring* DE : *Mant* AD = m : n. Aufl. $x = \frac{n-2m}{n} r$.

Bedingung: $n > 2m$.

8. *Ring* DE + *Krs* CB = *Mant* BD + *Kal* EC. Aufl. $x = r(3 - \sqrt{7})$.

9. *Ring* EG : *Kal* EC = m : n. Aufl. $x = \frac{m+n-\sqrt{m(m+2n)}}{n} r$.

Für $m = n$ ist $x = r(2 - \sqrt{3})$.

10. *Ring* DE : *Ring* EG = m : n. Aufl. $x = \frac{nr}{2m+n}$. Für $m = n$ ist $x = \frac{1}{3} r$.

11. *Cyl* AMFD = *Sgm* EFC. Aufl. $x^3 - 3rx^2 - 3r^2x + 3r^3 = 0$; und wenn $x = y + r$ gesetzt wird, so ist $y^3 - 6r^2y - 2r^3 = 0$.

12. *Vol* ACB soll durch einen um dieselbe Achse beschriebenen Cylindermantel halbiert werden. Aufl. Ist y der Radius des gesuchten Cylinders, so ist, da $y^2 = 2rx - x^2$, $\frac{1}{6}\pi r^3 = \pi x(2rx - x^2) - \frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)$ oder $x^3 - \frac{3}{2}rx^2 + \frac{1}{4}r^3 = 0$, also $x = \frac{1}{2} r$ und $y = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$.

b) In eine Halbkugel mit dem Radius r ist ein gerader Cylinder konstruiert. Ein Achsenschnitt schneide die Grundfläche der Halbkugel in dem Durchmesser AMA'; die Senkrechte auf AA' in M treffe den Halbkreis in E. Eine Ebene parallel der Grundfläche treffe Bogen AE in C und EM in F; dann werde noch $CG \perp AB$ gefällt. Wird nun MF mit x bezeichnet, so ist

Sgm CFE $= \frac{1}{3}\pi(r-x)^2(2r+x)$. *Kugsch* AMFC $= \frac{1}{3}\pi x(3r^2 - x^2)$.

Skt CME $= \frac{2}{3}\pi r^2(r - x)$. *Kal* CE $= 2\pi r(r - x)$.

Cyl GMFC $= \pi x(r^2 - x^2)$. *Zone* AC $= 2\pi rx$.

Keg MFC $= \frac{1}{3}\pi x(r^2 - x^2)$. *Mant* MC $= \pi r\sqrt{r^2 - x^2}$.

Vol AGC $= \frac{2}{3}\pi x^3$. *Ring* AC $= \pi x^2$.

Vol AMC $= \frac{2}{3}\pi r^2 x$. *Mant* GC $= 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

13. *Skt* CME $= \frac{1}{2}$ *Hlbkug*. Aufl. $x = \frac{1}{2} r$.

14. *Sgm* CFE $= \frac{1}{n}$ *Skt* CME. Aufl. $x = \frac{1}{2} r \left(\sqrt{9 - \frac{8}{n}} - 1\right)$.

15. *Sgm* CFE = *Cyl* GMFC. Aufl. $x = \frac{1}{2} r (\sqrt{3} - 1)$.

16. *Sgm* CFE = *Keg* MFC. Aufl. $x = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$; also ist x der größere Abschnitt des stetig geteilten Radius.

17. *Cyl* GMFC = *Vol* AGC. Aufl. $x = r \sqrt{\frac{3}{5}}$.

18. *Vol* AMC : *Keg* MFC = m : n. Aufl. $x = r \sqrt{\frac{m - 2n}{m}}$.

19. *Vol* AGC = *Vol* GMC. Aufl. $x = r \sqrt{\frac{1}{2}}$.

20. *Cyl* GMFC soll ein Maximum werden. Aufl. $x = r \sqrt{\frac{1}{3}}$.

21. *Sgm* CFE $= \frac{1}{n}$ *Halbkug.* Aufl. $x^3 - 3r^2x + 2r^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$.

22. *Sgm* CFE : *Kugelsch.* AMFC = m : n. Aufl. $x^3 - 3r^2x + \frac{2nr^3}{m+n} = 0$.

23. *Sgm* CFE = *Vol* AGC. Aufl. $x^3 + 3r^2x - 2r^3 = 0$.

24. *Sgm* CFE = *Vol* AMC. Aufl. $x^3 - 5r^2x + 2r^3 = 0$.

25. *Kal* CE = *Zone* AC + *Kreis* AM. Aufl. $x = \frac{1}{4} r$.

26. *Kal* CE : *Kreis* FC = m : n. Aufl. $x = \frac{2n - m}{m} r$. Bedingung: $n < m < 2n$.

27. *Zone* AC = *Kreis* FC. Aufl. $x = r (\sqrt{2} - 1)$.

28. *Zone* AC = *Kreis* FC + *Kreis* MA. Aufl. $x = r (\sqrt{3} - 1)$.

29. *Kal* CE = *Mant* MC. Aufl. $x = \frac{3}{5} r$.

30. *Mant* GC = *Mant* MC. Aufl. $x = \frac{1}{2} r$.

31. *Mant* MC = *Zone* AC. Aufl. $x = r \sqrt{\frac{1}{5}}$.

32. *Zone* AC : *Mant* GC = m : n. Aufl. $x = r \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$.

33. *Zone* AC : *Ring* AG = m : n. Aufl. $x = \frac{2n}{m} r$; Bedingung: $2n < m$.

34. *Mant* GC : *Ring* AG = m : n. Aufl. $x = \frac{2nr}{\sqrt{m^2 + 4n^2}}$.

35. *Kal* CE = *Ring* AG. Aufl. $x = r (\sqrt{3} - 1)$.

36. *Mant* GC soll ein Maximum werden. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{1}{2}}$.

37. *Obst* GMFC soll ein Maximum werden. Aufl. $Max = 2\pi(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)$; wird $x = r\cos\varphi$ gesetzt, so ergiebt sich $\varphi = 67^0 30'$.

38. *Kal* CE = *Mant* GC. Aufl. $x^3+rx^2+r^2x-r^3=0$.

§ 38.

Gerader Cylinder und Kugel.

a) Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r; in dieselbe soll ein gerader Cylinder konstruiert werden. Ein Achsenschnitt des Cylinders schneide aus diesem das Rechteck EE'D'D; die Achse des Cylinders sei FH (F auf DD', H auf EE'); MF treffe den aus der Kugel geschnittenen größten Kreis in B, MH in C. Die Senkrechte von M auf DE treffe DE in G und den Kreis in A. Wird nun MF = MH mit x bezeichnet, so ist

Sgm DFB $= \frac{1}{3}\pi(r-x)^2(2r+x)$. *Kal* DB $= 2\pi r(r-x)$.

Cyl EHFD $= 2\pi x(r^2-x^2)$. *Mant* ED $= 4\pi x\sqrt{r^2-x^2}$.

Vol EAD $= \frac{4}{3}\pi x^3$. *Mant* EAD $= 4\pi rx$.

Mit Hülfe dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Cyl* EHFD = 2 *Sgm* DFB. Aufl. $x = \frac{1}{2}r(\sqrt{3}-1)$.
2. *Vol* EAD = 4 *Sgm* DFB. Aufl. $x = \frac{2}{3}r$.
3. *Vol* EAD = *Cyl* EHFD. Aufl. $x = r\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$.
4. *Vol* EAD $= \frac{1}{n}$ *Kugel*. Aufl. $x = r\sqrt[3]{\frac{1}{n}}$.
5. *Cyl* EHFD soll ein Maximum werden. Aufl. $x = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$.
6. *Mant* EAD : *Mant* ED = m : n. Aufl. $x = \frac{r\sqrt{m^2-n^2}}{m}$.
7. *Mant* EAD = 2 *Kreis* FD. Aufl. $x = r(\sqrt{2}-1)$.
8. *Mant* ED = 2 *Kal* DB. Aufl. $x^3+rx^2+r^2x-r^3=0$.
9. *Mant* ED soll ein Maximum werden. Aufl. $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

Für den Fall, daß der Cylinder ein quadratischer, also $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ ist, soll berechnet werden

10. *Sgm* DFB. Aufl. $\frac{1}{12}\pi r^3(8-5\sqrt{2})$.

11. *Cyl* EHFD. Aufl. $\frac{1}{2}\pi r^3\sqrt{2}$.

12. *Vol* EAD. Aufl. $\frac{1}{8}\pi r^3\sqrt{2}$.

13. *Kal* DB. Aufl. $\pi r^2(2-\sqrt{2})$.

14. *Mant* ED. Aufl. $2\pi r^2$.

15. *Mant* EAD. Aufl. $2\pi r^2\sqrt{2}$.

16. In den Grundflächen eines geraden Cylinders mit dem Radius r sind zwei sich rechtwinklig kreuzende Durchmesser gezogen und durch ihre Endpunkte ist eine Kugel gelegt, deren Radius x zu berechnen ist, wenn man die Entfernung a zweier Endpunkte kennt. Aufl. Ist h die Höhe des Cylinders und y die Entfernung des Mittelpunktes einer Grundfläche von dem Endpunkt des in der anderen liegenden Durchmessers, so ist $x^2 = r^2 + \frac{1}{4}h^2$, $h^2 = y^2 - r^2$ und $y^2 = a^2 - r^2$; mithin $x = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2 + a^2}$.

b) Ein zu einem Ring gebogener gerader Cylinder.

17. In einen geraden Cylinder mit dem Radius r ist eine Kugel gelegt, welche die eine Grundfläche und den Mantel berührt; in den Raum an der Grundfläche ist ein Ring mit kreisförmigem Querschnitt gelegt, welcher die Kugel, den Mantel und die Grundfläche berührt. Der Radius ρ des Querschnittes, sowie das Volumen und die Oberfläche des Ringes sind zu berechnen. Aufl. Ein durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht zur Grundfläche des Cylinders geführter Schnitt schneide aus der Kugel einen Kreis K, aus dem Ringe einen Kreis M und aus der Grundfläche des Cylinders die Gerade AB; K berühre AB in C und den Kreis M in D, so daß KDMA eine Gerade ist; ferner sei $ME \perp CK$. Da $ME = EK$, so ist $(r+\rho)^2 = 2(r-\rho)^2$, also $\rho = r(\sqrt{2}-1)^2$. Wird der Ring gestreckt, so erhält man einen Cylinder, dessen Höhe der Umfang eines Kreises mit dem Radius ME ist. Nun ist $ME = r - \rho = 2r(\sqrt{2}-1)$; daher *Vol Ring* $= 2\pi^2 r^3(\sqrt{2}-1)^5$ und *Obfl Ring* $= 8\pi^2 r^2(\sqrt{2}-1)^3$.

18. Die Centrale zweier gleich großen Kugeln ist gleich dem gemeinschaftlichen Radius r; dieselben werden von einem Cylinder eingehüllt. In den Raum zwischen den drei krummen Flächen ist ein Ring gelegt; der Radius ρ des Querschnittes, das Volumen und die Oberfläche des Ringes sind zu berechnen. Aufl. Ein durch die Mittelpunkte M und M′ der beiden Kugeln gelegter Schnitt schneide aus dem Ring einen Kreis mit dem Mittelpunkt O; ferner sei $OA \perp MM'$. Dann ist $(r+\rho)^2 - (r-\rho)^2 = \frac{1}{4}r^2$, also $\rho = \frac{1}{16}r$. Wird der Ring gestreckt, so erhält man einen Cylinder, dessen Höhe der Umfang eines

Kreises mit dem Radius $OA = r - \rho = \frac{15}{16} r$ ist. Mithin *Vol Ring* $\frac{15}{2048} \pi r^3$ und *Obfl Ring* $= \frac{15}{64} \pi^2 r^2$.

19. Dieselbe Aufgabe wie 18), nur sollen sich die beiden gleich großen Kugeln berühren, so daß ihre Centrale $2r$ ist. Aufl. $(r+\rho)^2 - (r-\rho)^2 = r^2$; daher $\rho = \frac{1}{4} r$. Die Höhe des zu einem Cylinder gestreckten Ringes ist dann $2\pi\, OA = 2\pi (r - \rho) = \frac{3}{2} \pi r$. Mithin *Vol Ring* $= \frac{3}{32} \pi^2 r^3$ und *Obfl Ring* $= \frac{3}{4} \pi^2 r^2$.

20. Dieselbe Aufgabe wie 18), nur soll die Centrale $2r\sqrt{2}$ sein. Aufl. $\rho = \frac{1}{2} r$; Höhe des gestreckten Ringes $= \pi r$, also *Vol Ring* $= \frac{1}{4} \pi^2 r^3$ und *Obfl Ring* $= \pi^2 r^2$.

21. Dieselbe Aufgabe wie 18), nur soll die Centrale $\frac{4}{3} r \sqrt{3}$ sein. Aufl. $\rho = \frac{1}{3} r$; Höhe des gestreckten Ringes $= \frac{4}{3} \pi r$; *Vol Ring* $= \frac{4}{27} \pi^2 r^3$; *Obfl Ring* $= \frac{8}{9} \pi^2 r^2$.

22. Aus einem Draht, dessen Querschnitt ein Kreis mit Radius r ist, wird ein Ring gebogen; die Achse des Ringes bildet einen Kreis mit dem Radius ρ. Dieser Ring liegt auf einer horizontalen Ebene und auf demselben eine Kugel, welche außerdem noch die Ebene berührt. Der Radius x der Kugel ist zu berechnen. Aufl. $(x+r)^2 = \rho^2 + (x-r)^2$; mithin $x = \frac{\rho^2}{4r}$.

c) Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt K und dem Durchmesser $AB = 2r$; auf AB ist ein Pnnkt C durch $AC = x$ so zu bestimmen, daß, wenn man auf AB in C eine Senkrechte errichtet, welche den Halbkreis in D trifft und durch D eine Parallele zu AB zieht, welche den Halbkreis in F und die an den Halbkreis in A gelegte Tangente in E trifft, bei der Rotation des Halbkreises um AB die durch die verschiedenen Linien und Flächen erzeugten Flächen resp. Volumina gewisse Bedingungen erfüllen. Der durch FD abgeschnittene Bogen werde mit DGF bezeichnet. Dann ist

Mant $DE = 2\pi x \sqrt{x(2r-x)}$.
Obfl $ACDE = 2\pi x \sqrt{2r-x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{2r-x})$.
Kal $AD = 2\pi r x$.
Kal $BD = 2\pi r\,(2r-x)$.
Obfl $FGD = 4\pi r\,(x-r)$.
Obfl $AFE = \pi\,(2r-x)\,(2\sqrt{x\,(2r-x)} + x + 2r)$.
Cyl $ACDE = \pi x^2\,(2r-x)$.
Sgm $AD = \frac{1}{3} \pi x^2\,(3r-x)$.

Sgm BD $= \frac{1}{8}\pi(2r - x)^2(r + x)$.

Vol FGD $= \frac{4}{8}\pi(x - r)^3 = \frac{4}{8}\pi s^3$, wenn DF $= 2s$ gesetzt wird.

Vol AFE $= \frac{1}{8}\pi(2x^3 - 9rx^2 + 12r^2x - 4r^3)$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

23. *Mant* DE $= n$ *Obfl* ACDE. Aufl. $x = \frac{2rn^2}{(1-n)^2 + n^2}$.

24. *Kal* AD $= n$ *Obfl* FGD. Aufl. $x = \frac{2nr}{2n-1}$.

25. *Kal* BD $= n$ *Obfl* FGD. Aufl. $x = \frac{2r(n+1)}{2n+1}$.

26. *Kal* BD $= n$ *Obfl* AFE. Aufl. $x = \frac{2r(1+3n \pm 2\sqrt{n^2+4n-1})}{5n}$.

27. *Obfl* FGD $= n$ *Kreis* CD. Aufl. $x = \frac{r(n-2+\sqrt{r^2+4})}{n}$.

Für $n = 1$ ist $x = -r + r\sqrt{5}$; mithin ist AB in C stetig zu teilen.

28. *Obfl* FGD $= n$ *Obfl Kug.* Aufl. $x = r(n+1)$; $(n < 1)$.

29. *Obfl* AFE $= n$ *Kreis* CD. Aufl. $x = \frac{2r(n+1 \pm 4\sqrt{n-1})}{n^2 - 2n + 5}$.

Für $n = 2$ ist $x = \frac{2}{5}r$; für $n = 5$ ist $x = r$ oder $= \frac{1}{5}r$.

30. *Cyl* ACDE $= n$ *Sgm* AD. Aufl. $x = \frac{3r(2-n)}{3-n}$.

31. *Cyl* ACDE $= n$ *Sgm* BD. Aufl. $x = \frac{r(n+\sqrt{3n(3n+8)})}{2(3+n)}$.

32. *Vol* FGD $= 2$ *Vol* AFE. Aufl. $x = r\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$.

33. *Mant* DE $= n$ *Kal* BD. Aufl. $x^3 + n^2r^2x - 2n^2r^3 = 0$.

34. *Cyl* ACDE $= n$ *Vol Kugel.* Aufl. $x^3 - 2rx^2 + \frac{4}{8}nr^3 = 0$.

§ 39.

Kegel und Doppelkegel in einer Halbkugel und einer Kugel.

a) Über derselben Grundfläche mit dem Radius r ist eine Halbkugel und ein gerader Kegel von gleicher Höhe konstruiert. Der Achsenschnitt des Kegels sei ACA′ mit der Höhe CM. Parallel der Grundfläche ist eine Ebene gelegt, welche aus der Kugel einen Kreis mit dem Durchmesser DD′, aus dem Kegel einen Kreis

mit dem Durchmesser BB' und CM in E schneidet. Wird nun CE = EB mit x bezeichnet, so ist

Sgm DEC $= \frac{1}{8}\pi x^2 (3r - x)$.

Keg BEC $= \frac{1}{8}\pi x^3$.

Keg DEC $= \frac{1}{8}\pi x^2 (2r - x)$.

Vol CD (erzeugt durch Rotation des Segmentes CD um die Achse CM) $= \frac{1}{6}\pi \cdot CD^2 \cdot CE = \frac{1}{3}\pi r x^2$.

abgest. Keg AMEB $= \frac{1}{8}\pi (r^3 - x^3)$.

Kugschcht AMED $= \frac{1}{8}\pi (r - x)(2r^2 + 2rx - x^2)$.

Kal DC $= 2\pi rx$. *Zone* AD $= 2\pi r (r - x)$.

Mant BC $= \pi x^2 \sqrt{2}$. *Ring* BD $= 2\pi x (r - x)$.

Mant AB $= \pi \sqrt{2}\,(r^2 - x)$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Sgm* DEC : *Keg* BEC = m : n. Aufl. $x = \frac{3nr}{m+n}$. Bedingung: $3n < m + n$, also $2n < m$. Z. B. $m = 3n$, $x = \frac{3}{4}r$.

2. *Sgm* DEC : *Vol* CD = m : n. Aufl. $x = \frac{r(3n - m)}{n}$. Bedingung: $3n > m > 2n$. Z. B. $m = \frac{5}{2}n$, $x = \frac{1}{2}r$.

3. *Vol* CD : *Keg* BEC = m : n. Aufl. $x = \frac{nr}{m}$.

4. *Sgm* DEC : *Vol* CD = *Vol* CD : *Keg* BEC. Aufl. $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} r$.

5. *Sgm* DEC : *Keg* DEC = m : n. Aufl. $x = \frac{r(2m - 3n)}{m - n}$. Bedingung: $2n > m > \frac{3}{2}n$. Z. B. $m = \frac{5}{8}n$; $x = \frac{1}{2}r$.

6. *Keg* BEC : *Keg* DEC = m : n. Aufl. $x = \frac{2mr}{m+n}$. Bedingung: $m < n$.

7. *Keg* DEC = *abgst. Keg* AMEB. Aufl. $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

8. *Sgm* DEC = *abgst. Keg* AMEB. Aufl. $x = \frac{1}{8}r\sqrt{3}$.

8a. Wie verhalten sich bei diesem Schnitt *Kal* DC : *Mant* AB? Aufl. $\frac{2\pi rx}{\pi\sqrt{2}\,(r^2 - x^2)}$, und für $x = \frac{1}{8}r\sqrt{3}$ ergiebt sich $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. *Kugsch* AMED : *abgst. Keg* AMEB = m : n. Aufl. $x = r\,\frac{2n - m + \sqrt{3(4n^2 - m^2)}}{2(m+n)}$. Bedingung: $2n > m > n$.

10. *Kugsch* AMED = *Keg* BEC. Aufl. $x = \frac{1}{5} r\sqrt{6}$.

11. *Vol* DBC = *Vol* DBA. Aufl. $4x^3 - 6rx^2 + r^3 = 0$.

12. *Kal* CD : *Mant* CB = m : n. Aufl. $x = \frac{n\sqrt{2}}{m} r$.

13. *Kal* CD = *Mant* AB. Aufl. $x = \frac{1}{2} r(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

14. *Zone* AD : *Mant* AB = m : n. Aufl. $x = \frac{r(n\sqrt{2} - m)}{m}$.

Bedingung: $2m > n\sqrt{2} > m$. Für n = m ist $x = r(\sqrt{2} - 1)$.

15. *Zone* AD = *Mant* BC. Aufl. $x = \frac{1}{2} r\left(\sqrt{2 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)$.

16. *Ring* BD = *Mant* BC. Aufl. $x = r(2 - \sqrt{2})$.

17. *Kal* DC : *Ring* BD = m : n. Aufl. $x = \frac{r(m-n)}{m}$.

18. *Ka'* DC : *Mant* BC = *Mant* BC : *Ring* BD. Aufl. $x = r(\sqrt{3} - 1)$.

19. *Kal* DC : *Ring* BD = *Ring* BD : *Mant* BC. Aufl. $x = \frac{1}{4} r\left(\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2 + 8\sqrt{2}}\right)$.

20. *Mant* AB : *Ring* BD = m : n. Aufl. $x = \frac{nr}{m\sqrt{2} - n}$. Bedingung: $m > n\sqrt{2}$.

21. *Ring* BD soll ein Maximum sein. Aufl. $x = \frac{1}{2} r$; dann ist *Ring* BD $= \frac{1}{2} \pi r^2$.

22. *Ring* BD = einem Kreise mit dem Radius a. Aufl. $x = \frac{1}{2} r \pm \sqrt{\frac{1}{4} r^2 - a^2}$.

23. *Zone* AD : *Ring* BD = m : n. Aufl. $x = \frac{nr}{m}$.

24. *Ring* BD : *Zone* AD = *Zone* AD : *Mant* AB. Aufl. $x = \frac{1}{2} r\left(\sqrt{1 + 4\sqrt{2}} - 1\right)$.

25. *Mant* BC : *Ring* BD = *Ring* BD : *Mant* AB. Aufl. $x = \frac{1}{3} r$.

26. *Zone* AD = *Mant* AB + *Ring* BD. Aufl. $x = r(3 - 2\sqrt{2})$.

b) In die durch den Radius r gegebene Kugel, deren Mittelpunkt M sei, soll ein gerader Kegel, dessen Achsenschnitt das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe C'E sei, konstruiert werden. CE treffe den aus der Kugel geschnittenen Kreis in D. Wird nun CE mit x bezeichnet, so ist

Keg AEC $= \frac{1}{8}\pi x^2(2r-x)$. *Skt* AMD $= \frac{2}{8}\pi r^2(2r-x)$.

Sgm AEC $= \frac{1}{8}\pi x^2(3r-x)$. *Mant* AC $= \pi x\sqrt{2r(2r-x)}$.

Sgm AED $= \frac{1}{8}\pi(2r-x)^2(r+x)$. *Kal* AC $= 2\pi rx$.

Vol AC $= \frac{1}{8}\pi rx^2$. *Kal* AD $= 2\pi r(2r-x)$.

Vol CAD $= \frac{1}{8}\pi r(4r^2-x^2)$.

27. *Sgm* AEC : *Keg* AEC $= m:n$. Aufl. $x = \frac{r(2m-3n)}{m-n}$.

28. *Keg* AEC $=$ *Sgm* AED. Aufl. $x = \frac{1}{4}r(1+\sqrt{17})$.

29. *Keg* AEC : *Vol* AC $= m:n$. Aufl. $x = \frac{r(2n-m)}{n}$; Bedingung: $m < 2n$.

30. *Sgm* AEC $= n$ *Vol* AC. Aufl. $x = r(3-n)$.

31. *Vol* AC $= n$ *Kug*. Aufl. $x = 2r\sqrt{n}$.

32. *Keg* AEC $= n$ *Kug*. Aufl. $x^3 - 2rx^2 + 4nr^3 = 0$.

33. *Keg* AEC $= n$ *Vol* AC. Aufl. $x^3 - r(n+3)x^2 + 4r^3 = 0$.

34. *Keg* AEC $=$ *Skt* AMD. Aufl. $x = r\sqrt{2}$.

35. *Keg* AEC soll ein Maximum werden. Aufl. $x = \frac{4}{8}r$.

36. *Keg* AEC $= n$ *Vol* CAD. Aufl. $x = \frac{1}{2}r(n+\sqrt{n(n+8)})$. Z. B. Für $n = \frac{1}{8}$ ist $x = r$; für $n = \frac{1}{6}$ ist $x = \frac{2}{8}r$.

37. *Sgm* AEC $= n$ *Vol* CAD. Aufl. $x = \frac{1}{2}r(1-n+\sqrt{(1-n)(9-n)})$. Z. B. Für $n = \frac{9}{10}$ ist $x = \frac{1}{2}r$.

38. *Vol* CAD $= n$ *Kug* Aufl. $x = 2r\sqrt{1-n}$.

39. *Sgm* AEC $= n$ *Vol* CAD. Aufl. $x^3 - r(n+3)x^2 + 4nr^3 = 0$.

40. *Kal* AC : *Mant* AC $= m:n$. Aufl. $x = \frac{2r(m^2-n^2)}{m^2}$.

41. *Mant* AC : *Kreis* EA $= m:n$. Aufl. $x = \frac{2r(m^2-n^2)}{m^2}$.

42. *Mant* AC $=$ *Kal* AD. Aufl. $x = r(\sqrt{5}-1)$; also ist x der größere Abschnitt des stetig geteilten Durchmessers.

43. *Mant* AC soll ein Maximum werden. Aufl. $x = \frac{4}{8}r$.

44. In eine Kugel (Radius r) einen gleichseitigen Kegel zu beschreiben. Aufl. $x = \frac{3}{2}r$; *Vol* $= \frac{3}{8}\pi r^3$; *Mant* $= \frac{3}{2}\pi r^2$; *Obfl* $= \frac{9}{4}\pi r^2$.

c) In die durch den Radius r gegebene Kugel, deren Mittelpunkt M sei, soll ein Doppelkegel konstruiert werden. Ein Achsenschnitt schneide die gemeinschaftliche Basis in der Geraden AA',

die Achse sei BB′ und schneide AA′ in C. Wird nun MC mit x und AC mit y bezeichnet, so ist

Keg $ACB = \frac{1}{8}\pi(r+x)^2(r-x)$. *Vol* $AB = \frac{1}{8}\pi r(r+x)^2$.

Keg $ACB' = \frac{1}{8}\pi(r+x)(r-x)^2$. *Vol* $AB' = \frac{1}{8}\pi r(r-x)^2$.

Keg $BAB' = \frac{2}{8}\pi r(r^2-x^2)$. *Mant* $AB = \pi(r+x)\sqrt{2r(r-x)}$.

Sgm $ACB = \frac{1}{8}\pi(r+x)^2(2r-x)$. *Mant* $AB' = \pi(r-x)\sqrt{2r(r+x)}$.

Sgm $ACB' = \frac{1}{8}\pi(r-x)^2(2r+x)$. *Mant* $BAB' = 2\pi y\sqrt{r(r+y)}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

45. *Keg* BAB′ : *Keg* ACB = *Keg* ACB : *Keg* ACB′. Aufl. $x = r(\sqrt{5}-2)$ und $AB' = r(\sqrt{5}-1)$, mithin ist AB′ der größere Abschnitt des stetig geteilten Durchmessers.

46. *Keg* BAB′ = k ist gegeben. Aufl. $x = \sqrt{r^2 - \frac{3k}{2\pi r}}$.

47. *Keg* BAB′ : *Kug* = m : n. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{n-2m}{n}}$.

48. *Keg* BAB′ = *Vol* AB. Aufl. $x = \frac{1}{8}r$.

49. *Keg* ACB − *Keg* ACB′ soll ein Maximum werden. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{1}{8}}$.

50. *Vol* AB : *Vol* AB′ = m : n. Aufl. $x = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}r$.

51. *Vol* AB − *Vol* AB′ = k ist gegeben. Aufl. $x = \frac{3k}{4\pi r^2}$.

52. *Mant* AB : *Mant* AB′ = m : n. Aufl. $x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}r$.

53. *Mant* BAB′ : *Mant* AB = *Mant* AB : *Mant* AB′. Aufl. Wird ∠ ABA′ mit φ bezeichnet, so ist *Mant* $AB = 2\pi r^2 \sin\varphi \cos\frac{1}{2}\varphi$, *Mant* $AB' = 2\pi r^2 \sin\varphi \sin\frac{1}{2}\varphi$; man findet $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

54. *Mant* BAB′ : *Kreis* CA = m : n. Aufl. $y = \frac{2n(n+\sqrt{m^2+n^2})}{m^2}r$.

55. *Mant* AB − *Mant* AB′ soll ein Maximum werden. Aufl. *Max* $= \pi y(AB - AB') = \pi y\sqrt{AB^2 + AB'^2 - 2AB \cdot AB'} = \pi y\sqrt{4r^2 - 4ry}$. Hieraus ergiebt sich $y = \frac{2}{3}r$.

§ 40.

Gerader Kegel um eine Halbkugel, eine Kugel und um mehrere Kugeln.

a) Gegeben ist eine Halbkugel durch den Radius r; ihr Mittelpunkt sei M; um dieselbe soll ein gerader Kegel so beschrieben werden, daß die Grundfläche der Halbkugel und die des Kegels auf derselben Ebene liegen. Ein Achsenschnitt des Kegels schneide aus der Halbkugel einen Halbkreis mit dem Durchmesser FF′ und aus dem Kegel ein gleichschenkliges Dreieck AA′C mit der Höhe CM; CA und CA′ berühren den Halbkreis resp. in B und B′; CM treffe den Halbkreis in D und BB′ in E. Wird nun CM mit x bezeichnet, so ist

$AM = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$; $AC = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - r^2}}$; $AB = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}}$; $BE = \frac{r\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$; ferner

Keg AMC $= \frac{\pi r^2 x^3}{3(x^2 - r^2)}$. *Mant* CB $= \frac{\pi r (x^2 - r^2)}{x}$.

Keg BEC $= \frac{\pi r^2 (x^2 - r^2)^2}{3x^3}$. *Mant* AB $= \frac{\pi r^3 (2x^2 - r^2)}{x(x^2 - r^2)}$.

Keg AMEB $= \frac{\pi r^4 (3x^4 - 3r^2x^2 + r^4)}{3x^3 (x^2 - r^2)}$. *Kal* BD $= \frac{2\pi r^2 (x - r)}{x}$.

Kugsch FMEB $= \frac{\pi r^4 (3x^2 - r^2)}{3x^3}$. *Zone* FB $= \frac{2\pi r^3}{x}$.

Vol AFB $= \frac{\pi r^6}{3x(x^2 - r^2)}$. *Ring* AF $= \frac{\pi r^4}{x^2 - r^2}$.

Mant CA $= \frac{\pi r x^3}{x^2 - r^2}$. *Obst* AMC $= \frac{\pi r x^2}{x - r}$.

Obst AMEB $= \frac{\pi r^2 (2x^3 - 3r^2 x + r^3)}{x^2 (x - r)}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Keg* AMC soll ein Minimum werden. Aufl. $x = r\sqrt{3}$.

2. *Keg* BEC = *Keg* AMEB. Aufl. $x^6 = 2(x^2 - r^2)^3$, also $x = \sqrt{\sqrt[3]{2} : (\sqrt[3]{2} - 1)} = r\sqrt{2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}$.

3. *Keg* MBC $= \frac{1}{2}$ *Keg* AMC. Aufl. $x = r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

4. *Vol* AFB : *Kugsch* FMEB = m : n. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{4m + n + \sqrt{4m^2 + 8mn + n^2}}{6m}}$.

5. *Obſl* AMC : *Halbkugſl* = m : n. Aufl. $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 2mn}}{n} r$.

Bedingung: $m > 2n$. Für $m = 3n$ iſt $x = (3 \pm \sqrt{3})\, r$.

6. *Obſl* AMC ſoll ein Minimum werden. Aufl. $x = 2r$.

7. *Mant* CB = *Mant* AB. Aufl. $x = r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

8. *Mant* AB : *Zone* FB = m : n. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{2m - n}{2(m - n)}}$.

Bedingung: $m > n$.

9. *Mant* CA ſoll ein Minimum werden. Aufl. $x = r\sqrt{3}$.

10. *Ring* AF : *Zone* FB = m : n. Aufl. $x = \frac{n + \sqrt{16m^2 + n^2}}{4m} r$.

Für $m = n$ iſt $x = \frac{1}{4} r (1 + \sqrt{17})$.

11. *Mant* AB : *Ring* AF = m : n. Aufl. $x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8n^2}}{4n} r$.

Bedingung: $m > n$. Für $m = 2n$ iſt $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\, r$.

12. *Mant* AB = *Kal* BD. Aufl. $x^3 - 2rx^2 - r^2x + \frac{3}{2} r^3 = 0$.

13. *Kal* BD = *Ring* AF. Aufl. $x^3 - rx^2 - \frac{3}{2} r^2x + r^3 = 0$.

b) Gegeben iſt eine Kugel durch den Radius r; ihr Mittelpunkt ſei M. Von einem Punkt C außerhalb der Kugel ſind an dieſe ſämtliche Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte auf einem Kreiſe liegen, welcher zur Grundfläche eines Kegels genommen wird, deſſen Spitze C ſei. Eine durch CM gelegte Ebene ſchneide aus der Kugel einen Kreis und aus dem Berührungskegel die beiden Tangenten CA und CB; MC ſchneide AB in D und den Kreis in E, die Verlängerung von EM treffe den Kreis noch in F. Wird nun CM mit x bezeichnet, ſo iſt $CA = \sqrt{x^2 - r^2}$, $CD = \frac{x^2 - r^2}{x}$, $MD = \frac{r^2}{x}$, $DA = \frac{r\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$, $DE = \frac{r(x - r)}{x}$, $DF = \frac{r(x + r)}{x}$.

Ferner

Keg ADC $= \frac{\pi r^2 (x^2 - r^2)^2}{3x^3}$.

Keg ADM $= \frac{\pi r^4 (x^2 - r^2)}{3x^3}$.

Keg CAM $= \frac{\pi r^2 (x^2 - r^2)}{3x}$.

Sgm ADE $= \frac{\pi r^3 (x - r)^2 (2x + r)}{3x^3}$.

Skt AME $= \frac{2\pi r^3 (x - r)}{3x}$.

Skt AMF $= \frac{2\pi r^3 (x - r)}{3x}$.

Mant CA $= \frac{\pi r (x^2 - r^2)}{x}$.

Mant MA $= \frac{\pi r^2 \sqrt{x^2 - r^2}}{x}$.

$Sgm\,\mathrm{ADF} = \frac{\pi r^3 (x+r)^2 (2x-r)}{3x^3}$. $Mant\,\mathrm{CAM} = \frac{\pi r}{x}\sqrt{x^2-r^2}(r+\sqrt{r^2-x^2})$.

$Vol\,\mathrm{CAE} = \frac{\pi r^2 (x-r)^2}{3x}$. $Kal\,\mathrm{AE} = \frac{2\pi r^2 (x-r)}{x}$.

$Vol\,\mathrm{CAF} = \frac{\pi r^2 (x+r)^2}{3x}$. $Kal\,\mathrm{AF} = \frac{2\pi r^2 (x+r)}{x}$.

$$Obfl\,\mathrm{EAM} = \frac{\pi r^2}{x}\sqrt{x-r}\,(2\sqrt{x-r}+\sqrt{x+r}).$$

$$Obfl\,\mathrm{FAM} = \frac{\pi r^2}{x}\sqrt{x+r}\,(2\sqrt{x+r}+\sqrt{x-r}).$$

$Obfl\,\mathrm{CAE} = \frac{\pi r (x-r)(x+3r)}{x}$. $Obfl\,\mathrm{ADE} = \frac{\pi r^2 (x-r)(3x+r)}{x^2}$.

$Obfl\,\mathrm{CAF} = \frac{\pi r (x+r)^2}{x}$. $Obfl\,\mathrm{ADF} = \frac{\pi r^2 (x+r)(3x-r)}{x^2}$.

$Obfl\,\mathrm{ADC} = \frac{\pi r (x+r)^2 (x-r)}{x^2}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

14. $Keg\,\mathrm{ADC} : Keg\,\mathrm{ADM} = m : n$. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{m+n}{n}}$.

15. $Keg\,\mathrm{CAM} = k$ ist gegeben. Aufl. $x = \frac{3k+\sqrt{9k^2+4\pi^2 r^6}}{2\pi r^2}$.

Für $k = \frac{8}{8}\,Kugel = \frac{1}{2}\pi r^3$ ist $x = 2r$.

16. $Keg\,\mathrm{ADC} : Sgm\,\mathrm{ADE} = m : n$. Aufl. $x = \frac{\sqrt{m-n}\,(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})}{n}\,r$.

17. $Keg\,\mathrm{ADC} = Sgm\,\mathrm{ADF}$. Aufl. $x = r(2+\sqrt{2})$.

18. $Vol\,\mathrm{CAE} = k$ ist gegeben. Aufl. Wird $x - r = y$ gesetzt, so ist $y = \frac{3k+\sqrt{9k^2+12\pi r^3 k}}{2\pi r^2}$. Für $k = Kugel = \frac{4}{3}\pi r^3$ ist $x = r(3+2\sqrt{2})$.

19. $Vol\,\mathrm{CAF} = k$ ist gegeben. Aufl. Wird $x + r = y$ gesetzt, so ist $y = \frac{3k+\sqrt{9k^2-12\pi r^3 k}}{2\pi r^2}$. Für $k = 2\,Kugel = \frac{8}{3}\pi r^3$ wird $x = r(3+2\sqrt{2})$.

20. $Keg\,\mathrm{CAM}$ soll durch $Kreis\,\mathrm{DA}$ stetig geteilt werden. Aufl. $x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}+1)$.

21. $Keg\,\mathrm{ADC} : Sgm\,\mathrm{ADF} = Sgm\,\mathrm{ADF} : Vol\,\mathrm{CAF}$. Aufl. $x = \frac{1}{2}r(3+\sqrt{5})$.

22. $Vol\,\mathrm{CAE} : Kugel = Kugel : Vol\,\mathrm{CAF}$. $x = r(2+\sqrt{5})$.

23. *Vol* CAE = *Skt* AME. Aufl. $x = 3r$.

24. *Vol* CAE = *Keg* ADM. Aufl. $x^3 - rx^2 - r^2x - r^3 = 0$.

25. *Mant* CA : *Kal* AE = m:n. Aufl. $x = \frac{2m-n}{n} r$. Bedingung $m > n$. Für $m = 2n$ ist $x = 3r$; und für $m = \frac{3}{2} n$ ist $x = 2r$.

26. *Mant* CA : *Kal* AF = m:n. Aufl. $x = \frac{2m+n}{n} r$. Für $m = n$ ist $x = 3r$.

27. *Mant* CA = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m + \sqrt{4m^2+n^2}}{n} r$. Für $n = m$ ist $x = r(2+\sqrt{5})$; für $m = 2$, $n = 3$ ist $x = 3r$.

28. *Obfl* CAE = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m-n+\sqrt{3n^2+(2m-n)^2}}{n} r$. Für $m = n$ ist $x = 3r$.

29. *Obfl* CAF = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m-n+2\sqrt{m(m-n)}}{n} r$. Für $m = 2n$ ist $x = (3+2\sqrt{2})\,r$.

30. *Mant* CA : *Mant* MA = m:n. Aufl. $x = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n} r$.

31. *Kal* AE : *Mant* CA = *Mant* CA : *Kal* AF. Aufl. $x = r\sqrt{5}$.

32. *Mant* MA : *Mant* CA = *Mant* CA : *Mant* CAM. Aufl. $x = \frac{1}{2} r(\sqrt{5}+1)$.

33. *Mant* CA = *Obfl* ADE. Aufl. $x = r(\sqrt{2}+1)$.

34. *Mant* CA = *Obfl* ADF. Aufl. $x = r(2+\sqrt{3})$.

35. *Mant* CA = *Obfl* EAM. Aufl. $x^3 - 3rx^2 + 2r^2x - 2r^3 = 0$.

c) Gegeben ist eine Kugel durch den Radius r; um dieselbe soll ein gerader Kegel konstruiert werden; durch einen Achsenschnitt werde aus demselben das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe CE geschnitten; CA und CA' berühren den Kreis resp. in D und D'; CE trifft den Kreis noch in F und DD' in G. Wird nun CM mit x bezeichnet, so ist $AE = AD = r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$; $CA = x\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$; $GD = \frac{r}{x}\sqrt{x^2-r^2}$; $GF = \frac{r(x-r)}{x}$; $GE = \frac{r(x+r)}{x}$; $CG = \frac{x^2-r^2}{x}$. Nun ist

Keg $AEC = \frac{\pi r^2 (x+r)^2}{3(x-r)}$. *Mant* $AC = \frac{\pi r x (x+r)}{x-r}$.

Keg $DGC = \frac{\pi r^2 (x^2-r^2)^2}{3r^3}$. *Mant* $AD = \frac{\pi r^2 (x+r)(2x-r)}{x(x-r)}$.

$Sgm\ DGE = \frac{\pi r^3 (x+r)^2 (2x-r)}{3x^3}$. $Mant\ CD = \frac{\pi r (x^2 - r^2)}{x}$.

$Sgm\ DGF = \frac{\pi r^3 (x-r)^2 (2x+r)}{3x^3}$. $Obfl\ AEC = \frac{\pi r (x+r)^2}{x-r}$.

$Vol\ DAE = \frac{\pi r^3 (x+r)^2}{3x(x-r)}$. $Kal\ DF = \frac{2\pi r^2 (x-r)}{x}$.

$Vol\ DFC = \frac{\pi r^2 (x-r)^2}{3x}$. $Kal\ DE = \frac{2\pi r^2 (x+r)}{x}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind die Aufgaben 36 bis 57 zu lösen.

36. $Keg\ AEC : Kug = m : n$. Aufl. $x = \frac{2m - n \pm 2\sqrt{m(m-2n)}}{n} r$;

Bedingung: $m > 2n$. Für $m = 3n$ ist $x = r(5 \pm 2\sqrt{3})$.

37. *Keg* AEC soll ein Minimum werden. Aufl. $x = 3r$; dann ist $Keg\ AEC = \frac{8}{9}\pi r^3$.

38. $Vol\ DAE : Kug = m : n$. Aufl. $x = \frac{2m + n + 2\sqrt{m(m+2n)}}{4m - n} r$.

Bedingung: $4m > n$; also muß $Vol\ DAE > \frac{1}{4}\ Vol\ Kug$ sein. Für $m = n$ ist $x = r(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$.

39. $Keg\ DGC = \frac{1}{2}\ Keg\ AEC$. Aufl. $x = \frac{r\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1} =$

$r(2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$.

40. $Vol\ DAE : Sgm\ DGE = m : n$. Aufl. $x = \frac{3m \pm \sqrt{m^2 + 4mn}}{2(2m-n)} r$. Bedingung für das obere Wurzelzeichen: $2m > n$; für das untere Wurzelzeichen: $n > 2m$. Für $m = 1$, $n = 2$ ist $x = \infty$.

41. $Keg\ CDM = \frac{1}{2}\ Keg\ AEC$. Aufl. $x = \frac{1}{2} r(5 + \sqrt{17})$.

42. $Vol\ DAE = Vol\ DFC$. Aufl. $x^3 - 4rx^2 + r^2x - 2r^3 = 0$.

43. $Vol\ DAE = Keg\ DGC$. Aufl. $x^3 - 4rx^2 + 3r^2x - r^3 = 0$.

44. $Mant\ AC : Kugfl = m : n$. Aufl. $x = \frac{4m - n - \sqrt{16m^2 - 24mn + n^2}}{2n} r$. Für $m = 2n$ ist $x = \frac{1}{2} r(7 - \sqrt{17})$.

45. *Mant* AC soll ein Minimum werden. Aufl. $x = r(1 + \sqrt{2})$.

46. $Mant\ AD : Kugfl = m : n$. Aufl. $x = \frac{4m + n + \sqrt{16m^2 - 8mn + 9n^2}}{4(2m-n)} r$.

23. *Vol* CAE = *Skt* AME. Aufl. $x = 3r$.

24. *Vol* CAE = *Keg* ADM. Aufl. $x^3 - rx^2 - r^2x - r^3 = 0$.

25. *Mant* CA : *Kal* AE = m:n. Aufl. $x = \frac{2m-n}{n} r$. Bedingung $m > n$. Für $m = 2n$ ist $x = 3r$; und für $m = \frac{3}{2} n$ ist $x = 2r$.

26. *Mant* CA : *Kal* AF = m:n. Aufl. $x = \frac{2m+n}{n} r$. Für $m = n$ ist $x = 3r$.

27. *Mant* CA = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m + \sqrt{4m^2+n^2}}{n} r$. Für $n = m$ ist $x = r(2+\sqrt{5})$; für $m = 2$, $n = 3$ ist $x = 3r$.

28. *Obfl* CAE = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m-n+\sqrt{3n^2+(2m-n)^2}}{n} r$. Für $m = n$ ist $x = 3r$.

29. *Obfl* CAF = $\frac{m}{n}$ *Kugfl.* Aufl. $x = \frac{2m-n+2\sqrt{m(m-n)}}{n} r$. Für $m = 2n$ ist $x = (3+2\sqrt{2})\, r$.

30. *Mant* CA : *Mant* MA = m:n. Aufl. $x = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n} r$.

31. *Kal* AE : *Mant* CA = *Mant* CA : *Kal* AF. Aufl. $x = r\sqrt{5}$.

32. *Mant* MA : *Mant* CA = *Mant* CA : *Mant* CAM. Aufl. $x = \frac{1}{2} r(\sqrt{5}+1)$.

33. *Mant* CA = *Obfl* ADE. Aufl. $x = r(\sqrt{2}+1)$.

34. *Mant* CA = *Obfl* ADF. Aufl. $x = r(2+\sqrt{3})$.

35. *Mant* CA = *Obfl* EAM. Aufl. $x^3 - 3rx^2 + 2r^2x - 2r^3 = 0$.

c) Gegeben ist eine Kugel durch den Radius r; um dieselbe soll ein gerader Kegel konstruiert werden; durch einen Achsenschnitt werde aus demselben das gleichschenklige Dreieck AA'C mit der Höhe CE geschnitten; CA und CA' berühren den Kreis resp. in D und D'; CE trifft den Kreis noch in F und DD' in G. Wird nun CM mit x bezeichnet, so ist $AE = AD = r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$; $CA = x\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$; $GD = \frac{r}{x}\sqrt{x^2-r^2}$; $GF = \frac{r(x-r)}{x}$; $GE = \frac{r(x+r)}{x}$; $CG = \frac{x^2-r^2}{x}$. Nun ist

Keg $AEC = \frac{\pi r^2 (x+r)^2}{3(x-r)}$. *Mant* $AC = \frac{\pi r x (x+r)}{x-r}$.

Keg $DGC = \frac{\pi r^2 (x^2-r^2)^2}{3r^3}$. *Mant* $AD = \frac{\pi r^2 (x+r)(2x-r)}{x(x-r)}$.

$Sgm\,DGE = \frac{\pi r^3(x+r)^2(2x-r)}{3x^3}$. $Mant\,CD = \frac{\pi r\,(x^2-r^2)}{x}$.

$Sgm\,DGF = \frac{\pi r^3(x-r)^2(2x+r)}{3x^3}$. $Obfl\,AEC = \frac{\pi r\,(x+r)^2}{x-r}$.

$Vol\,DAE = \frac{\pi r^3\,(x+r)^2}{3x\,(x-r)}$. $Kal\,DF = \frac{2\pi r^2\,(x-r)}{x}$.

$Vol\,DFC = \frac{\pi r^2\,(x-r)^2}{3x}$. $Kal\,DE = \frac{2\pi r^2\,(x+r)}{x}$.

Mit Benutzung dieſer Formeln ſind die Aufgaben 36 bis 57 zu löſen.

36. $Keg\,AEC : Kug = m : n$. Aufl. $x = \frac{2m-n\pm 2\sqrt{m\,(m-2n)}}{n} r$;

Bedingung: $m > 2n$. Für $m = 3n$ iſt $x = r\,(5 \pm 2\sqrt{3})$.

37. $Keg\,AEC$ ſoll ein Minimum werden. Aufl. $x = 3r$; dann iſt $Keg\,AEC = \frac{8}{3}\pi r^3$.

38. $Vol\,DAE : Kug = m : n$. Aufl. $x = \frac{2m+n+2\sqrt{m(m+2n)}}{4m-n} r$.

Bedingung: $4m > n$; alſo muß $Vol\,DAE > \frac{1}{4}\,Vol\,Kug$ ſein. Für $m = n$ iſt $x = r\,(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$.

39. $Keg\,DGC = \frac{1}{2}\,Keg\,AEC$. Aufl. $x = \frac{r\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} =$

$r\,(2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$.

40. $Vol\,DAE : Sgm\,DGE = m : n$. Aufl. $x = \frac{3m \pm \sqrt{m^2+4mn}}{2\,(2m-n)} r$. Bedingung für das obere Wurzelzeichen: $2m > n$; für das untere Wurzelzeichen: $n > 2m$. Für $m = 1$, $n = 2$ iſt $x = \infty$.

41. $Keg\,CDM = \frac{1}{2}\,Keg\,AEC$. Aufl. $x = \frac{1}{2} r\,(5 + \sqrt{17})$.

42. $Vol\,DAE = Vol\,DFC$. Aufl. $x^3 - 4rx^2 + r^2x - 2r^3 = 0$.

43. $Vol\,DAE = Keg\,DGC$. Aufl. $x^3 - 4rx^2 + 3r^2x - r^3 = 0$.

44. $Mant\,AC : Kugfl = m : n$. Aufl. $x = \frac{4m - n - \sqrt{16m^2 - 24mn + n^2}}{2n} r$. Für $m = 2n$ iſt $x = \frac{1}{2} r(7 - \sqrt{17})$.

45. $Mant\,AC$ ſoll ein Minimum werden. Aufl. $x = r\,(1 + \sqrt{2})$.

46. $Mant\,AD : Kugfl = m : n$. Aufl. $x = \frac{4m + n + \sqrt{16m^2 - 8mn + 9n^2}}{4\,(2m-n)} r$.

65. Ein kegelförmiges Glas (r, h) sei bis zur Höhe a mit Wasser gefüllt. Um welche Höhe steigt das Wasser, wenn eine in Wasser untersinkende Kugel vom Radius ρ hineingeworfen wird? Aufl. Das Wasser steige um die Höhe x; vor dem Hineinwerfen der Kugel fülle es den Kegel (y, a) an und es steige um einen abgestumpften Kegel mit den Radien z und y und der Höhe x. Dann ist $\frac{1}{3}\pi x(y^2+yz+z^2) = \frac{4}{3}\pi c^3$; da nun $y=\frac{ar}{h}$ und $z=\frac{r(a+x)}{h}$, so erhält man $x^3+3ax^2+3a^2x-\frac{4h^2c^3}{r^2}=0$.

66. Ein kegelförmiges Glas, dessen Spitze nach unten gekehrt und dessen Winkel an der Spitze 2α ist, ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt; in dasselbe wird eine in Wasser untersinkende Kugel vom Radius r geworfen und darauf noch eine größere Kugel, welche sowohl die erste Kugel als auch den Kegelmantel in einem Kreise berührt. Wie hoch steht nun das Wasser? Aufl. Das Wasser steige um die Höhe x; dann ist in dem abgestumpften Kegel, um welchen das Wasser gestiegen ist, der kleinere Radius $h\operatorname{tg}\alpha$ und der größere $(h+x)\operatorname{tg}\alpha$, mithin ist sein Volumen $=\frac{1}{3}\pi x\operatorname{tg}\alpha^2(3h^2+3hx+x^2)$. Dieses Volumen muß gleich der Summe der beiden Kugeln sein; bezeichnen wir den Radius der zweiten Kugel mit y, so ist $r:y=\frac{r}{\sin\alpha}:\frac{r}{\sin\alpha}+r+y$, mithin $y=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}r$; folglich $x\operatorname{tg}\alpha^2(3h^2+3hx+x^2)=4r^3\left(1+\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^3\right)$, woraus sich $x+h=\sqrt{\frac{8r^3(1+3\sin\alpha^2)}{\operatorname{tg}\alpha^2(1-\sin\alpha)^3}+h^3}$ ergiebt.

d) Gerader Kegel, welcher mehrere Kugeln berührt.

67. Ein gerader Kegel ist durch den Radius r und die Seitenlinie s gegeben; in denselben ist die Berührungskugel (Radius ρ) konstruiert. Wie groß ist der Radius x einer Kugel, welche die Grundfläche, den Mantel und die erste Kugel berührt? Aufl. Es ist $\rho=r\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}$; ferner $x:\rho=\sqrt{r^2+\rho^2}-(r+\rho):\sqrt{r^2+\rho^2}$, also $x=r\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}\,\frac{\sqrt{2s}-\sqrt{s-r}}{\sqrt{2s}+\sqrt{s-r}}$.

68. In einen geraden Kegel, welcher durch den Radius r und den Winkel α, den die Seitenlinie mit der Grundfläche bildet, gegeben ist, ist die Berührungskugel K (Radius ρ) konstruiert; dann eine zweite K_1 (Radius ρ_1) nach der Spitze zu, welche die erste und den Mantel berührt u. s. w. Die Summe aller Kugeln ist zu berechnen. Aufl. $\rho_1:r\operatorname{tg}\alpha-\rho=r:\frac{r}{\cos\alpha}=\cos\alpha:1$; mithin $\rho=r\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$. Ferner

$\rho_1 : r \operatorname{tg}\alpha - 2\rho - \rho_1 = \cos\alpha : 1$; also $\rho_1 = r \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3$; ferner $\rho_2 = r \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^5$ u. s. w. Daher ist $K = \frac{4}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3$; $K_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^9$; $K_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^{15}$ u. s. w., und $K + K_1 + K_2 \ldots = \frac{4\pi r^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3}{3(1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^6)}$, da $\frac{1}{2}\alpha < 45^0$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha < 1$ sein muß.

69. In einen geraden Kegel ist die Berührungskugel (Radius ρ) konstruiert; darauf in den Raum zwischen Kugel und Spitze eine zweite Kugel (Radius ρ_1), welche die erste Kugel und den Kegelmantel berührt. Gegeben ist das Verhältnis $\rho : \rho_1 = m : n$; gesucht wird der Winkel 2φ an der Spitze. Aufl. Der Radius der Grundfläche sei r, so ist $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{r\cot\varphi - \rho}{r\cot\varphi - 2\rho - \rho_1}$; mithin $r\cot\varphi - 2\rho = \frac{nr\cot\varphi}{m}$. Da sich nun $\rho : r\cot\varphi - \rho = r : \frac{r}{\sin\varphi} = \sin\varphi : 1$ verhält, so ist $\rho = \frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$; mithin $\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{2}{1+\sin\varphi} = \frac{n}{m\sin\varphi}$, also $\sin\varphi = \frac{m-n}{m+n}$.

70. An zwei Kugeln K_1 und K_2 (Radien r_1 und r_2) sind die gemeinsamen äußeren Berührungskegel konstruiert. Wie groß ist jeder der so entstandenen Körper V_1 und V_2, von denen jeder aus einem geraden Kegel, dessen Grundfläche der Berührungskreis ist, und aus einem Kugelsegment, welches außerhalb des Kegels über dem Berührungskreise liegt, besteht, wenn noch der von einer Seitenlinie der Kegel und der Centrale gebildete Winkel α gegeben ist. Wie groß ist ferner das Volumen des von den beiden Kugeln begrenzten Stückes R von V_1. Aufl. Die Grundflächenradien der Kegel sind $r_1\cos\alpha$ und $r_2\cos\alpha$, die Höhen der Kegel $r_1\cos\alpha\cot\alpha$ und $r_2\cos\alpha\cot\alpha$, die Höhen der Segmente $r_1(1+\sin\alpha)$ und $r_2(1+\sin\alpha)$; mithin $V_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi {r_1}^3(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$ und $V_2 = \frac{1}{3}\pi {r_2}^3 \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$; $R = V_1 - V_2 + K_2 = \frac{1}{3}\pi \frac{{r_1}^3(1+\sin\alpha)^2 - {r_2}^3(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$. Ist statt α die Centrale $K_1K_2 = a$ gegeben, so ist $\sin\alpha = \frac{r_1 - r_2}{a}$, also $V_1 = \frac{1}{3}\pi\frac{r_1^3(a+r_1-r_2)^2}{a(r_1-r_2)}$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi\frac{r_2^3(a+r_1-r_2)^2}{a(r_1-r_2)}$, $R = \frac{1}{3}\pi\frac{r_1^3(a+r_1-r_2)^2 - r_2^3(a-r_1+r_2)^2}{a(r_1-r_2)}$.

71. Wie in 70) sind V_1 und V_2 zu berechnen, nur sind an beide Kugeln die gemeinsamen inneren Berührungskegel konstruiert. Eine Seitenlinie der Kegel bilde mit der Centrale $\angle\alpha'$. Aufl. Für V_1 und V_2 findet man dieselben Werte wie in 70), nur tritt α_1 an die

Stelle von α; ferner $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{8}\pi\frac{(r_1^3 + r_2^3)(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$. Ist statt α_1 die Centrale a gegeben, so ist $\sin\alpha_1 = \frac{r_1 + r_2}{a}$, also $V_1 = \frac{1}{8}\pi\frac{r_1^3(a + r_1 + r_2)^2}{a(r_1 + r_2)}$, $V_2 = \frac{1}{8}\pi\frac{r_2^3(a + r_1 + r_2)^2}{a(r_1 + r_2)}$ und $V = \frac{1}{8}\pi\frac{(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2)(a + r_1 + r_2)^2}{a}$.

72. Von fünf gleich großen Kugeln, deren Radius ρ ist, sind vier so auf eine Ebene gelegt, daß sie sich gegenseitig berühren; die fünfte ist so auf diese vier gelegt, daß sie dieselben berührt. Um diese fünf Kugeln ist nun ein gerader Kegel so konstruiert, daß die vier unteren Kugeln seine Grundfläche und den Mantel, die obere nur den Mantel berührt. Radius r, Höhe h und Seitenlinie s des Kegels sind zu berechnen. Aufl. Ein Schnitt durch die Höhe CD des Kegels und die Mittelpunkte M und M_2 zweier unteren Kugeln schneide aus dem Kegel $\triangle$ ABC, welches rechtwinklig gleichschenklig ist; der Mittelpunkt M' der oberen Kugel liegt auf CD; ferner sei $ME \perp CD$. Dann ist ME gleich der halben Diagonale des Quadrats, welches man durch Verbindung der Mittelpunkte der vier unteren Kugeln erhält und dessen Seite 2ρ ist; mithin $ME = \rho\sqrt{2}$; ferner $M'E = \rho\sqrt{2}$. Da $\triangle$ CFM' $\sim$ M'EM, wo $M'F \perp CA$, so ist $M'C = \rho\sqrt{2}$ und folglich $h = \rho(2\sqrt{2}+1)$, $r = \rho(2\sqrt{2}+1)$, $s = \rho(4+\sqrt{2})$.

Mantel und Volumen des abgestumpften Kegels zu berechnen, welchen man erhält, wenn der Kegel in 72) abgestumpft wird durch

73. die Tangentialebene der oberen Kugel, welche der Spitze zunächst liegt. Aufl. Die Höhe sei h', die Radien seien r' und ρ', die Seitenlinie s', dann ist $h' = \rho\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, $r' = r = \rho(2\sqrt{2}+1)$; $\rho' = \rho(\sqrt{2}-1)$; $s' = 2\rho(\sqrt{2}+1)$. $Mant = 6\pi\rho^2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; $Vol = \frac{1}{8}\pi\rho^3\sqrt{2}(16\sqrt{2}+17)$.

74. die Tangentialebene der oberen Kugel, welche der Grundfläche zunächst liegt. Aufl. Höhe, Seitenlinie und Radien seien resp. h', s', r', ρ'. Dann ist $h' = \rho\sqrt{2}$, $r' = r = \rho(2\sqrt{2}+1)$, $\rho' = \rho(\sqrt{2}+1)$; $s' = 2\rho$; $Mant = 2\pi\rho^2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})$; $Vol = \frac{1}{8}\pi\rho^3\sqrt{2}(17+9\sqrt{2})$.

75. eine Ebene, welche durch den Berührungskreis der oberen Kugel geht. Aufl. Höhe, Radien und Seitenlinie seien resp. h', s', r', ρ'. Dann ist $h' = \frac{1}{2}\rho(3\sqrt{2}+2)$, $r' = r = \rho(2\sqrt{2}+1)$, $\rho' = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}$,

$s' = s - \rho = \rho(3 + \sqrt{2})$; $Mant = \frac{1}{2}\pi\rho^2(17\sqrt{2} + 16)$; $Vol = \frac{1}{12}\pi\rho^3(100 + 87\sqrt{2})$.

76. eine Ebene, welche durch die Punkte geht, in denen die vier unteren Kugeln den Mantel berühren. Aufl. $h' = \frac{1}{2}\rho(2+\sqrt{2})$, $r' = r = \rho(2\sqrt{2}+1)$, $\rho' = \frac{3}{2}\rho\sqrt{2}$; $s' = \rho(\sqrt{2}+1)$; $Mant = \frac{1}{2}\pi\rho^2(16+9\sqrt{2})$; $Vol = \frac{1}{12}\pi\rho^3(100+61\sqrt{2})$.

77. zwei Ebenen, von denen die eine durch die vier Berührungspunkte der unteren Kugeln, die andere durch den Berührungskreis der oberen Kugel geht. Aufl. $s' = 2\rho$, $r' = \frac{3}{2}\rho\sqrt{2}$, $\rho' = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}$, $h' = \rho\sqrt{2}$; $Mant = 4\pi\rho^2\sqrt{2}$; $Vol = \frac{18}{6}\pi\rho^3\sqrt{2}$.

78. Von vier gleich großen Kugeln, deren Radius ρ ist, sind drei so auf eine Ebene gelegt, daß sie sich gegenseitig berühren; die vierte ist so auf diese drei gelegt, daß sie dieselben berührt. Um diese vier Kugeln ist nun ein gerader Kegel so konstruiert, daß die drei unteren Kugeln seine Grundfläche und den Mantel, die obere nur den Mantel berührt. Radius r, Höhe h und Seitenlinie s des Kegels sind zu berechnen. Aufl. Ein Schnitt durch die Höhe CD des Kegels und den Mittelpunkt M einer unteren Kugel schneide aus dem Kegel $\triangle$ ABC; der Mittelpunkt M' der oberen Kugel liegt auf CD; ferner sei $ME \perp CD$. Dann ist $ME = \frac{2}{3}$ der Höhe desjenigen gleichseitigen Dreiecks, welches man durch Verbindung der Mittelpunkte der drei unteren Kugeln erhält und dessen Seite 2ρ ist; mithin $ME = \frac{2}{3}\rho\sqrt{3}$; ferner $M'E = \frac{2}{3}\rho\sqrt{6}$. Da $\triangle MEM' \sim M'FC$, wo $M'F \perp CA$, so ist $M'C = \rho\sqrt{3}$; mithin $h = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $s = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$.

Mantel und Volumen des Kegels zu berechnen, welchen man erhält, wenn der Kegel in 78) abgestumpft wird durch

79. die Tangentialebene der oberen Kugel, welche der Spitze zunächst liegt. Aufl. $h' = \frac{2}{3}\rho(3+\sqrt{6})$; $r' = r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $s' = \rho(\sqrt{6}+2)$; $Mant = \frac{1}{3}\pi\rho^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2)$; $Vol = \frac{2}{27}\pi\rho^3(63+27\sqrt{2}+18\sqrt{3}+22\sqrt{6})$.

80. die Tangentialebene der oberen Kugel, welche der Grundfläche zunächst liegt. Aufl. $h' = \frac{2}{3}\rho\sqrt{6}$; $r' = r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $s' = \frac{1}{2}\rho(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$; *Mant* $= \pi\rho^2(6+\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{6})$; *Vol* $= \frac{2}{27}\pi\rho^3(18+27\sqrt{2}+18\sqrt{3}+22\sqrt{6})$.

81. eine Ebene, welche durch den Berührungskreis der oberen Kugel geht. Aufl. $s' = s-\rho\sqrt{2} = \frac{1}{2}\rho(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})$; $r' = r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}$; $h' = \frac{1}{3}\rho(3\sqrt{3}-3+2\sqrt{6})$; *Mant* $= \frac{1}{3}\pi\rho^2(9+6\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6})$; *Vol* $= \frac{1}{27}\pi\rho^3(15+50\sqrt{2}+33\sqrt{3}+48\sqrt{6})$.

82. eine Ebene, welche durch die Punkte geht, in denen die drei unteren Kugeln den Mantel berühren. Aufl. $s' = s-\rho\sqrt{2}-2\rho = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $r' = r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$; $h' = \frac{1}{3}\rho(3+\sqrt{3})$; *Mant* $= \frac{1}{3}\pi\rho^2(9+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})$; *Vol* $= \frac{1}{27}\pi\rho^3(81+54\sqrt{2}+35\sqrt{3}+24\sqrt{6})$.

83. eine Ebene, welche durch die drei Berührungspunkte der vier Kugeln geht. Aufl. Berühren sich die Kugeln M und M' in G und fällt man $GH \perp M'E$, so ist $HE = \frac{1}{2}M'E = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}$; $h' = \frac{1}{3}\rho(3+\sqrt{6})$; $r' = r = \frac{\rho(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{\rho(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $s' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+2)$; *Mant* $= \frac{1}{2}\pi\rho^2(2\sqrt{3}+1+\sqrt{6})$; *Vol* $= \frac{1}{54}\pi\rho^3(162+81\sqrt{3}+108\sqrt{2}+59\sqrt{6})$.

84. zwei Ebenen, von denen die eine durch die Punkte geht, in denen die drei unteren Kugeln den Mantel berühren, die andere durch den Berührungskreis der oberen Kugel geht. Aufl. $s' = 2\rho$, $r' = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$, $\rho' = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}$, $h' = \frac{2}{3}\rho\sqrt{6}$; *Mant* $= \frac{4}{3}\pi\rho^2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$; *Vol* $= \frac{4}{27}\pi\rho^3\sqrt{3}(5\sqrt{2}+4)$.

85. zwei Ebenen, von denen die eine durch die Punkte geht, in denen die drei unteren Kugeln den Mantel berühren, die andere die der Spitze zunächst liegende Tangentialebene der oberen Kugel ist. Aufl. $h' = \frac{1}{3}\rho(3+2\sqrt{6}-\sqrt{3})$; $r' = \frac{1}{3}\rho\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$; $\rho' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $s' = \frac{\rho(\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$; *Mant* $= \frac{1}{3}\pi\rho^2(4\sqrt{6}+9)$; *Vol* $= \frac{1}{27}\pi\rho^3(45+20\sqrt{6}+\sqrt{3})$.

86. zwei Ebenen, von denen die eine durch die Punkte geht, in denen die unteren Kugeln den Mantel berühren, die andere die der Grundfläche zunächst liegende Tangentialebene der oberen Kugel ist. Aufl. $h' = \frac{1}{8}\rho(2\sqrt{6} - 3 - \sqrt{3})$; $r' = \frac{1}{8}\rho\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$; $\rho' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $s' = \frac{1}{2}\rho(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $Mant = \frac{1}{8}\pi\rho^2(4\sqrt{6}-9)$; $Vol = \frac{1}{27}\pi\rho^3(20\sqrt{6}-45+\sqrt{3})$.

87. zwei Ebenen, von denen die eine durch die drei Berührungspunkte der vier Kugeln geht, die andere die der Spitze zunächst liegende Tangentialebene der oberen Kugel ist. Aufl. $h' = \frac{1}{8}\rho(3+\sqrt{6})$; $r' = \frac{\rho(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $s' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+2)$; $Mant = \frac{1}{6}\pi\rho^2(12+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{6})$; $Vol = \frac{1}{54}\pi\rho^3(90-9\sqrt{3}+29\sqrt{6})$.

88. zwei Ebenen, von denen die eine durch die drei Berührungspunkte der vier Kugeln geht, die andere die der Grundfläche zunächst liegende Tangentialebene der unteren Kugel ist. Aufl. $h' = \frac{1}{8}\rho(3-\sqrt{6})$; $r' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $\rho' = \frac{\rho(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $s' = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{6}-2)$; $Mant = \frac{1}{6}\pi\rho^2(18+\sqrt{3}-6\sqrt{6})$; $Vol = \frac{1}{18}\pi\rho^3(33+6\sqrt{3}-4\sqrt{2}-11\sqrt{6})$.

89. zwei Ebenen, von denen die eine durch die drei Berührungspunkte der vier Kugeln, die andere durch den Berührungskreis der oberen Kugel geht. Aufl. $h' = \frac{1}{8}\rho(3\sqrt{3}-6+\sqrt{6})$; $r' = \frac{\rho(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $\rho' = \frac{1}{8}\rho\sqrt{6}$; $s' = \frac{1}{2}\rho(3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2)$; $Mant = \frac{1}{6}\pi\rho^2(17\sqrt{3}-30+8\sqrt{6}-6\sqrt{2})$; $Vol = \frac{1}{54}\pi\rho^3(79\sqrt{3}-126+45\sqrt{6}-48\sqrt{2})$.

90. zwei Ebenen, von denen die eine durch die drei Berührungspunkte der vier Kugeln, die andere durch die Punkte geht, in denen die drei unteren Kugeln den Mantel berühren. Aufl. $h' = \frac{1}{8}\rho(\sqrt{6}-\sqrt{3})$; $r' = \frac{1}{8}\rho\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)$; $\rho' = \frac{\rho(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}}$; $s' = \frac{1}{2}\rho(2-\sqrt{2})$; $Mant = \frac{1}{6}\pi\rho^2(\sqrt{3}+2\sqrt{6})$; $Vol = \frac{11}{54}\pi\rho^3(\sqrt{6}+\sqrt{3})$.

§ 41.

Gerader Kegel, welcher eine Kugel schneidet.

a) Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt K und dem Durchmesser $AB = 2r$; auf AB ist ein Punkt P durch $BP = x$ so zu bestimmen, daß, wenn man auf AB in P eine Senkrechte errichtet,

welche den Halbkreis in D trifft und BD verlängert bis sie die an den Halbkreis in A gelegte Tangente in C trifft, bei der Rotation des Halbkreises um AB die durch die verschiedenen Linien und Flächen erzeugten Flächen resp. Volumina gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist $DP = \sqrt{x(2r-x)}$; $BD = \sqrt{2rx}$; $CD = (2r-x)\sqrt{\frac{2r}{x}}$; $CA = 2r\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$; ferner

Mant $BD = \pi x\sqrt{2r(2r-x)}$. *Kal* $AD = 2\pi r(2r-x)$.

Mant $CD = \frac{\pi(4r^2-x^2)\sqrt{2r(2r-x)}}{x}$. *Kal* $BD = 2\pi rx$.

Mant $BC = \frac{4\pi r^2\sqrt{2r(2r-x)}}{x}$.

Obst $BDP = \pi x(2r-x+\sqrt{2r(2r-x)})$.

Obst $BCA = \frac{4\pi r^2(2r-x+\sqrt{2r(2r-x)})}{x}$.

Obst $ADC = \frac{\pi(4r^2-x^2)(2r+\sqrt{2r(2r-x)})}{x}$.

Obst $ACDP = \frac{\pi(2r-x)(4r^2+x^2+(2r+x)\sqrt{2r(2r-x)})}{x}$.

Keg $BDP = \frac{1}{8}\pi x^2(2r-x)$. *Sgm* $BDP = \frac{1}{8}\pi x^2(3r-x)$.

Keg $BCA = \frac{8\pi r^3(2r-x)}{3x}$. *Vol* $BDA = \frac{1}{8}\pi r(4r^2-x^2)$.

Vol $ACDP = \frac{\pi(2r-x)(8r^3-x^3)}{3x}$. *Vol* $BED = \frac{1}{8}\pi rx^2$.

Sgm $ADP = \frac{1}{8}\pi(2r-x)^2(r+x)$. *Vol* $ACD = \frac{\pi r(2r-x)(8r^2-2rx-x^2)}{3x}$.

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

1. *Mant* $CD = n$. *Obst* ADC. Aufl. $x = \frac{2r(1-2n)}{(1-n)^2}$.

2. *Kal* $AD = n$ *Kreis* AC. Aufl. $x = 2nr\,(n<1)$.

3. *Kal* $BD = n$ *Kreis* AC. Aufl. $x = r(-n+\sqrt{n(n+4)})$. Für $n = 1$ ist $x = r(\sqrt{5}-1)$; also ist x der größere Abschnitt des stetig geteilten Durchmessers AB.

4. *Keg* $BCA = n$ *Vol* BDA. Aufl. $x = -r+r\sqrt{\frac{n+8}{n}}$. Für $n = 2$ ist $x = r(\sqrt{5}-1)$.

5. *Keg* $BCA = n$ *Vol* ACD. Aufl. $x = -r+r\sqrt{\frac{9n-8}{n}}$. Für $n = 2$ ist $x = r(\sqrt{5}-1)$.

6. *Keg* BCA = n *Kugel.* Aufl. $x = \frac{4r}{n+2}$.

7. *Vol* BDA = n *Vol* ACD. Aufl. $x = -r + r\sqrt{\frac{1+9n}{1+n}}$. Für $n = 1$ ist $x = r(\sqrt{5} - 1)$; für $n = \frac{8}{5}$ ist $x = r$; für $n = \frac{5}{4}$ ist $x = \frac{4}{3}r$.

8. *Keg* BDP = n *Vol* ACD. Aufl. $x^3 + nrx^2 + 2nr^2x - 8nr^3 = 0$.

9. *Keg* BCA = n *Sgm* ADB. Aufl. $nx^3 - nrx^2 - 2nr^2x + 8r^3 = 0$.

10. *Keg* BCA = n *Vol* BED. Aufl. $nx^3 + 8r^2x - 16r^3 = 0$.

11. *Vol* ACDP = n *Sgm* ADP. Aufl. $(1-n)x^3 + nrx^2 + 2nr^2x - 8r^3 = 0$.

12. *Vol* ACDP = n *Vol* BDA. Aufl. $x^3 + nrx^2 + 2nr^2x - 8r^3 = 0$.

13. *Vol* ACDP = n *Vol* ACD. Aufl. $x^3 - nrx^2 - 2nr^2x + 8r^3(n-1) = 0$.

14. *Sgm* ADP = n *Vol* ACD. Aufl. $x^3 - rx^2(n+1) - 2r^2x(n+1) + 8nr^3 = 0$.

15. *Vol* BED = n *Vol* ACD. Aufl. $(1-n)x^3 + 12nr^2x - 16nr^3 = 0$.

16. *Vol* ACD = n *Kugel.* Aufl. $x^3 - 4r^2x(3+n) + 16r^3 = 0$.

17. *Mant* BC = n *Kal* AD. Aufl. $nx^3 - 2n^2rx^2 + 8r^3 = 0$.

b) Über einem Kreise mit dem Radius r ist eine Halbkugel und ein gerader Kegel mit der Höhe 2r konstruiert; zu berechnen ist

18. das Verhältnis des Kegels zur Halbkugel. Aufl. 1, d. h. der Kegel ist gleich der Halbkugel.

19. die Entfernung x des Kreises, in welchem der Kegel die Halbkugel schneidet von der gemeinsamen Grundfläche; ferner der Radius y des Kreises. Aufl. Ein Achsenschnitt durch den Kegel schneide aus letzterem das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Höhe CD und aus dem Kreise den Durchmesser EF (E auf AC); fällt man noch EG ⊥ AB, so ist EG = x. Nun ist $AC = r\sqrt{2}$; $AC \cdot BE = AB \cdot CD$, also $BE = \frac{4r}{\sqrt{5}}$; ferner $BG = \frac{BE^2}{2r} = \frac{8}{5}r$, $AG = \frac{2}{5}r$, $x = \frac{4}{5}r$, $y = \frac{8}{5}r$.

20. das Volumen des abgestumpften Kegels. Aufl. $\frac{196}{875}\pi r^3$; mithin *abgest. Keg* : *Halbkug.* = 98 : 125.

21. das Volumen des außerhalb des Kegels liegenden Stückes der Kugel. Aufl. *Vol* $AE = \frac{1}{6}\pi AE^2$. $x = \frac{8}{75}\pi r^3$.

22. das Volumen des außerhalb der Kugel liegenden Stückes des Kegels. Aufl. $\frac{8}{75}\pi r^3$. Also ist das Volumen in 21) gleich dem in 22).

c) Vergleiche § 15, c. In ein Kugelsegment ist die größte Berührungskugel und der größte eingeschriebene Kegel, dessen Grundfläche also mit der des Segmentes zusammenfällt, konstruiert. Der Radius der großen Kugel werde mit r, das Volumen des Segmentes mit V, seine Kalotte mit C, seine Oberfläche mit F, seine Grundfläche mit G, der Radius derselben mit ρ und seine Höhe mit h bezeichnet; das Volumen der Berührungskugel mit K und ihre Oberfläche mit A; das Volumen des Kegels mit V_1, sein Mantel mit M und seine Oberfläche mit F_1. In den folgenden Aufgaben ist nun h oder r zu berechnen, wenn gegeben

23. $V : V_1 = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{2m - 3n}{m - n} r$.

24. $V : V_1 = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{m - n}{2m - 3n} h$.

25. $V : V_1 = m : n$, $C - G = d$. Aufl. $h = \sqrt{\frac{d}{\pi}}$; dann wie 24).

In den Aufgaben 26 bis 28 setze man $h = (2m - 3n)t$ und $r = (m - n)t$.

26. $V : V_1 = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{\sqrt{n(2m - n)}}$.

27. $V : V_1 = m : n$, C. Aufl. $t = \sqrt{\frac{C}{2\pi(m - n)(2m - 3n)}}$.

28. $V : V_1 = m : n$, F. Aufl. $t = \sqrt{\frac{F}{\pi(2m - 3n)(2m - n)}}$.

29. $V_1 : K = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{4n}{m + 2n} r$.

30. $V_1 : K = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{m + 2n}{4n} h$.

In den Aufgaben 31 bis 34 setze man $h = 4nt$, $r = (m + 2n)t$.

31. $V_1 : K = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2\sqrt{2mn}}$.

32. $V_1 : K = m : n$, C. Aufl. $t = \sqrt{\frac{C}{8\pi n(m + 2n)}}$.

33. $V_1 : K = m : n$, F. Aufl. $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{F}{n(m + n)}}$.

34. $V_1 : K = m : n$, V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{16\pi n^2(3m + 2n)}}$.

35. $C : M = m : n$, r. Aufl. $h = \frac{2(m^2 - n^2)}{m^2} r$.

36. $C : M = m : n$, h. Aufl. $r = \frac{m^2}{2(m^2 - n^2)} h$.

37. $C : M = m : n$, $C - G = d$. Aufl. $h = \sqrt{\frac{d}{\pi}}$; dann wie 36.

In den Aufgaben 38 bis 40 setze man $r = m^2 t$, $h = 2(m^2 - n^2)t$.

38. $C : M = m : n$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{2n\sqrt{m^2 - n^2}}$.

39. $C : M = m : n$, F. Aufl. $t = \sqrt{\frac{F}{4\pi(m^4 - n^4)}}$.

40. $C : M = m : n$, V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi(m^2 - n^2)^2(m^2 + 2n^2)}}$.

Ist $M : A = m : n$ gegeben, so findet man $2n^2 r(2r - h) = m^2 h^2$, und wenn hier $\frac{h}{r} = z$ gesetzt wird, so ergiebt sich $z = \frac{n}{m^2}(\sqrt{4m^2 + n^2} - n)$. Die Wurzel wird z. B. für folgende Werte von m und n rational:

m	2	6	12	20	30	42	35	56	255
n	3	5	7	9	11	13	24	15	64
z	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{26}{49}$	$\frac{48}{49}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{128}{289}$

41. $M : A = 30 : 11$, r. Aufl. $h = \frac{11}{18} r$.

42. $M : A = 30 : 11$, h. Aufl. $r = \frac{18}{11} h$.

43. $M : A = 30 : 11$, $C - G = d$. Aufl. $h = \sqrt{\frac{d}{\pi}}$; dann wie 42.

In den Aufgaben 44 bis 47 setze man $r = 18t$, $h = 11t$.

44. $M : A = 30 : 11$, ρ. Aufl. $t = \frac{\rho}{5\sqrt{11}}$.

45. $M : A = 30 : 11$, C. Aufl. $t = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{C}{11\pi}}$.

46. $M : A = 30 : 11$, F. Aufl. $t = \sqrt{\frac{F}{671\pi}}$.

47. $M : A = 30 : 11$, V. Aufl. $t = \sqrt[3]{\frac{3V}{5203\pi}}$.

§ 42.

Abgestumpfter Kegel und Kugel.

a) In eine Halbkugel mit dem Radius r ist ein gerader abgestumpfter Kegel so konstruiert, daß die Grundflächen beider zusammenfallen. Die Höhe x und den Radius y der oberen Grundfläche des Kegels zu berechnen, wenn sich verhält

1. *Keg* zu dem Volumen, welches zwischen Halbkugel und Kegelmantel liegt wie m : n. Aufl. $y = \frac{\sqrt{m^2 + 6mn - 3n^2} - (m+n)}{2n} r.$

2. die zum Kegelmantel gehörende Zone zum Kegelmantel wie m : n. Aufl. $y = \frac{2n^2 - m^2}{m^2} r.$ Bedingung: $\frac{m}{n} < \sqrt{2}.$

b) Um eine Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M ist ein gerader abgestumpfter Kegel konstruiert. Ein Achsenschnitt schneide aus dem Kegel das gleichschenklige Trapez ABCD mit den Durchmessern AB und DC der Grundflächen, welche den aus der Kugel geschnittenen Kreis resp. in E und F berühren; AD und BC berühren ihn resp. in G und J, und GJ schneide EF in H. Wird nun AE = AG mit x, DF = DG mit y bezeichnet, so ist $xy = r^2$; ferner

Keg AEFD $= \frac{2}{3} \pi r (r^2 + x^2 + y^2).$

Keg AEHG $= \frac{2\pi r x (x^4 + 4r^2x^2 + 7r^4)}{3(x+y)^3}.$

Sgm GHE $= \frac{4\pi r^3 x^2 (x + 3y)}{3(x+y)^3}.$

Vol GAE $= \frac{2\pi r x^3}{3(x+y)}.$

Vol GE $= \frac{4\pi r^3 x (r^2 + x^2)}{3(x+y)^3}.$

Mant AD $= \pi (x+y)^2.$

Mant AG $= \frac{\pi x (x^2 + 3r^2)}{x+y}.$

Mant GD $= \frac{\pi y (y^2 + 3r^2)}{x+y}.$

Obfl AEFD $= 2\pi (r^2 + x^2 + y^2)$

Kal GF $= \frac{4\pi r^2 y}{x+y}.$

Kal GE $= \frac{4\pi r^2 x}{x+y}.$

Obfl AEG $= \frac{2\pi x (x^2 + 4r^2)}{x+y}.$

Obfl GFD $= \frac{2\pi y (y^2 + 4r^2)}{x+y}.$

Mit Benutzung dieser Formeln sind nun folgende Aufgaben zu lösen:

3. *Keg* AEFD : *Kugel* = m : n. Aufl. $x + y = r \sqrt{\frac{2m+n}{n}},$

$x-y=r\sqrt{\frac{2m-3n}{n}}$. (Dieſelben Werte wie in 9). Für $\frac{m}{n}=\frac{21}{8}$ iſt $x=2r$, $y=\frac{1}{2}r$; für $\frac{m}{n}=\frac{13}{6}$ iſt $x=r\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{3}r\sqrt{3}$; für $\frac{m}{n}=2$ iſt $x=\frac{1}{2}r(\sqrt{5}+1)$, $y=\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$; für $\frac{m}{n}=\frac{7}{4}$ iſt $x=r\sqrt{2}$, $y=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$; für $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$ iſt $x=r$, $y=r$ (Fall des Minimums).

4. *Keg* AEHG = 2 *Sgm* GHE. Aufl. $x=r\sqrt[4]{5}$.

5. *Keg* AEHG : *Vol* GAE = m : n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{2n-m+\sqrt{n(4m-3n)}}{m-n}}$.

6. *Keg* AEHG : *Vol* GE = m : n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{m-2n+\sqrt{(m+n)(m-3n)}}{n}}$.

7. *Vol* GAE : *Vol* GE = m:n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{2m-n}{n}}$.

8. *Vol* GAE : *Sgm* GHE = m:n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{m-n+\sqrt{m(m+4n)}}{n}}$.

9. *Obſl* AEFD : *Kugel* = m:n. Aufl. $x+y=r\sqrt{\frac{2m+n}{n}}$, $x-y=r\sqrt{\frac{2m-3n}{n}}$ (Dieſelben Werte wie in 3).

10. *Mant* AG : *Kal* GE = m:n Aufl. $x=r\sqrt{\frac{4m-3n}{n}}$.

11. *Obſl* AEG = *Kugſl*. Aufl. $x=r\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

12. *Kreis* EA : *Mant* AG = m:n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{3m-n}{n-m}}$. Bedingung $3m>n>m$.

13. *Kreis* EA : *Kal* GE = m:n. Aufl. $x=r\sqrt{\frac{4m-n}{n}}$.

14. *Kreis* EA + *Kreis* FD : *Mant* AD = m:n. Aufl. $x+y=r\sqrt{\frac{2n}{n-m}}$; $x-y=r\sqrt{\frac{2(2m-n)}{n-m}}$.

15. *Kreis* EA + *Kreis* FD : *Kugſl* = m:n. Aufl. $x+y=r\sqrt{\frac{4m+2n}{n}}$, $x-y=r\sqrt{\frac{4m-2n}{n}}$.

16. *Kreis* EA = *Kal* GF. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

17. *Kreis* HG = *Mant* GD. Aufl. $y = r\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}$.

18. *Kreis* EA : *Kreis* HG = m : n. Aufl. $x = r\sqrt{\frac{2\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}$.

19. *Mant* AG : *Kreis* HG = *Kreis* HG : *Mant* GD. Aufl. $x^2+y^2 = -\frac{8}{3}r^2+\frac{1}{3}r^2\sqrt{52}$, und da $2xy = r^2$, so ist $x+y = r\sqrt{\frac{\sqrt{52}-2}{3}}$, $x-y = r\sqrt{\frac{\sqrt{52}-14}{3}}$.

20. *Kreis* HG : *Mant* AD = m : n. Aufl. $x+y = r\sqrt[4]{\frac{4n}{m}}$ und $xy = r^2$. Bedingung $n > 4m$.

21. *Kreis* EA : *Kreis* HG = *Kreis* HG : *Kreis* FD. Aufl. $x = r$, $y = r$.

22. *Kreis* EA + *Kreis* FD : *Kreis* HG = m : n. Aufl. $x^2+y^2 = r^2\left(\sqrt{\frac{4m+n}{n}}-1\right)$ und $2xy = 2r^2$ giebt $x+y = r\sqrt{\sqrt{\frac{4m+n}{n}}+1}$ und $x-y = r\sqrt{\sqrt{\frac{4m+n}{n}}-3}$.

23. *Obst* AEFD ist gegeben $= \pi a^2$. Aufl. $x+y = \sqrt{\frac{a^2+2r^2}{2}}$ und $xy = r^2$; *Keg* AEFD $= \frac{1}{3}\pi a^2 r$. Bedingung: $a^2 \geqq 6r^2$; für $a^2 = 6r^2$ ist die Oberfläche ein Minimum; der Kegel wird Cylinder.

24. $x-y$ ist gegeben $= d$. Aufl. $x+y = \sqrt{d^2+4r^2}$; *Mant* AD $= \pi(d^2+4r^2)$; *Keg* AEFD $= \frac{2}{3}\pi r(d^2+3r^2)$.

25. Der Radius z der Umkugel von *Keg* AEFD ist zu berechnen, wenn x und y gegeben sind. Aufl. $z = \frac{(x+y)\sqrt{(x+y)^2+4xy}}{4\sqrt{xy}}$. Oder wenn AD $= x+y$ mit s und EF $= 2r$ mit h bezeichnet wird, $z = \frac{s\sqrt{s^2+h^2}}{2h}$.

26. *Obst Umkug* + *Obst Inkug* = 2 *Obst* AEFD. Aufl. $x+y = r\sqrt{2(3+\sqrt{2})}$, $x-y = r\sqrt{2(1+\sqrt{2})}$.

§ 43.

Cylinder, Kegel und Kugel.

a) Eine Kugel vom Radius r berührt die Grundflächen und den Mantel eines geraden Cylinders und ferner die Grundfläche und den Mantel eines gleichseitigen Kegels. Zu berechnen

1. die Volumina des Cylinders und Kegels. Aufl. $Vol\ Cyl = 2\pi r^3$; $Vol\ Keg = 3\pi r^3$. Also verhält sich $Kug : Cyl : Keg = 4:6:9$.

2. die krummen Oberflächen des Cylinders und Kegels. Aufl. $Mant\ Cyl = 4\pi r^2$; $Mant\ Keg = 6\pi r^2$. Daher verhalten sich die krummen Oberflächen von Kugel, Cylinder und Kegel $= 2:2:3$.

3. die Gesamtoberflächen des Cylinders und Kegels. Aufl. $Obfl\ Cyl = 6\pi r^2$; $Obfl\ Keg = 9\pi r^2$. Daher verhalten sich die Gesamtoberflächen von Kugel, Cylinder und Kegel $= 4:6:9$, also ebenso wie die Volumina.

4. Gegeben ist ein um eine Kugel (Mittelpunkt K und Radius r) beschriebener gerader Cylinder. Von zwei Punkten A und A′ der Cylinderachse, welche von K gleich weit entfernt sind, legt man an die Kugel zwei Berührungskegel ABC und A′B′C′. Das Minimum der Fläche zu finden, welche aus den beiden Kegelmänteln und dem Cylindermantel BB′C′C besteht. Aufl. $KD \perp AB$, AK und BC schneiden sich in E; dann ist $\triangle ADK \cong AEB$, also $AB = AK$. Bezeichnen wir $\angle BAK$ mit φ, so ist die Fläche $= \dfrac{2\pi r^2(3 - 2\cos\varphi)}{\sin\varphi}$; mithin für den Fall des Minimums $\cos\varphi = \frac{2}{3}$.

b) 5. In dieselbe Kugel, deren Radius r ist, sind ein quadratischer Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben. Wie verhalten sich ihre Volumina, ihre Mäntel und ihre Oberflächen? Aufl. $\dfrac{Vol\ Cyl}{Vol\ Keg} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $\dfrac{Mant\ Cyl}{Mant\ Keg} = \frac{4}{3}$; $\dfrac{Obfl\ Cyl}{Obfl\ Keg} = \frac{4}{3}$.

In einen geraden Cylinder (r, 2h) sind zwei Kegel so konstruiert, daß ihre Grundflächen zusammenfallen und ihre Spitzen in die Mitte E der Höhe des Cylinders zu liegen kommen. Zu berechnen ist

6. der Radius ρ der in einen Kegel beschriebenen Kugel. Aufl. Ein Achsenschnitt schneide aus dem Cylinder Rechteck ABCD und aus dem einen Kegel $\triangle ABE$. Dann ist $\triangle ABE = \frac{1}{2}\rho(2r + 2\sqrt{h^2 + r^2}) = rh$, mithin $\rho = \dfrac{r(\sqrt{h^2 + r^2} - r)}{h}$.

7. der Radius ρ' des Querschnittes des Ringes, welcher die Mäntel beider Kegel und den des Cylinders berührt. Aufl. Es ist $\triangle BEC = \frac{1}{2}\rho'(2h + 2\sqrt{h^2+r^2}) = rh$; mithin $\rho' = \frac{h(\sqrt{h^2+r^2}-h)}{r}$. Da die Höhe des Ringes $2\pi(r-\rho') = \frac{2\pi(h^2+r^2-h\sqrt{h^2+r^2})}{r}$ ist, so ist $Obfl\ Ring = \frac{2\pi h\sqrt{h^2+r^2}(\sqrt{h^2+r^2}-h)^2}{r^3}$ und $Vol\ Ring = \frac{\pi h^2\sqrt{h^2+r^2}(\sqrt{h^2+r^2}-h)^3}{r^3}$.

§ 44.

Rotation von Dreiecken.

a) Wenn ein durch die Seite a gegebenes gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Höhe CD sei, um eine Achse rotiert, so sind die Oberflächen und Volumina der entstandenen Körper am einfachsten nach der Guldinschen Regel zu berechnen.

Das gleichseitige Dreieck rotiere

1. um die Seite AB. Aufl. $Obfl = \frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{3}$; $Vol = \frac{1}{4}\pi a^3$.

2. um eine durch C gehende Achse, welche parallel AB ist. Aufl. $Obfl = 2\pi a^2\sqrt{3}$; $Vol = \frac{1}{2}\pi a^3$.

3. um eine Achse parallel AB, deren Entfernung von AB man erhält, wenn man CD über D um sich selbst verlängert. Aufl. $Obfl = 4\pi a^2\sqrt{3}$; $Vol = \pi a^3$.

4. um eine Achse parallel AB, deren Entfernung von AB man erhält, wenn man CD über C um sich selbst verlängert. Aufl. $Obfl = 5\pi a^2\sqrt{3}$; $Vol = \frac{5}{4}\pi a^3$.

5. um eine Achse senkrecht auf AB in B. Aufl. $Obfl = 3\pi a^2$; $Vol = \frac{1}{4}\pi a^3\sqrt{2}$.

6. um eine Achse senkrecht AB, deren Entfernung von CD = a ist. Aufl. $Obfl = 6\pi a^2$; $Vol = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$.

b) Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser AB = 2r; über AB ist ein gleichseitiges Dreieck ABC konstruiert; AC und BC treffen den Halbkreis resp. in D und E; dann ist DE ∥ AB und AD = DE = DC = r; CM treffe DE in G, den Halbkreis in N und geht durch den Durchschnittspunkt F von AE

und BD und durch den Schwerpunkt H des Dreiecks DEC. Ferner sei noch $DK \perp AB$ und $EJ \perp AB$; der zur Sehne AD gehörende Bogen werde mit ALD bezeichnet. Dann ist noch $AK = KM = \frac{1}{2} r$, $DK = GM = CG = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$; $FM = \frac{1}{8} r\sqrt{3}$; $FG = GH = \frac{1}{6} r\sqrt{3}$. Die bei der Rotation der Figur um AB erzeugten Volumina und Flächen sind zu berechnen.

7. *Keg* $ADK = \frac{1}{8}\pi r^3$.

8. *Cyl* $KDEJ = \frac{3}{4}\pi r^3$.

9. *Vol* $ABED = 2\,Keg\,ADK + Cyl\,KDEJ = \pi r^3$.

10. Wo liegt der Schwerpunkt des Trapezes ABCD? Aufl. Er muß auf GM liegen und habe von AB die Entfernung x. Dann ist $2\pi x \cdot ABED = \pi r^3$, oder $2\pi x \cdot \frac{3}{4} r^2\sqrt{3} = \pi r^3$; mithin $x = \frac{2}{9} r\sqrt{3}$.

11. *Vol* $DEC = \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} \cdot 2\pi MH = \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} \cdot 2\pi \frac{2}{3} r\sqrt{3} = \pi r^3$. Also ist *Vol* DEC = *Vol* ABED.

12. *Vol* $ADB = Vol\,AEB = \frac{1}{2}\pi r^3$.

13. *Vol* $BED = Vol\,ADE = \frac{1}{2}\pi r^3$. Also ist *Vol* ADB = *Vol* BED.

14. *Vol* $AFB = \frac{2}{9}\pi r^3$.

15. *Vol* $AFD = \frac{5}{18}\pi r^3$.

16. *Vol* $DFE = \frac{2}{9}\pi r^3$.

17. *Vol* $DNE = \frac{1}{6}\pi r^3$.

18. *Vol* $KDNEJ = \frac{11}{12}\pi r^3$.

19. *Vol* $ALD = \frac{1}{6}\pi AD^2 \cdot AK = \frac{1}{12}\pi r^3$.

20. *Vol* $ALDB = \frac{7}{12}\pi r^3$.

21. *Vol* $DNEC = \frac{5}{6}\pi r^3$.

22. *Mant* $AD = \frac{1}{2}\pi r^2\sqrt{3}$.

23. *Mant* $DE = \pi r^2\sqrt{3}$.

24. *Mant* $ADEB = 2\pi r^2\sqrt{3}$.

25. *Obfl* $DEC = 3r \cdot 2\pi MH = 4\pi r^2\sqrt{3}$; also *Obfl* DEC = 2 *Mant* ADEB.

26. *Mant* $AFB = \frac{4}{3}\pi r^2$.

27. *Mant* $AE = \frac{3}{2}\pi r^2$.

28. *Mant* $DF = \frac{5}{6}\pi r^2$.

c) Rotation von verschiedenen Dreiecken.

29. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b, über dessen Hypotenuse c ein Halbkreis beschrieben ist, rotiert um c. Die Volumina der durch die Katheten abgeschnittenen Segmente sind zu berechnen. Aufl. $\frac{\pi a^4}{6c}$ und $\frac{\pi b^4}{6c}$.

30. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC durch die Hypotenuse c und den Winkel α ($a > b$); auf AB einen Punkt X so zu bestimmen, daß, wenn man auf AB in X die Senkrechte XY errichtet, das durch Rotation des Dreiecks um XY erzeugte Volumen doppelt so groß ist wie das durch Rotation des Dreiecks um die Höhe CD erzeugte. Aufl. Zieht man durch den Schwerpunkt S eine Parallele zu AB, welche CD in F und XY in G trifft, so ist nach der Guldin-Regel $\triangle \cdot 2\pi SG = 2\triangle \cdot 2\pi SF$; also $SG = 2SF$. Man findet $DX = c \cos 2(90^\circ - \alpha)$.

31. Die Basis $2x$ und die Höhe y eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn die Volumina v und v_1 der Körper gegeben sind, welche man erhält, wenn das Dreieck um die Basis und um einen Schenkel rotiert. Aufl. Bezeichnen wir die Höhe auf einen Schenkel mit z, so ist $z = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Nach der Guldinschen Regel ist $v = xy \cdot 2\pi \frac{y}{3} = \frac{2}{3}\pi xy^2$ und $v_1 = xy \cdot 2\pi \frac{2xy}{3\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4\pi x^2y^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Durch Elimination von y erhält man $x = \sqrt[3]{\frac{3v\,v_1^2}{2\pi(4v^2 - v_1^2)}}$; dann ist $y = \sqrt[3]{\frac{3v}{2\pi v_1}}\ \sqrt[6]{4v^2 - v_1^2}$.

32. Ein gegebenes Dreieck ABC rotiert um eine durch C gezogene Gerade; welche Lage muß dieselbe haben, damit das Volumen ein Maximum ist? Aufl. Der Inhalt des Dreiecks sei $\triangle$, S sein Schwerpunkt und SE die Senkrechte von S auf die Rotationsachse. Nach der Guldinschen Regel ist $Vol = \triangle \cdot 2\pi SE$. Das Maximum tritt für SE und daher auch für das Volumen ein, wenn SE mit SC zusammenfällt, also wenn die veränderliche Gerade senkrecht auf CS steht.

33. $\triangle$ ABC, welches durch c, h_c und $\angle\gamma$ gegeben ist, wird um eine zu AB parallele Achse CX um $\angle\varphi$ gedreht. Das Volumen und die Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen. Aufl. Nach der Guldinschen Regel ist $Vol = \frac{1}{2} ch_c \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi \frac{2}{3} h_c = \frac{\varphi}{540^\circ} \cdot \pi ch_c^2$. Für $\varphi = 360^\circ$ ist es $\frac{2}{3}\pi ch_c^2$. — $\triangle$ ABC werde in die Lage A'B'C gedreht; dann ist $\angle BCB' = \varphi$. Die Oberfläche besteht dann aus dem Teil eines Cylindermantels AA'B'B, den Teilen von Kegelmänteln BCB' und ACA' und den beiden kongruenten Dreiecken ABC und A'B'C. Also $Obfl = \frac{\pi\varphi}{180^\circ} h_c c + \frac{\pi\varphi}{360^\circ} h_c(a+b) + ch_c$, wonach

$a+b=c\sqrt{1+\frac{2h_c}{c}\cot\frac{\gamma}{2}}$ zu substituieren ist. Für $\varphi = 360^0$ ist $Obfl = \pi h\,(2c+(a+b))$.

34. $\triangle$ ABC, welches durch h_c, α, β gegeben ist, rotiere um eine Achse, welche durch C parallel zu AB gezogen ist. Das Dreieck soll nun durch eine Parallele zu AB so geteilt werden, daß die beiden Teile bei der Rotation gleiche Volumina beschreiben. Welchen Abstand muß die Parallele von c haben? Aufl. $x = h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

§ 45.

Rotation von Vierecken und regelmäßigen Vielecken.

a) Rotation von Vierecken.

1. Quadrat ABCD rotiere um eine Achse, welche durch C parallel zu BD gezogen ist. Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen. Aufl. $Vol = \pi a^3\sqrt{2}$; $Obfl = 2\pi a^2\sqrt{2}$.

2. Quadrat ABCD rotiere um eine Achse, welche durch die Mittelpunkte E und F von resp. BC und CD geht. Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen, wenn der durch das Dreieck entstandene Teil als ausgehölt betrachtet wird. Aufl. Das Quadrat komme nach einer halben Umdrehung in die Lage A'B'C'D'; und EF schneide BB' in G, DD' in H und CC' in L. Dann ist $Vol = 2\,Vol$ ALHD $- 4\,Vol$ DHF $= \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{2}$; ferner $Obfl = 2.\,Mant$ AD $+ 4\,Mant$ DF $= \frac{5}{2}\pi a^2\sqrt{2}$.

3. Gegeben sind der Inhalt F eines Parallelogramms und die Volumina V und V', welche es bei der Rotation resp. um die Seiten x und y erzeugt; x, y und $\angle\varphi$ des Parallelogramms sind zu berechnen. Aufl. Nach der Guldinschen Regel ist $V = F\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}y\sin\varphi = F\pi y\sin\varphi$ und $V' = F\pi x\sin\varphi$. Da nun $F = xy\sin\varphi$, so ist $V = \frac{\pi F^2}{x}$, also $x = \frac{\pi F^2}{V}$; $y = \frac{\pi F^2}{V'}$; $\sin\varphi = \frac{\pi VV'}{F^3}$.

4. Von einem Trapez sind die beiden parallelen Seiten a und c $(a > c)$, eine nicht parallele Seite b und $\angle(a, b) = \beta$ gegeben. Das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation des Trapezes um a entsteht, ist zu berechnen. Aufl. $\frac{1}{3}\pi b^2(a+2c)\sin\beta^2$.

5. Von einem Trapez ABCD (AB $\parallel$ CD, $\angle A = 90^0$) ist gegeben BC = b, der Inhalt f^2 und das Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn ABCD um BC rotiert, $= \frac{4}{3}\pi c^3$. Zu berechnen sind AB = x,

$CD = y$, $AD = z$. Aufl. Es ist $(x-y)^2 + z^2 = b^2$ (1); $z(x+y) = 2a^2$ (2). Bezeichnet man $\angle ABC$ mit φ, so ist $\frac{4}{3}\pi c^3 = \frac{1}{3}\pi b \sin\varphi^2 (x^2 + xy + y^2)$; oder da $\sin\varphi = \frac{z}{b}$, so ist $z^2(x^2+xy+y^2) = 4bc^3$ (3). Quadriert man (2) und subtrahiert davon erst (1) und dann (3), so erhält man $4xyz^2 = 4a^4 - b^2z^2 + z^4$ und $xyz^2 = 4(a^4 - bc^3)$. Durch Elimination von xyz^2 erhält man $z^4 - b^2z^2 - 12a^4 + 16bc^3 = 0$, woraus z zu berechnen ist.

6. Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die beiden parallelen Seiten a und c $(a > c)$, sowie die Höhe h. Das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation des Trapezes um a entsteht. Aufl. $\frac{1}{3}\pi h^2(a+2c)$.

7. Das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation des Trapezes in 6) um c entsteht. Aufl. $\frac{1}{3}\pi h^2(2a+c)$.

8. Die Entfernung x des Schwerpunktes des Trapezes in 6) von a zu berechnen. Aufl. $x = \frac{h(a+2c)}{3(a+c)}$.

9. Die Entfernung y des Schwerpunktes des Trapezes in 6) von einer der nicht parallelen Seiten zu berechnen. Aufl. $y = \frac{2h(a^2+ac+c^2)}{3(a+c)\sqrt{4h^2+(a-c)^2}}$.

10. Das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation des Trapezes in 6) um eine nicht parallele Seite entsteht. Aufl. $\frac{2\pi h^2(a^2+ac+c^2)}{3\sqrt{4h^2+(a-c)^2}}$.

11. Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die beiden gleichen Seiten AD=BC=b und eine parallele Seite $AB = a$. Wie groß muß die andere parallele Seite c sein, damit das durch Rotation der Figur um a erzeugte Volumen ein Maximum ist? Aufl. S sei der Schwerpunkt des Trapezes, O und O' die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD; h sei die Höhe des Trapezes; ferner $SE \perp AB$, $OF \perp AB$, $O'F' \perp AB$. Nach der Guldinschen Regel muß $SE \cdot AB$ ein Maximum sein. Nun ist $OF = \frac{1}{3}h$, $O'F' = \frac{2}{3}h$, $OS : O'S = c : a$; daher $SE = \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}h\,\frac{c}{a+c} = \frac{h(a+2c)}{3(a+c)}$. Da nun $ABCD = \frac{1}{2}h(a+c)$ ist, so soll $h^2(a+2c)$ ein Maximum werden. Also $\text{Max} = h^2(3a - 4\sqrt{b^2-h^2})$; führt man $\angle CBA = \varphi$ ein, so ist $\text{Max} = \sin\varphi^2(3a - 4b\cos\varphi)$. Zur Bestimmung des Maximums erhält man dann $12b\cos\varphi^2 - 6a\cos\varphi - 4b = 0$, also $\cos\varphi = \frac{a}{4b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16b^2} + \frac{1}{3}}$ und $c = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{3}}$.

12. Man soll die Oberfläche und das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation des Vierecks ABCD um die Seite AD erzeugt wird, wenn von dem Viereck gegeben sind $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle D = \delta$. Aufl. $Obfl = \pi a (a + b) \sin\alpha + \pi c (c + b) \sin\delta$; $Vol = \frac{1}{3}\pi [a^3 \sin\alpha^2 \cos\alpha + (a^2 \sin\alpha^2 + ac \sin\alpha \sin\delta + c^2 \sin\delta^2) \sqrt{b^2 - (a \sin\alpha - c \sin\delta)^2} + c^3 \sin\delta^2 \cos\delta]$.

b) Wenn ein regelmäßiges $2n$Eck, dessen großer Radius mit r und dessen kleiner Radius mit ρ bezeichnet werden möge, um den großen Durchmesser rotiert, so entsteht ein Körper, dessen $Obfl = 2\pi\rho \cdot 2r$ und dessen $Vol = \frac{1}{3}\rho \cdot Obfl = \frac{4}{3}\pi\rho^2 r$ ist. Rotiert das regelmäßige $2n$Eck dagegen um einen kleinen Durchmesser, so entsteht ein Körper, dessen $Obfl = 2\pi(r^2 + \rho^2)$ und dessen $Vol = \frac{1}{3}\rho \cdot Obfl = \frac{2}{3}\pi\rho(r^2 + \rho^2)$ ist. In beiden Fällen besteht zwischen r und ρ die Gleichung $\frac{\rho}{r} = \cos\frac{\pi}{2n}$. In den Aufgaben, in welchen das $2n$Eck um beide Durchmesser rotieren muß, werden die entstandenen Oberflächen und Volumina bei der Rotation um den großen Durchmesser resp. mit $Obfl_g$ und Vol_g, bei der Rotation um den kleinen Durchmesser mit resp. $Obfl_k$ und Vol_k bezeichnet.

13. Ein regelmäßiges 18Eck rotiert einmal um einen kleinen, dann um den großen Durchmesser. Wie verhalten sich die dadurch erzeugten Volumina? Aufl. $\frac{Vol_g}{Vol_k} = \frac{\frac{4}{3}\pi r\rho^2}{\frac{2}{3}\pi\rho(r^2 + \rho^2)} = \frac{2r\rho}{r^2 + \rho^2} = 0{,}99988$, da $\rho = r \cos 10^0$ ist.

14. Oberfläche und Inhalt eines Körpers zu berechnen, welcher entsteht, wenn ein regelmäßiges 16Eck um seinen kleinen Durchmesser rotiert und der große Durchmesser = 2 ist. Aufl. $\rho = r \cos 11^0 15' = 0{,}98079\, r$(mithin $Obfl = 2\pi\, 1{,}9619$; $Vol = \frac{1}{3}\rho \cdot Obfl = 4{,}03$.

15. Wie groß ist das Volumen eines Körpers, welcher durch Rotation eines regelmäßigen 12Ecks um einen großen Durchmesser entsteht, wenn die Seite des 12Ecks = 1 ist? Aufl. $\rho = r \cos 15^0$; $\frac{1}{2} s = r \sin 15^0$ oder $r = \frac{1}{2 \sin 15^0}$; also $\rho = \frac{1}{2}\cot 15^0$; $Obfl = 4\pi r\rho = \frac{\pi \cot 15^0}{\sin 15^0}$; $Vol = \frac{\pi \cot 15^{0^2}}{6 \sin 15^0} = 28{,}177$.

16. Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Körper von gleichem Volumen, welche durch Rotation eines regelmäßigen 16Ecks und eines regelmäßigen 18Ecks um ihre großen Durchmesser entstanden sind?

Aufl. $\rho_{16} = r_{16} \cos 11^{0}15' = 0{,}98079\, r_{16}$; $Obfl_{16} = 4\pi r_{16}^2 . 0{,}98079$; $Vol_{16} = \frac{1}{3} \rho_{16} . Obfl_{16} = \frac{1}{3} r_{16} . 0{,}98079 . Obfl_{16}$. Ferner $\rho_{18} = r_{18} \cos 10^{0} = 0{,}98481\, r_{18}$; $Obfl_{18} = 4\pi r_{18}^2 . 0{,}98481$; $Vol_{18} = \frac{1}{3} \rho_{18} . Obfl_{18} = \frac{1}{3} r_{18} . 0{,}98481\ Obfl_{18}$. Nun ist $Vol_{16} = Vol_{18}$, also $r_{16} . 0{,}98079\ Obfl_{16} = r_{18} . 0{,}98481 . Obfl_{18}$ und daher $\frac{Obfl_{16}^2}{Obfl_{18}^2} = \frac{98481^2 r_{18}^2}{98079^2 r_{16}^2}$. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich ferner $\frac{Obfl_{16}}{Obfl_{18}} = \frac{98079\, r_{16}^2}{98481\, r_{18}^2}$. Werden die beiden letzten Gleichungen multipliziert, so erhält man $\frac{Obfl_{16}}{Obfl_{18}} = \sqrt[3]{\frac{98481}{98079}} = \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{16}}} = 1{,}0014$.

17. Die Oberfläche eines Körpers zu berechnen, welcher entsteht, wenn ein regelmäßiges 7Eck um die Senkrechte rotiert, welche von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite gefällt ist und diese Senkrechte gleich 1 ist. Aufl. Die Ecke des 7Es sei A und die Senkrechte $AE = r + \rho$; die Oberfläche besteht dann aus dem Mantel ABCD und dem Kreise mit dem Radius ED, also ist $Obfl = 2\pi\rho . AE + \pi ED^2 = 2\pi\rho . AE + \pi AE (r - \rho) = \pi (r + \rho) = \pi$.

18. Die Oberfläche und das Volumen eines Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation eines regelmäßigen 15Ecks um die Senkrechte entsteht, welche von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite gefällt ist, wenn diese Senkrechte gleich 1 ist. Aufl. Die Senkrechte sei AE; wie in 17) findet man $Obfl = \pi$; $Vol = \frac{1}{3} \rho . 2\pi\rho AE + \frac{1}{3} \pi\rho (r^2 - \rho^2) = \frac{2}{3} \pi\rho^2 + \frac{1}{3} \pi\rho (r - \rho) = \frac{1}{3} \pi\rho (r + \rho) = \frac{1}{3} \pi\rho$; da $r + \rho = 1$ und $\rho = r \cos 12^{0}$ ist, so findet man $\rho = \frac{\cos 12^{0}}{2 \cos 6^{0}2}$ also $Vol = \frac{1}{3} \pi . 0{,}4945$.

§ 46.

Rotation von Kreisen.

1. Oberfläche und Volumen desjenigen Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation eines Kreises mit dem Radius r um eine Tangente entstanden ist. Aufl. Da der Mittelpunkt des Kreises der Schwerpunkt sowohl des Umfanges wie des Inhaltes ist und von der Rotationsachse also die Entfernung r hat, so ist $Obfl = 2\pi r . 2\pi r = 4\pi^2 r^2$; und $Vol = 2\pi r . \pi r^2 = 2\pi^2 r^3$.

2. Oberfläche und Volumen desjenigen Körpers zu bestimmen, welcher durch Rotation eines Kreises mit dem Radius r um eine Achse entstanden ist, welche vom Mittelpunkt die Entfernung $2r$ hat. Aufl. $Obfl = 8\pi^2 r^2$; $Vol = 4\pi^2 r^3$.

3. Auf der Centrale $KK_1 = a$ zweier gleichen Kreise mit dem Radius r einen Punkt A so zu bestimmen, daß, wenn man an K die Tangenten AB und AD und an K_1 die Tangenten AB′ und AD′ zieht, und die Figur um KK_1 rotieren läßt, die Summe der durch die Bogen BD und B′D′ erzeugten Kalotten gleich $2\pi r^2$ ist. Aufl. Wird KA mit x bezeichnet, so ist $Kal\,BD = 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{x}\right)$ und $Kal\,B'D' = 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{a-x}\right)$; mithin $x = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a\,(a-4r)}\right)$.

4. Auf der Centrale $KK' = a$ zweier gegebenen Kugeln mit den Radien r und r′ den Punkt A so zu bestimmen, daß die Summe der beiden überblickten Kalotten ein Maximum ist. Aufl. Setzt man $AK = x$, so sind die Höhen der beiden Kalotten $r - \frac{r^2}{x}$ und $r' - \frac{r'^2}{a-x}$; mithin $Max = 2\pi r^2 + 2\pi r'^2 - 2\pi\left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{a-x}\right)$, woraus sich für den Fall des Maximums $x = \frac{a\sqrt{r^3}}{\sqrt{r^3}+\sqrt{r'^3}}$ ergiebt.

5. Gegeben Kreis K und außerhalb desselben Punkt B; von B sind an den Kreis die Tangenten $BA = BC = t$ gezogen. Das Volumen des Körpers ist zu berechnen, welchen das gemischtlinige Dreieck ABC bei der Rotation der Figur um KC beschreibt. Aufl. Fällt man noch $AD \perp KC$, so ist $Vol\,ABC = Vol\,ABCD - Vol\,ACD - Vol\,Sgm\,AC = \frac{1}{3}\pi\,CD\,(AD^2 + AD\,.\,BC + BC^2) - \frac{1}{3}\pi CD\,.\,AD^2 - \frac{1}{6}\pi AC^2\,.\,CD = \frac{1}{3}\pi\,CD\,.\,BC^2 + \frac{1}{6}\pi CD\,(2\,AD\,.\,BC - AC^2)$. Schneiden sich KB und AC in E, so ist $\triangle BEC \sim CDA$, also CE oder $\frac{1}{2}\,AC : BC = AD : AC$, mithin $AC^2 = 2\,AD\,.\,BC$. Daher $Vol\,ABC = \frac{1}{3}\pi\,CD\,.\,BC^2$. Nun ist $CD = r - KD = r - r\cos 2\alpha = 2r\sin\alpha^2$, wenn $\angle BKC$ mit α bezeichnet wird; da nun $\sin\alpha = \frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}$, so ist $CD = \frac{2rt^2}{r^2+t^2}$, also $Vol\,ABC = \frac{2rt^4}{r^2+t^2}$.

6. Gegeben sind zwei Kreise K und K′ mit den Radien r und r′, welche sich in C von außen berühren; von ihrem äußeren Aehnlichkeitspunkt S seien an K und K′ die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten SA′A und SF′F gezogen. Rotiert nun die Figur um SK, so ist das Volumen ACA′, welches zwischen dem Kegel und den Kugeln liegt,

zu berechnen. Aufl. Die gemeinschaftliche Tangente in C treffe AA' in B und von A und A' seien auf SK die Senkrechten AD und A'D' gefällt. Dann ist nach 5) $Vol\ ABC = \frac{1}{8}\pi BC^2 . CD$ und $Vol\ A'BC = \frac{1}{8}\pi BC^2 . CD'$, also $Vol\ ACA' = \frac{1}{8}\pi BC^2 . DD'$. Da nun $4BC^2 = (r+r')^2 - (r-r')^2 = 4rr'$, so ist $CD = \frac{2r\,BC^2}{r^2+t^2} = \frac{2rr'}{r+r'}$, mithin $DD' = \frac{4rr'}{r+r'}$ und $Vol\ ACA' = \frac{4}{8}\pi\frac{r^2r'^2}{r+r'}$.

7. Wird durch die in 6) näher bestimmten Punkte A, A', F', F ein Kreis gelegt und das über AA' liegende Segment AHA' genannt, so ist das bei der Rotation um SO durch Segment AHA' erzeugte Volumen zu berechnen. Aufl. $Vol\ AHA' = \frac{1}{6}\pi AA'^2 . DD'$; da $AA' = 2BC$, so ist $Vol\ AHA' = \frac{2}{8}\pi BC^2 . DD' = 2\ Vol\ ACA'$ (vergl. 6) $= \frac{8}{8}\pi\frac{r^2r'^2}{r+r'}$.

8. Berechnung von $Vol\ AA'K'K$ (Fig. wie in 6). Aufl. $Vol\ AA'K'K = Vol\ AKC + Vol\ A'K'C + Vol\ ACA' = \frac{2}{8}\pi CD(r^2+r'^2) + \frac{4}{8}\pi\frac{r^2r'^2}{r+r'} = \frac{4}{8}\pi\frac{rr'}{r+r'}(r^2+rr'+r'^2)$.

§ 47.

Rotation von Kreissegmenten.

Wenn ein Kreissegment um einen die Sehne desselben nicht schneidenden Durchmesser rotiert, so ist das durch dasselbe erzeugte Volumen bekanntlich gleich $\frac{1}{6}\pi s^2 h$, wo s die Sehne des Segmentes und h ihre Projektion auf die Rotationsachse ist. Mit Hülfe dieser Formel, welche in früheren Aufgaben schon mehrfach benutzt ist, sind nun die folgenden Aufgaben zu lösen.

Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser $AB = 2r$; in demselben ist die mit AB parallele Sehne CD gezogen. Das Volumen, die Zone und die Gesamtoberfläche des Segmentes CD, welches bei der Rotation um AB erzeugt wird, ist zu berechnen, wenn CD ist die Seite des in den ganzen Kreis beschriebenen regulären

1. Sechseckes. Aufl. $Vol = \frac{1}{6}\pi r^3$; $Zone = 2\pi r^2$; $Obfl = \pi r^2(2+\sqrt{3})$.

2. Dreieckes. Aufl. $Vol = \frac{1}{2}\pi r^3\sqrt{3}$; $Zone = 2\pi r^2\sqrt{3}$; $Obfl = 3\pi r^2\sqrt{3}$.

3. Viereckes. Aufl. $Vol = \frac{1}{8}\pi r^3\sqrt{2}$; $Zone = 2\pi r^2\sqrt{2}$; $Obfl = 3\pi r^2\sqrt{2}$.

4. Zehneckes. Aufl. $Vol = \frac{1}{6}\pi r^3(\sqrt{5}-2)$; $Zone = \pi r^2(\sqrt{5}-1)$; $Obfl = \pi r^2\left(\sqrt{5}-1+\sqrt{5-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)$.

Eine Kugel mit dem Radius r wird von einem unendlich langen Cylinder so durchdrungen, daß die Cylinderachse mit einem Durchmesser zusammenfällt; wie groß ist das innerhalb liegende Stück des Cylinders, wenn sein Durchmesser ist gleich

5. $r\sqrt{3}$. Aufl. $\frac{7}{6}\pi r^3$; vergl. 1).

6. r. Aufl. $\frac{1}{6}\pi r^3(8-3\sqrt{3})$; vergl. 2).

7. $r\sqrt{2}$. Aufl. $\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}-1)$; vergl. 3).

8. $\frac{1}{4}r\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$. Aufl. $\frac{1}{6}\pi r^3(10-\sqrt{5})$ vergl. 4.

Wie groß ist der Radius des vorher näher beschriebenen Cylinders, wenn er aus der Kugel schneidet

9. den nten Teil der Kugelfläche. Aufl. $r\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$.

10. den nten Teil des Volumens der Kugel. Aufl. $r\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}$.

11. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Radius r, dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser AB. Wie groß ist die parallel zu AB gezogene Sehne CD = x, wenn bei der Rotation des Halbkreises um AB das durch Segment CD erzeugte Volumen gleich dem durch $\triangle$ CMD erzeugten ist. Aufl. Es ist $\frac{1}{6}\pi x^3 = \frac{2}{3}\pi x\left(r^2-\frac{x^2}{4}\right)$, mithin $x = r\sqrt{2}$; also ist $\angle CMD = 90^0$ (vergl. 3).

§ 48.

Schwerpunktsbestimmungen mittels der Guldinschen Regel.

1. Den Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks zu bestimmen. Aufl. Das Dreieck rotiere um die Seite c und sein Schwerpunkt,

welcher auf der Mittellinie nach c liegen muß, habe von c die Entfernung x; dann ist $\frac{1}{3}\pi h_c^2 c = \frac{1}{2} ch_c \cdot 2\pi x$, also $x = \frac{1}{3} h_c$.

2. Den Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks ABC zu bestimmen. Aufl. Das Dreieck rotiere um AB, so ist $\pi h_c (a+b) = (a+b+c) \cdot 2\pi x$, also $x = \frac{h_c (a+b)}{2(a+b+c)}$. Bezeichnet ρ' den Radius des Inkreises des Mittendreiecks A'B'C' von ABC, so ist $\rho' = \frac{ch_c}{2(a+b+c)}$, daher $\frac{1}{2} h_c - \rho' = \frac{h_c (a+b)}{2(a+b+c)}$ also $= x$. Daher hat also der Schwerpunkt von A'B' die Entfernung ρ', dieselbe Entfernung hat er von B'C' und C'A', ist also der Mittelpunkt des Inkreises des Mittendreiecks.

3. Den Schwerpunkt eines Trapezes zu bestimmen, dessen parallele Seiten a und c und dessen Höhe h ist. Aufl. Der Schwerpunkt liegt auf der Geraden, welche die Mittelpunkte der parallelen Seiten verbindet und habe von der Seite a den Abstand x; dann ist $\pi h^2 c + \frac{1}{3}\pi h^2 (a-c) = \frac{h(a+c)}{2} \cdot 2\pi x$; mithin $x = \frac{h(a+2c)}{3(a+c)}$.

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M; berechnet werden soll der Abstand x des Mittelpunktes M von dem Schwerpunkt eines Bogens AB, welcher abgeschnitten wird durch

4. die Seite des regelmäßigen Sechseckes. Aufl. Ist C die Mitte von Bogen AB, so muß der Schwerpunkt auf MC liegen; ferner ist nach der Guldinschen Regel $\frac{2\pi r}{6} \cdot 2\pi x = 2\pi r^2$, also $x = \frac{3r}{\pi}$; mithin hat er von der Sehne den Abstand $y = \frac{6 - \pi\sqrt{3}}{2\pi} r$. Wird die Entfernung des Schwerpunktes des größeren durch die Seite abgeschnittenen Bogens vom Mittelpunkt mit x' bezeichnet, so findet man x' mittels der Momentengleichung bezogen auf eine senkrecht zu MC durch C gelegte Ebene, nämlich $x' = \frac{3r}{5\pi}$; und der Abstand desselben von der Sehne ist $y' = \frac{6 + 5\pi\sqrt{3}}{10\pi} r$.

5. die Seite des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. Behalten x, y, x' y' dieselbe Bedeutung wie in 4), so ist $\frac{2\pi r}{3} \cdot 2\pi x = 2\pi r^2 \sqrt{3}$, also $x = \frac{3r\sqrt{3}}{2\pi}$ und $y = \frac{r(3\sqrt{3} - \pi)}{2\pi}$. Ferner $x' = \frac{3r\sqrt{3}}{4\pi}$, $y' = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{4\pi} r$.

6. die Seite des regelmäßigen Vierecks. Aufl. Wenn mit x, y, x', y' dieselben Größen wie in 4) bezeichnet werden, so ist $\frac{2\pi r}{4} \cdot 2\pi x = 2\pi r^2\sqrt{2}$, also $x = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$, $y = \frac{r\sqrt{2}\,(4-\pi)}{2\pi}$; $x' = \frac{2r\sqrt{2}}{3\pi}$; $y' = \frac{(4+3\pi)\sqrt{2}}{6\pi} r$.

7. eine beliebige Sehne s. Aufl. Wird der zu s gehörende Centriwinkel mit 2α bezeichnet, so ist $s = 2r\sin\alpha$, wodurch α bestimmt ist; der zu s gehörende Bogen b ist dann gleich $\frac{\pi r\alpha}{90^0}$; mithin $2\pi x \cdot b = 2\pi rs$, also $x = \frac{rs}{b}$; $y = \frac{rs}{b} - r\cos\alpha$. Um x' und y' zu erhalten, ist in den Formeln für x und y nur $180^0 - \alpha$ statt α zu setzen; es ist daher $x' = \frac{rs}{b'}$, wo $b' = \frac{\pi r(180^0-\alpha)}{90^0}$ und $y' = \frac{rs}{b'} + r\cos\alpha$.

8. Die Entfernung x des Schwerpunktes eines Halbkreises (Bogens) vom Mittelpunkt zu berechnen. Aufl. $x = \frac{2r}{\pi}$.

Gegeben ist ein Kreis durch den Radius r; durch eine Sehne ist ein Segment abgeschnitten; ist nun x die Entfernung des Schwerpunktes des kleineren Segmentes vom Mittelpunkt des Kreises, y die des Schwerpunktes von der Sehne, x' die des Schwerpunktes des größeren Segmentes vom Mittelpunkt und y' die desselben Schwerpunktes von der Sehne, so sind x, y, x', y' zu berechnen, wenn das Segment abgeschnitten wird durch

9. die Seite des regelmäßigen Sechsecks. Aufl. Es ist $2\pi x\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^3}{6}$, also $x = \frac{r}{2\pi - 3\sqrt{3}}$; $y = x - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{11 - 2\pi\sqrt{3}}{2(2\pi - 3\sqrt{3})} r$; $x' = \frac{r}{10\pi + 3\sqrt{3}}$; $y' = \frac{10\pi\sqrt{3} + 11}{2(10\pi + 3\sqrt{3})} r$.

10. die Seite des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. Es ist $2\pi x\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi 3r^3\sqrt{3}$, mithin $x = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} r$; $y = \frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{2(4\pi - 3\sqrt{3})} r$; $x' = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} r$; $y' = \frac{8\pi + 9\sqrt{3}}{2(8\pi + 3\sqrt{3})} r$.

11. die Seite des regelmäßigen Vierecks. Aufl. $2\pi x\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{6}\pi . 2r^3\sqrt{2}$, also $x = \frac{2\sqrt{2}}{3(\pi-2)}\,r$; $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,r = \frac{\sqrt{2}\,(10-3\pi)}{6\,(\pi-2)}\,r$; $x' = \frac{2\sqrt{2}}{3\,(3\pi+2)}\,r$; $y' = \frac{(9\pi+10)\sqrt{2}}{6\,(3\pi+2)}\,r$.

12. eine beliebige Sehne s. Aufl. Der zu s gehörende Centriwinkel sei 2α, so daß also $s = 2r\sin\alpha$ ist; dann ist $2\pi x\left(\frac{\pi r^2 . 2\alpha}{360} - \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha\right) = \frac{1}{6}\pi 8r^3\sin\alpha^3$, daher $x = \frac{120\,r\sin\alpha^3}{\pi\alpha - 90\sin 2\alpha} = \frac{s^3}{12\,Sgm'}$ wenn mit *Sgm* das abgeschnittene Segment bezeichnet wird; $y = x - r\cos\alpha$.

13. Die Entfernung x des Schwerpunktes der Fläche eines Halbkreises vom Mittelpunkt zu berechnen. Aufl. $x = \frac{4r}{3\pi}$.

Gegeben ist ein Kreis **M** mit dem Radius r; in demselben ist die Sehne **AB** gezogen; man soll die Oberfläche und das Volumen desjenigen Körpers berechnen, welcher durch Rotation des kleineren Segmentes um **AB** entsteht, wenn **AB** ist die Seite

14. des regelmäßigen Sechsecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y . \frac{\pi r}{3}$ (y siehe 4) $= \frac{\pi\,(6-\pi\sqrt{3})}{3}\,r^2$; $Vol = 2\pi y\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (y siehe 9) $= \frac{\pi\,(11-2\pi\sqrt{3})}{12}\,r^3$.

15. des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y . \frac{2\pi r}{3}$ (y siehe 5) $= \frac{2\pi\sqrt{2}\,(4-\pi)}{3}\,r^2$ und $Vol = 2\pi y\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (y siehe 10) $= \frac{\pi\,(9\sqrt{3}-4\pi)}{12}\,r^3$.

16. des regelmäßigen Vierecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y . \frac{\pi r}{2}$ (y siehe 6) $= \frac{\pi\sqrt{2}\,(4-\pi)}{2}\,r^2$ und $Vol = 2\pi y\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)$ (y siehe 11) $= \frac{\pi\sqrt{2}\,(10-3\pi)}{12}\,r^3$.

Dieselben Aufgaben wie 14 bis 16, nur sollen Oberfläche und Volumen des Körpers berechnet werden, welcher durch Rotation des größeren Segmentes um **AB** entsteht, wenn **AB** ist die Seite

17. des regelmäßigen Sechsecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y' \cdot \frac{5}{6}\, 2\pi r$ (y' siehe 4) $= \frac{\pi(6 + 5\pi\sqrt{3})}{3}\, r^2$; $Vol = 2\pi y' \left(\frac{5\pi r^2}{6} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (y' siehe 9) $= \frac{\pi(10\pi\sqrt{3} + 11)}{12}\, r^3$.

18. des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y' \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi r$ (y' siehe 5) $= \frac{2\pi(3\sqrt{3} + 2\pi)}{3}\, r^2$; $Vol = 2\pi y' \left(\frac{2\pi r^2}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (y' siehe 10) $= \frac{\pi(8\pi + 9\sqrt{3})}{12}\, r^3$.

19. des regelmäßigen Vierecks. Aufl. $Obfl = 2\pi y' \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi r$ (y' siehe 6) $= \frac{\pi\sqrt{2}\,(4 + 3\pi)}{2}\, r^2$; $Vol = 2\pi y' \left(\frac{3\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2}\right)$ (y' siehe 11) $= \frac{\pi\sqrt{2}\,(9\pi + 10)}{12}\, r^3$.

20. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r; in demselben ist die Sehne AB = s gezogen, zu welcher der Centriwinkel 2α und der Bogen b gehört. Man soll die Oberfläche und das Volumen desjenigen Körpers berechnen, welcher durch Rotation des Segmentes um AB entsteht. Aufl. $Obfl. = 2\pi y \cdot b$ (y siehe 7) $= rs - br\cos\alpha$; $Vol = 2\pi y \cdot Sgm$ (y siehe 12) $= \frac{1}{6}\pi(s^3 - 12r\cos\alpha \cdot Sgm)$.

Gegeben ist ein Kreis M mit dem Radius r; in demselben ist die Sehne AB gezogen und von M auf AB die Senkrechte gefällt, welche den Kreis in C trifft. Man soll die krumme Oberfläche und das Volumen desjenigen Körpers berechnen, welcher durch Rotation des kleineren Segmentes um die an den Kreis in C gelegte Tangente entsteht, wenn AB ist die Seite

21. des regelmäßigen Sechsecks. Aufl. $Obfl = 2\pi(r - x) \cdot \frac{2\pi r}{6}$ (x siehe 4) $= \frac{2\pi(\pi - 3)}{3}\, r^2$; $Vol = 2\pi(r - x)\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (x siehe 9) $= \frac{\pi(2\pi - 3\sqrt{3} - 1)}{6}\, r^3$.

22. des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. $Obfl = 2\pi(r - x)\, \frac{2\pi r}{3}$ (x siehe 5) $= \frac{2\pi(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}\, r^2$; $Vol = 2\pi(r - x)\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (x siehe 10) $= \frac{\pi(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}\, r^3$.

23. des regelmäßigen Vierecks. Aufl. $Obfl = 2\pi\,(r - x) \cdot \frac{2\pi r}{4}$ (x siehe 6) $= \pi\,(\pi - 2\sqrt{2})\,r^2$; $Vol = 2\pi(r-x)\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)$ (x siehe 11) $= \frac{\pi\,(3\pi - 6 - 2\sqrt{2})}{6}\,r^3$.

Dieselben Aufgaben wie 21 bis 23, nur sollen die krumme Oberfläche und das Volumen des Körpers berechnet werden, welcher durch Rotation des größeren Segmentes um die an den Kreis in C' gelegte Tangente entsteht (wo C' der Punkt ist, in welchem die Verlängerung von CM über M hinaus den Kreis trifft), wenn AB ist die Seite

24. des regelmäßigen Sechsecks. Aufl. $Obfl = 2\pi\,(r - x') \cdot \frac{5}{6} \cdot 2\pi r$ (x' siehe 4) $= \frac{2\pi\,(5\pi - 3)}{3}\,r^2$; $Vol = 2\pi\,(r - x')\left(\frac{5\pi r^2}{6} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ (x' siehe 9) $= \frac{\pi\,(10\pi + 3\sqrt{3} - 1)}{6}\,r^3$.

25. des regelmäßigen Dreiecks. Aufl. $Obfl = 2\pi\,(r - x') \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi r$ (x' siehe 5) $= \frac{2\pi\,(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}\,r^2$; $Vol = 2\pi\,(r - x')\left(\frac{2\pi r^2}{3} + \frac{r^3\sqrt{3}}{4}\right)$ (x' siehe 10) $= \frac{4\pi^2}{3}\,r^3$.

26. des regelmäßigen Vierecks. Aufl. $Obfl = 2\pi\,(r - x') \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi r$ (x' siehe 6) $= \pi\,(3\pi - 2\pi\sqrt{2})\,r^2$; $Vol = 2\pi\,(r - x')\left(\frac{3\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2}\right)$ (x' siehe 11) $= \frac{\pi\,(9\pi + 6 - 2\sqrt{2})}{6}\,r^3$.

27. Gegeben ist ein Kreis M mit dem Radius r; in demselben ist die Sehne AB = s gezogen, zu welcher der Centriwinkel 2α und der Bogen b gehört; ferner ist von M auf AB die Senkrechte gefällt, welche den zu AB gehörenden Bogen in C trifft. Man soll die krumme Oberfläche und das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation des Segmentes um die an den Bogen in C gelegte Tangente entsteht. Aufl. $Obfl = 2\pi\,(r - x)\,b$ (x siehe 7) $= 2\pi r\,(b - s)$; $Vol = 2\pi\,(r - x) \cdot Sgm$ (x siehe 12) $= \frac{1}{6}\,\pi\,(r \cdot Sgm - s^3)$.

28. Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seite a; in dasselbe ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt O beschrieben, der CD in E und AB in F berührt; EA trifft den Kreis in M; 1) das Volumen des durch Rotation des Vierecks AFOM um EF entstandenen Körpers zu berechnen; 2) das Volumen zu berechnen, wenn AFOM um AF rotiert; 3) die Lage des Schwerpunktes von AFOM zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sei $MH \perp EF$ und $ML \perp AB$. Wird EH mit x bezeichnet, so ist $MH = \frac{1}{2}x$. Nun ist $MH^2 = FH \cdot EH$ und hieraus $x = \frac{4}{5}a$; $FH = \frac{1}{5}a$; $EM = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Nun ist *Vol* $AFOM = \frac{1}{3}\pi OH \cdot MH^2 + \frac{1}{3}\pi HF\,(AF^2 + AF \cdot MH + MH^2) = \frac{17}{300}\pi a^3$. 2) *Vol* $MAFO = \frac{1}{3}\pi AL \cdot ML^2 + \frac{1}{3}\pi LF\,(OF^2 + OF \cdot ML + ML^2) = \frac{4}{75}\pi a^3$. 3) Fläche $OMAF = \frac{1}{2}MH \cdot OH + \frac{1}{2}HF\,(AF + MH) = \frac{3}{20}a^2$. Hat der Schwerpunkt von EF die Entfernung y, so ist $2\pi y \cdot \frac{3}{20}a^2 = \frac{17}{300}\pi a^3$, also $y = \frac{17}{90}a$. Hat ferner der Schwerpunkt von AB die Entfernung z, so ist $2\pi z \cdot \frac{3}{20}a^2 = \frac{4}{75}\pi a^3$; also $z = \frac{16}{90}a$.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06945 1709